# NOVA

## NATUURKUNDE

## 6 VWO | GYMNASIUM

MAX METHODE NATUURKUNDE

NAAM:

KLAS:

MALMBERG



# NATUURKUNDE

## 6 VWO | GYMNASIUM

**Auteurs**

Hans van Bemmel

Lodewijk Koopman

**Eindredactie**

Claud Biemans, Frontlinie

**Met medewerking van**

Fons Alkemade

Editie 2020

Malmberg ’s-Hertogenbosch

www.malmberg.nl/nova-natuurkunde

# Inhoudsopgave

*keuzestof schoolexamen

# Voorwoord

*Nova* is op zo'n manier opgebouwd, dat je de stof vanuit verschillende invalshoeken kunt benaderen. Elk hoofdstuk bestaat namelijk uit drie delen:
**P**: de praktijk; voorbeelden van toepassingen van de theorie.
**T**: de theorie; uitleg over natuurkundige concepten, modellen en experimenten. Aan het begin van iedere paragraaf staan leerdoelen vermeld. Deze zijn afgeleid van de eindtermen uit de syllabus, waarin staat wat je voor je centraal examen allemaal moet kunnen.
**M**: de maatschappij; waarom is kennis van de theorie belangrijk voor jou, als onderdeel van die maatschappij?
Bij alle drie de delen horen opdrachten.

## Jouw eigen werkwijze

Je begint elk hoofdstuk met enkele digitale oriënterende opdrachten (Voorkennistoets). Vanzelfsprekend bepaal je samen met je docent hoe je de stof uit het hoofdstuk daarna gaat behandelen. Je kunt op verschillende manieren met *Nova* werken.

1 Vind je het belangrijk om eerst de **theoretische concepten** te bestuderen, om daarna te kijken hoe die theorie in de praktijk en de maatschappij wordt gebruikt? In dat geval begin je met het T-deel en doe je daarna het P-deel en een M-deel.
2 Ben je vooral geïnteresseerd in **toepassing**, begin dan met het P-deel. Daarna doe je het T-deel en een M-deel.
3 Wanneer je interesse vooral uitgaat naar het belang van natuurkunde voor de **maatschappij**, begin dan met een van de M-delen. De M-delen worden uitsluitend online aangeboden. Vervolgens doe je het P-deel of ga je direct naar het T-deel

**Iedereen sluit af** met het beantwoorden van de eindopdracht aan het einde van het T-deel. Indien je de theorie voldoende beheerst, moet je de opdrachten van het P-deel kunnen oplossen.

## Opdrachten

De opdrachten kennen een verschillende opbouw. Voor sommige opdrachten staat een **+**. Dat zijn extra pittige opdrachten. Bij sommige hoofdstukken zijn examenopgaven opgenomen. Soms zijn ze bewerkt (*'naar'*), soms zijn ze letterlijk overgenomen (*'bron'*). Zo word je goed voorbereid voor het examen. Als er een ⏳ staat, heb je te maken met een opdracht uit de natuurkunde-olympiade. Bij havo komt dat zelden voor, bij vwo gebeurt dat vaker. Dit zijn in het algemeen pittige opgaven.

## Oefenen

Was je in staat de opdrachten van het P-deel op te lossen, maar wil je toch nog kijken of je de stof echt beheerst? Maak dan de digitale **toets (Test jezelf)**. Besef dat de **Onthoud!** aan het einde van de paragraaf slechts dient om de kern van de paragraaf nog eens aan te geven. Deze samenvattingen volstaan NIET om een toets voor te bereiden. Om te controleren of je de begrippen uit dit hoofdstuk beheerst, kun je de online **flitskaarten** gebruiken.

Wij wensen je succes en plezier met *Nova*!

De auteurs




# HOOFDSTUK 12
# Quantumwereld

Op de superkleine schaal van atomen en kernen gebeuren er dingen die je niet kunt beschrijven met de natuurwetten uit de vorige hoofdstukken. In deze quantumwereld ligt de *uitkomst* van een proces niet langer met zekerheid vast, maar kun je alleen de *kans* bepalen dat iets zal gebeuren. Dit heeft tastbare gevolgen in de wereld om je heen: de kleur van een materiaal en de geleidbaarheid worden bepaald door quantumprocessen. De werking van camera's, elektronenmicroscopen en lasers kun je alleen begrijpen als je afdaalt naar de quantumwereld.

## Praktijk



## Theorie



## Maatschappij



**Maak de online Voorkennistoets voordat je aan dit hoofdstuk begint.**

Praktijk

# Quantumkwal

Een strand dat licht geeft als je erover loopt, vuurvliegjes die als kleine lampjes op en neer dansen, algen die de zee doen oplichten: bioluminescentie is een toverachtig verschijnsel. Verschillende micro-organismen, vuurvliegjes, maar ook zwammen, inktvissen en kwallen kunnen licht uitzenden. Nobelprijswinnaar Osamu Shimomura, die zelf op pad ging om duizenden kwallen te vangen, zorgde voor belangrijke doorbraken in het onderzoek naar de werking en de toepassing van de moleculen die hiervoor verantwoordelijk zijn. Dankzij verschillende technieken is het nu mogelijk om met behulp van deze stoffen processen in de levende cel te volgen, zoals celdeling en embryonale ontwikkeling.



## Overlevende van atoombom

Osamu Shimomura werd in 1928 geboren in Kyoto, Japan. Zijn vader diende tijdens de Tweede Wereldoorlog in het Japanse leger waardoor het gezin introk bij hun grootouders in Nagasaki. Shimomura was zo getuige van de explosie van de atoombom die velen het leven kostte. Na de oorlog werd hij toegelaten tot het farmacologisch college in Nagasaki waar hij in 1951 afstudeerde. Nadat hij een aantal jaar als analytisch chemicus had gewerkt, werd hij uitgenodigd om in Nagoya te werken bij professor Hirata. Hij kreeg de opdracht de luminescerende stof luciferine te extraheren uit gedroogde zeevuurvliegjes (*Vargula*). Deze kreeftachtigen werden in de Tweede Wereldoorlog door Japanse soldaten als lichtbron gebruikt. Samen met het enzym luciferase produceert luciferine blauw licht. Het is erg onstabiel en reageert snel met zuurstof. De Amerikaanse pionier op het gebied van bioluminescentie, Edmund Newton Harvey, had tevergeefs al twintig jaar gewerkt aan het isoleren van de stof. Tot zijn eigen verbazing kon Shimomura na tien maanden hard werken luciferinekristallen maken uit 2,5 kg zeevuurvliegjes. In 1957 werden de resultaten gepubliceerd.

## Kwallenslachtmachine

De prestatie van Shimomura trok de aandacht van Frank Johnson, leerling van Harvey. Johnson wilde samen met Shimomura onderzoek doen naar de bioluminescentie van de kwal *Aequorea* (figuur 1). In de zomer van 1961 gingen ze daarom samen op kwallenjacht op San Juan Island, ten noorden van Seattle. Ze moesten zo veel kwallen verwerken, dat Johnson een kwallenslachtmachine bouwde om het werk te vergemakkelijken.
Wat ze ook probeerden, het lukte niet om luciferine en luciferase te vinden. Shimomura opperde dat het wellicht ging om een andere stof. Johnson wilde hier niets van weten en de wetenschappers werkten koppig en afzonderlijk van elkaar verder aan het project. Het probleem waar ze tegenaan liepen, was dat het lichtgevende effect tijdens het extraheren niet te remmen was. Daarbij ging

de luminescerende stof, wat het ook was, verloren. Op een middag bedacht Shimomura dat de stof die ze zochten een eiwit kon zijn en dat daarom de pH-waarde een rol kon spelen bij het tegengaan van de reactie. Zo lukte het hem een klein beetje van de werkzame stof te extraheren. Per toeval ontdekte hij ook dat het calcium in zeewater nodig is voor de luminescentie van dit eiwit.

Met deze nieuwe kennis en het extract van ruim tienduizend kwallen lukte het Shimomura een paar milligram van het pure eiwit te krijgen dat blauw licht uitzendt. Dit eiwit noemde hij aequorine, naar de Latijnse naam van de kristalkwal. Hij ontdekte ook nog een kleine hoeveelheid van een ander eiwit, dat groen licht uitzendt. Dit eiwit is later GFP gedoopt: *green fluorescent protein*.

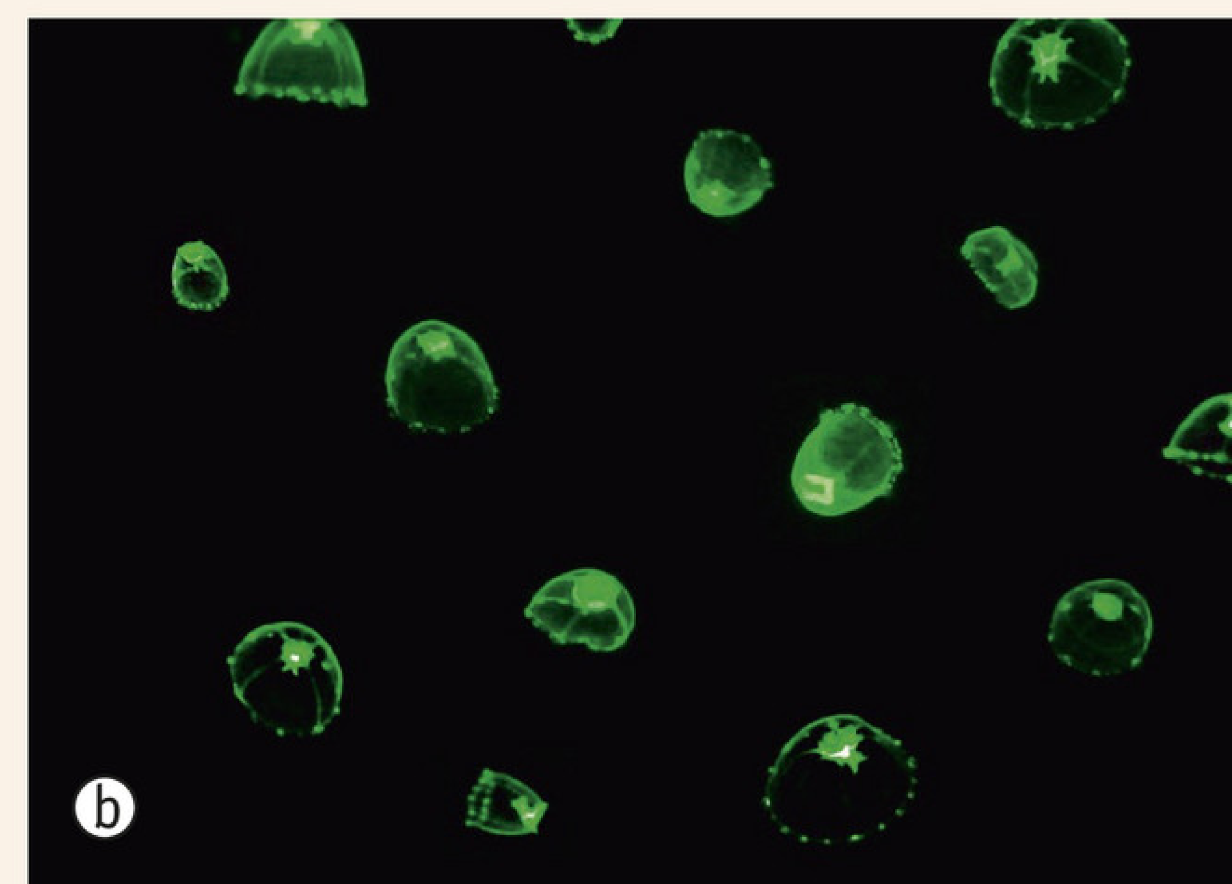
## Levende quantumlampjes

Bioluminescentie wordt veroorzaakt door een chemische reactie waarbij energie vrijkomt in de vorm van licht. In het geval van het zeevuurvliegje is dat blauw licht (zie foto op pagina 6). Onder invloed van een enzym oxideert luciferine dat daardoor in een aangeslagen toestand raakt en bij het terugvallen een blauw foton uitzendt. Dit verschijnsel wordt chemoluminescentie genoemd.

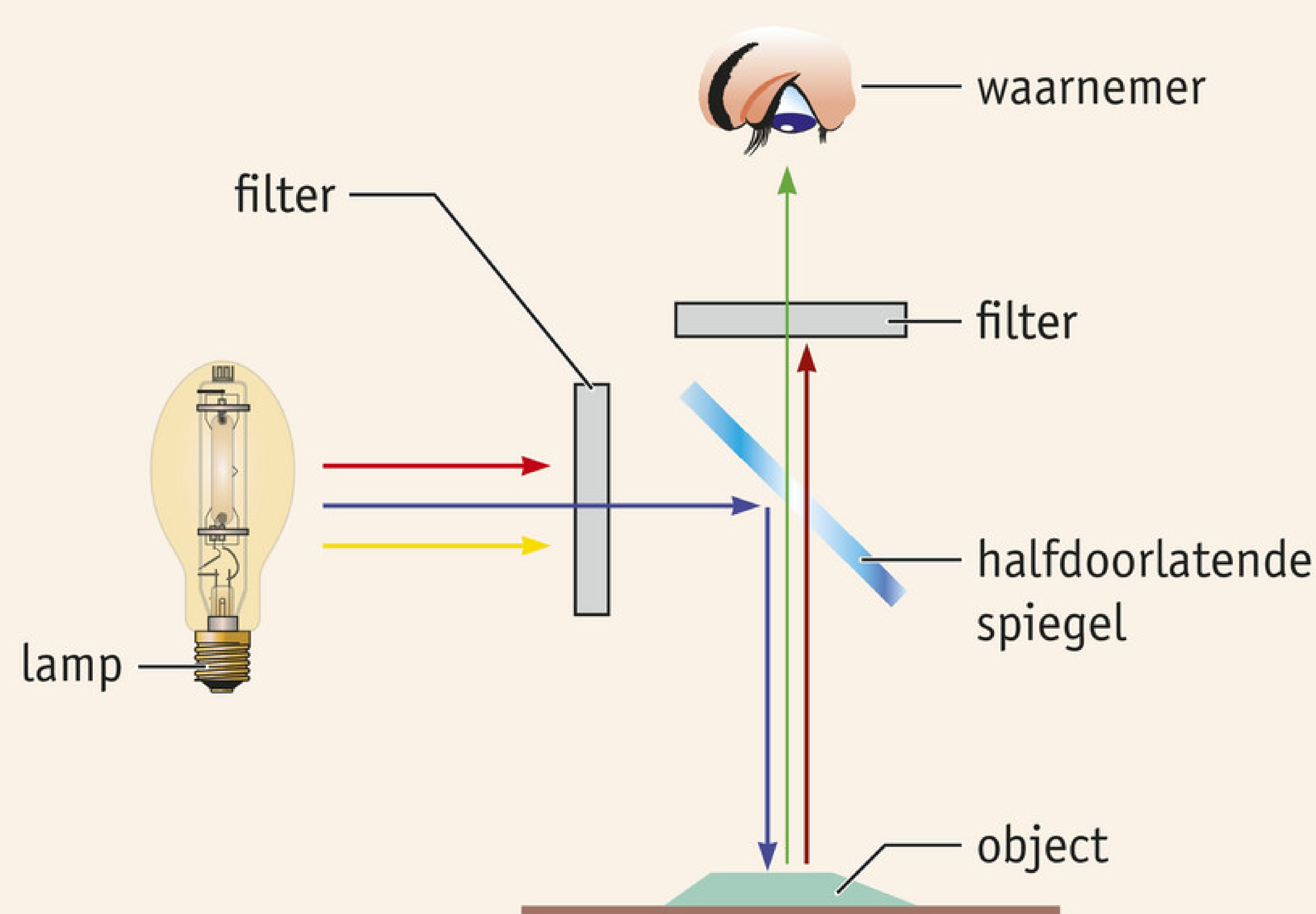
Kristalkwallen zenden groen licht uit (figuur 1b). Net als bij het zeevuurvliegje vindt er een reactie plaats waarbij een blauw foton wordt uitgezonden. In de kristalkwal gebeurt dat door het eiwit aequorine onder invloed van calcium ($Ca^{2+}$). Het blauwe foton wordt vervolgens geabsorbeerd door een ander eiwit (GFP) dat een groen foton uitzendt. Dit laatste proces wordt fluorescentie genoemd.

“When I finally succeeded, I was so happy I couldn’t sleep for three days. Since the end of the war, my life had been dark, but this gave me hope for my future.”




▲ **figuur 1** Een kristalkwal (*Aequorea victoria*): het blauwe schijnsel (a) is een gevolg van de verstrooiing van wit licht, de groene rand (b) is het gecombineerde effect van bioluminescentie en fluorescentie.

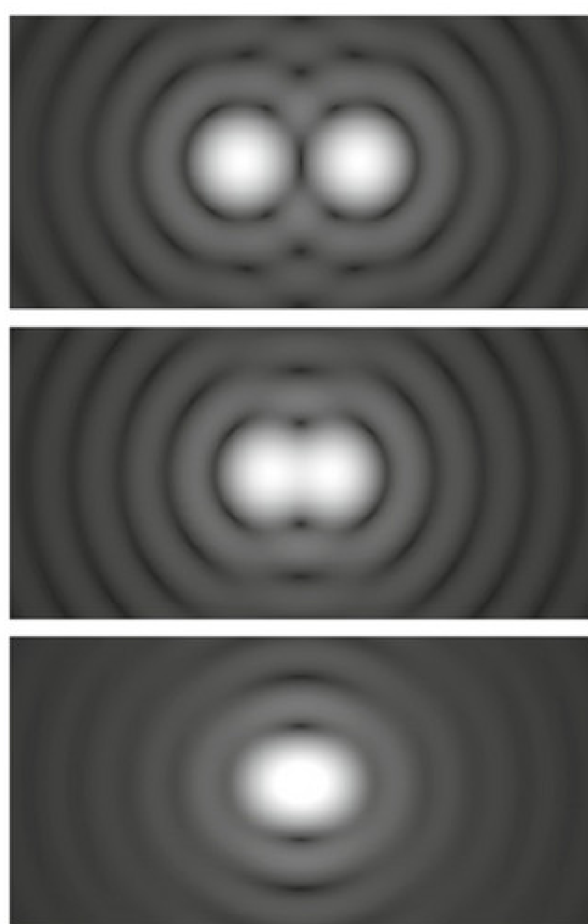



▲ **figuur 2** Het principe van een fluorescentiemicroscoop: onder invloed van blauw licht fluoresceert het object in rood en groen.

## Celbiologisch onderzoek

Bioluminescentie heeft belangrijke toepassingen in de celbiologie. Celbiologen zijn geïnteresseerd in de (chemische) processen die in een cel verlopen. Daarbij lopen ze tegen twee beperkingen aan. Ten eerste kun je met een lichtmicroscoop niet eindeloos vergroten. Bovendien is het contrast tussen celonderdelen vaak te klein om ze van elkaar te onderscheiden. Ten tweede kun je met een lichtmicroscoop moeilijk *processen* waarnemen.

Het contrast zou verbeteren wanneer de celonderdelen zelf licht zouden uitzenden. Er zijn echter maar weinig organismen en cellen die dat van nature doen. Het is mogelijk een fluorescerende stof in te spuiten die aan specifieke celonderdelen hecht. Met een fluorescentiemicroscoop kunnen deze vervolgens in beeld worden gebracht (figuur 2). Een andere methode is om stoffen in te spuiten die licht uitzenden onder invloed van bijvoorbeeld calcium. Beide methoden maken het bovendien mogelijk



## Diffractielimiet en resolutie

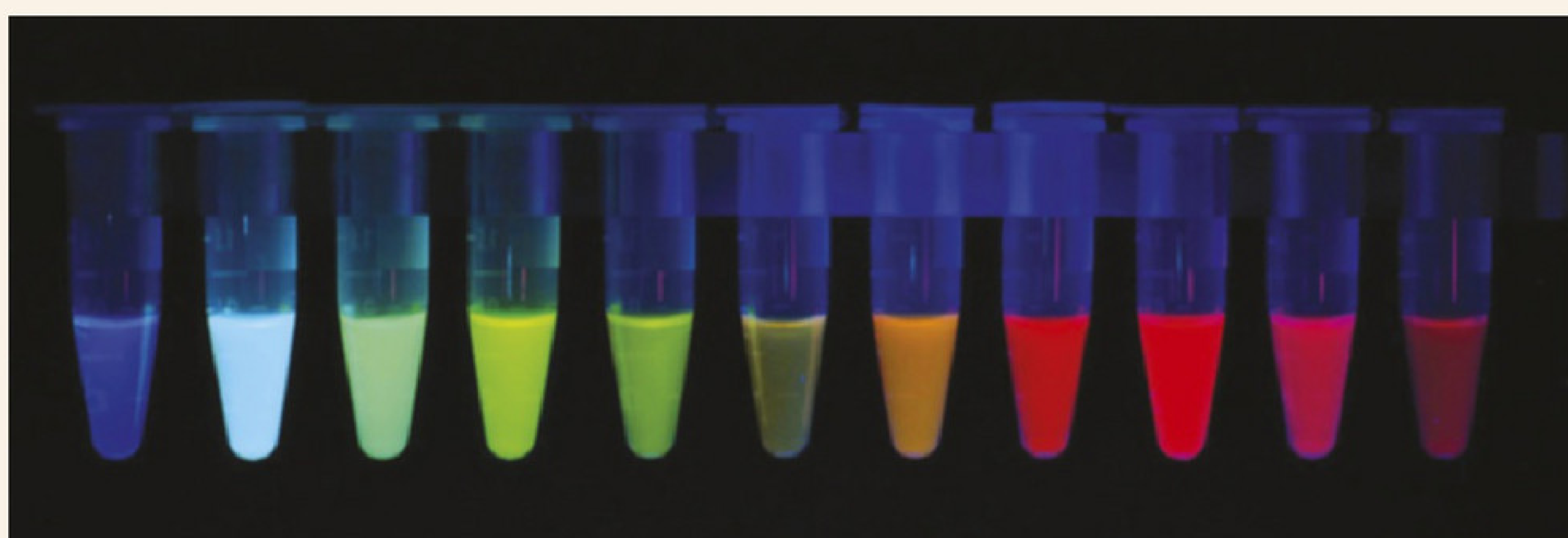
Zowel een microscoop als een telescoop heeft te maken met een beperkte resolutie als gevolg van diffractie (buiging van licht). Twee sterren die dicht bij elkaar staan, lijken daardoor samen één vlek (figuur 3). De mate van buiging, en dus de resolutie, hangt af van de golflengte van het licht en de grootte van de lens. Hoe korter de golflengte en hoe groter de lens, hoe hoger de resolutie.

▲ **figuur 3** Twee puntbronnen worden als twee vlekken afgebeeld (boven). Als de bronnen te dicht bij elkaar staan, zijn ze niet meer van elkaar te onderscheiden (onder).

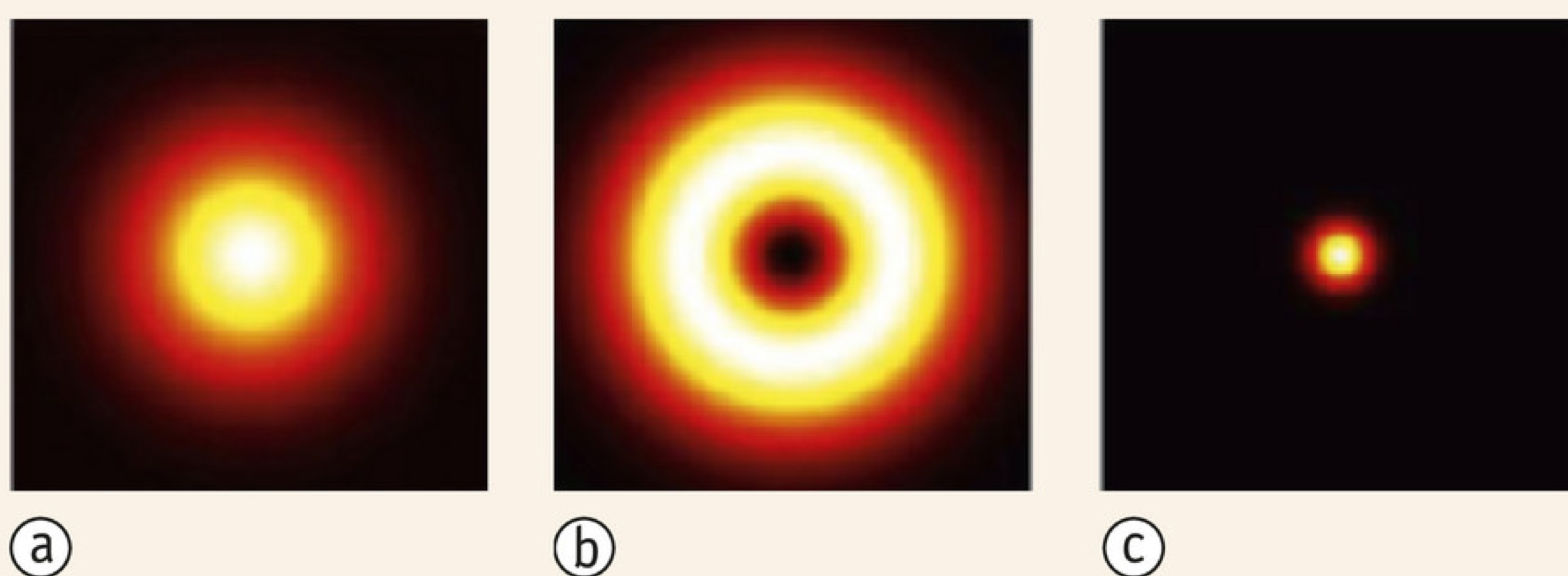
processen in de cel te volgen.
De ingespoten stoffen zijn echter vaak giftig, waardoor cellen doodgaan. Levende cellen kunnen op deze manier niet worden onderzocht. Daarom wordt er al vanaf het ontwikkelen van de eerste fluorescentiemicroscoop, begin twintigste eeuw, gezocht naar andere manieren om cellen te 'kleuren' met luminescerende stoffen. Zoals vaker wordt er dan gekeken naar natuurlijke processen.

## Gentechniek

In 1979 had Shimomura de werking van zowel aequorine als GFP achterhaald. In de jaren 1960 was het al duidelijk dat deze eiwitten interessant waren voor celbiologisch onderzoek. Maar de eiwitten konden alleen uit levende kwallen worden gewonnen en dat leverde slechts kleine hoeveelheden op. Bovendien liep tegen 1990 de populatie kristalkwallen ver terug als gevolg van milieuvervuiling.



▲ **figuur 4** op GFP gebaseerde fluorescerende eiwitten



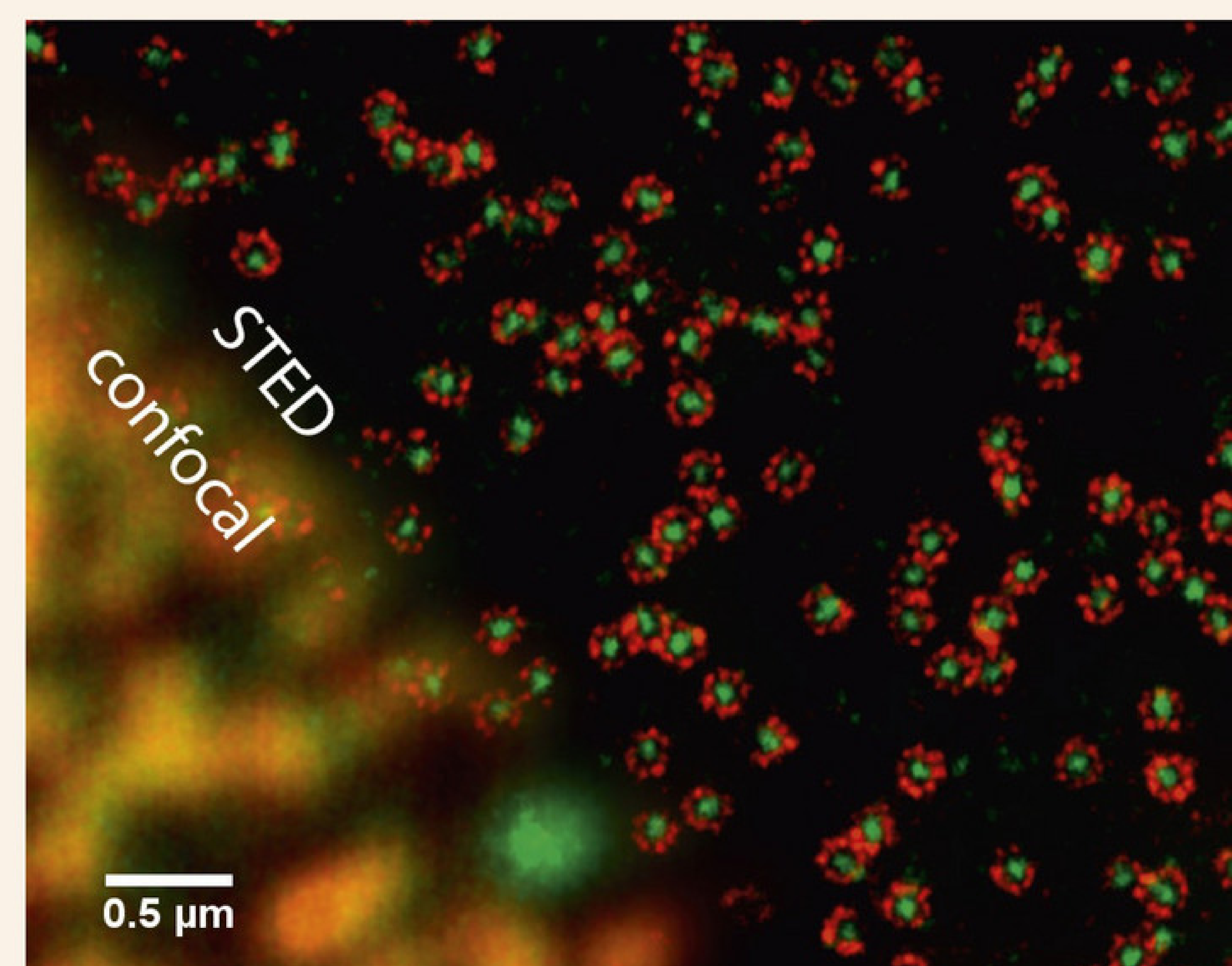

▲ **figuur 5** (a) profiel van een laserbundel gebruikt bij een fluorescentiemicroscoop; (b) profiel van de tweede laserbundel bij STED (c); overgebleven intensiteit van fluorescerende eiwitten

Nieuwe gentechnieken brachten uitkomst. In 1994 bouwde Martin Chalfie het GFP-gen in in het DNA van een rondworm, zodat het tot expressie kwam in zes speciale zenuwcellen, die daarna groen licht fluoresceerden. Roger Tsien sleutelde verder aan het genoom van GFP en zo lukte het hem een heel palet aan fluorescerende eiwitten te produceren (figuur 4). De verschillende kleuren zijn van belang voor toepassingen in medische beeldvorming. In 2008 ontvingen Shimomura, Chalfie en Tsien de Nobelprijs voor Scheikunde 'voor de ontdekking en ontwikkeling van GFP'.

## Superresolutie-fluorescentiemicroscopie

Dankzij het werk van Shimomura, Chalfie en Tsien kan GFP op verschillende plekken in het DNA van levende organismen worden ingebouwd waardoor biologische processen in detail kunnen worden onderzocht. Daarbij is de beperkte resolutie nog steeds een probleem. De GFP wordt in een fluorescentiemicroscoop door een relatief brede laserbundel aangeslagen (figuur 5). Het licht dat wordt uitgezonden is daardoor afkomstig van een vrij breed en diep gebied in het preparaat. Het levert daardoor geen scherp beeld op.
Marvin Minsky (1927–2016) ontwikkelde daarom in de jaren 1950 al de *confocale* fluorescentiemicroscoop. Een schermpje met een zeer kleine opening voor de detector laat alleen licht door dat afkomstig is van een klein gebiedje dat zo scherper wordt afgebeeld. De scherpte wordt nog steeds beperkt door de buiging van de straling, zoals in figuur 3. Hiervoor zijn twee slimme oplossingen bedacht. Stefan Hell gebruikte *twee* lasers: de eerste brengt de fluorescerende eiwitten in een aangeslagen toestand, een tweede laser stimuleert het terugvallen van de aangeslagen eiwitten. Beide laserbundels hebben een verschillend profiel: de eerste is in het

▶ **figuur 6** opname gemaakt met (links) confocale fluorescentiemicroscoop en (rechts) STED met een resolutie van 20 nm (rood licht) en 30 nm (groen licht)




midden intens en naar de randen toe steeds zwakker (figuur 5a). De tweede bundel heeft een ringvormig profiel (figuur 5b). Op een klein gebiedje na vallen daardoor alle fluorescerende eiwitten terug naar de grondtoestand. De techniek heet daarom STED: *stimulated emission depletion*. Alleen de eiwitten in een klein gebied blijven in een aangeslagen toestand. Als die vervallen geven ze een signaal dat scherper is af te beelden dan het signaal bij een enkele laser (figuur 5c). Door met deze twee laserbundels het preparaat te scannen kan van het preparaat een opname met zeer hoge resolutie worden gemaakt (figuur 6).

Eric Betzig en William Moerner vonden onafhankelijk van elkaar een manier om de fluorescentie van individuele moleculen aan en uit te zetten. Door het preparaat meerdere keren te scannen en de afbeeldingen over elkaar heen te leggen, kan zo een resolutie van 10 tot 20 nm worden bereikt.
In 2014 ontvingen Hell, Betzig en Moerner de Nobelprijs voor Scheikunde voor hun werk.

## Opdrachten

Bestudeer eerst de theorie van dit hoofdstuk voordat je de volgende opdrachten uitvoert.

**1** Bioluminescentie in de kristalkwal
Aequorine bevat een zogenoemde chromofoor die verantwoordelijk is voor het uitzenden van het blauwe foton met een golflengte van 470 nm. De GFP zet dit foton om in een foton met een golflengte van 508 nm.

- **a** Bereken de energie van het blauwe en groene foton.
- **b** Bereken hoeveel energie er ‘ontbreekt’ in dit proces.
- **c** Beredeneer wat er met deze energie kan zijn gebeurd.
- **d** Geef in een energieniveauschema het proces weer waarbij GFP een blauw foton absorbeert en een groen foton uitzendt.

**2** Superresolutie-fluorescentiemicroscopie
De Nobelprijs voor Scheikunde is in 2014 toegekend aan Eric Betzig, Stefan Hell en William Moerner voor de ontwikkeling van superresolutie-fluorescentiemicroscopie.

- **a** Beschrijf de werking van een gewone fluorescentiemicroscoop.

In een nieuwsbericht wordt uitgelegd dat het door deze ontwikkeling nu mogelijk is individuele moleculen te volgen en dat hierdoor *micro*scopie nu *nano*scopie is geworden.

- **b** Geef aan wat met deze laatste uitspraak wordt bedoeld en ga na of deze overeenkomt met de bewering dat nu moleculen kunnen worden gevolgd.
- **c** Beschrijf de werking van een lichtmicroscoop en leg daarbij uit waarom de resolutie beperkt is door de buiging van licht.

In hetzelfde artikel wordt gezegd dat ‘de Nobelprijs voor Scheikunde dit jaar voortbouwt op die van 2008, toen de prijs naar de ontdekking van groen fluorescerend eiwit ging, dat onmisbaar is in de nanoscopietechnieken die vandaag met een Nobelprijs zijn beloond’.

- **d** Licht het belang toe van de Nobelprijs voor Scheikunde uit 2008 voor de prijs uit 2014.
- **e** Vergelijk de resolutie van de superresolutie-fluorescentiemicroscoop met die van een lichtmicroscoop, een scanning-tunnelingmicroscoop (STM) en een elektronenmicroscoop (TEM).

De techniek die voor een hogere resolutie zorgt heet STED.

- **f** Leg in je eigen woorden de werking van STED uit. Teken ook het bijbehorende energieniveauschema voor dit proces.
- **g** Leg uit dat elk van de lasers wordt beperkt door een resolutie, analoog aan de resolutie van een lichtmicroscoop (figuur 3 en 5).
- **h** Leg uit hoe er met de twee lasers samen toch een hogere resolutie kan worden behaald.

# 1 Quanta

In deze paragraaf leer je:
- benoemen welke grootheden gequantiseerd zijn en wat de bijbehorende quanta zijn;
- uitleggen hoe de quantisatie in atomen zorgt voor lijnenspectra;
- berekenen welke golflengten straling het waterstofatoom kan uitzenden op basis van de energieniveaus;
- beredeneren of een systeem quantum of klassiek is op basis van de relatieve grootte van de quanta.

Op kleine schaal gedraagt de natuur zich heel anders dan in de macroscopische wereld. Zo zijn er op atomaire schaal andere natuurwetten dan in de sport of in het verkeer. Wel zijn veel macroscopische verschijnselen, zoals kleur en geleiding, te verklaren met microscopische processen in atomen en moleculen. De microscopische wereld is een quantumwereld: bepaalde grootheden zijn gequantiseerd. Ze kunnen niet zomaar elke willekeurige waarde aannemen.

## Klein is anders

Mensen kunnen niet over water lopen. Er zijn organismen die dat wel kunnen, zoals de schaatsenrijder in figuur 1. De natuurwetten die voor ons gelden, gelden ook voor de schaatsenrijder. Door de kleinere schaal zijn de uitkomsten alleen heel anders. Zo zijn er meer voorbeelden te geven. Een paard dat een val van een paar meter hoogte maakt, zal het niet overleven, een muis wel. De verhouding tussen de zwaartekracht en de luchtweerstandskracht pakt voor het paard een stuk minder gunstig uit dan voor de muis.



▲ **figuur 1** een schaatsenrijder op het water

De schaatsenrijder in figuur 1 is ongeveer een centimeter lang, twee orden van grootte kleiner dan een mens. In dit hoofdstuk ga je op nog kleinere schaal kijken, bijvoorbeeld naar hoe elektronen zich gedragen, hoe atomen stabiel kunnen zijn en waar de kleur van kleurstoffen vandaan komt.

Een atoom heeft een afmeting van ongeveer $10^{-10}$ m, dus *tien* orden van grootte kleiner dan een mens en acht orden van grootte kleiner dan de schaatsenrijder. Op die kleine schaal krijg je te maken met de natuurwetten van de **quantummechanica**. In eerdere hoofdstukken heb je al kennisgemaakt met een aantal gevolgen van de quantumwetten. In deze paragraaf kijk je daar nog eens naar, maar dan met een nieuwe blik.

## Afgemeten hoeveelheden

In hoofdstuk 4 heb je geleerd dat een elektrische stroom bestaat uit elektronen die van de min- naar de pluspool van een spanningsbron gaan. Elk elektron heeft een lading gelijk aan $-e$, met $e$ het **elementair ladingsquantum**. Elke willekeurige hoeveelheid lading is een veelvoud van dat ladingsquantum. Daarom kun je zeggen dat lading **gequantiseerd** is. Een lading van bijvoorbeeld 1,17 $e$ kom je in de natuur niet tegen.
Je merkt in de praktijk weinig van het ladingsquantum. Bij statische elektrische verschijnselen zijn de ladingen al snel in de orde van $10^{-6}$ C. Dat komt overeen met ongeveer $10^{12}$ keer $e$. Een paar $e$ meer of minder maakt dan zo weinig uit, dat je lading *ervaart* alsof het een **continue grootheid** is.
Massa is een andere grootheid die in de praktijk continu lijkt, maar in werkelijkheid gequantiseerd is doordat alle materie uiteindelijk is opgebouwd uit atomen. Een klompje goud van 1,0 g bestaat uit goudatomen, elk met een massa van 197 u. De eenheid u is de atomaire massa-eenheid. Die is zo gedefinieerd dat de atoommassa ook de molaire massa is, dus voor goud geldt: $M_{Au}$ = 197 g mol$^{-1}$. Het klompje goud van 1,0 g bestaat dus uit $3{,}0 \cdot 10^{21}$ goudatomen.
Ook hier geldt weer dat je er weinig van merkt als er een paar atomen meer of minder zijn. Dus hoewel massa in werkelijkheid gequantiseerd is, speelt dat meestal geen rol.

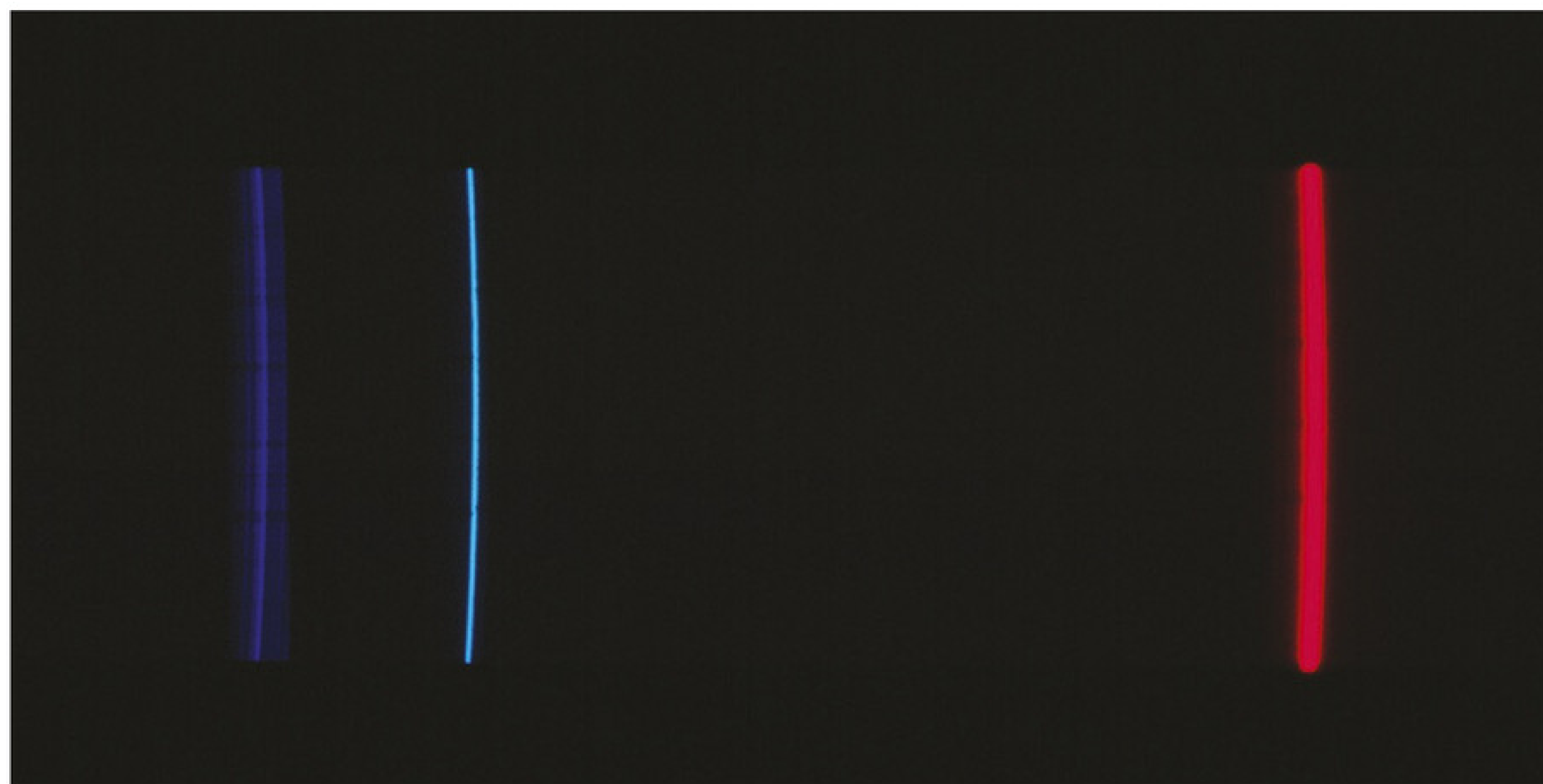
## Elektromagnetische straling

In hoofdstuk 9 heb je geleerd dat elektromagnetische straling ook gequantiseerd is. Deze straling bestaat uit fotonen: energiepakketjes met energie $h \cdot f$, met $h$ de constante van Planck. De constante $h$ duikt in meerdere gebieden van de natuurkunde op, steeds wanneer ‘klassieke’ theorieën niet meer geldig zijn. Daarom is $h$ de fundamentele natuurconstante binnen de quantumwereld.

▶ **EXPERIMENT 1** De constante van Planck bepalen (onderzoekspracticum)

## Atoomspectra

In hoofdstuk 9 heb je de spectra van sterren bestudeerd; die geven informatie over de samenstelling van de ster. De absorptielijnen, of fraunhoferlijnen, worden veroorzaakt door atomen en moleculen in de ster. De absorptielijnen komen overeen met emissielijnen van de betreffende elementen (figuur 2).



◀ **figuur 2** het emissiespectrum van waterstof in het zichtbare gebied

Het viel natuurkundigen in de negentiende eeuw op dat het spectrum van waterstof regelmaat vertoont. De frequenties van de emissielijnen, ook die buiten het zichtbare gebied, voldoen aan het volgende verband:

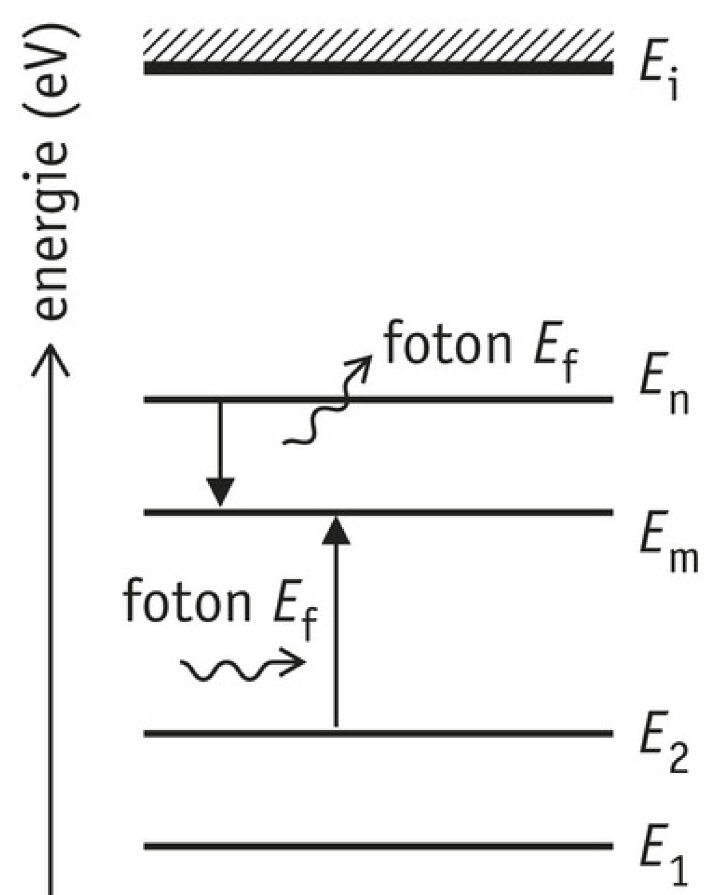
$$f = C\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Hierin is $C$ een constante en $m$ en $n$ zijn gehele getallen, waarbij $n > m$. Voor de fysici van toen was het een raadsel waarom de lijnen in het emissiespectrum met twee gehele getallen kunnen worden beschreven. Maar toen op basis van dit verband nieuwe lijnen werden voorspeld die vervolgens experimenteel werden aangetoond, bleek dat dit niet op toeval berustte.

## Modellen van het atoom

Om de regelmaat in het spectrum van waterstof te verklaren, stelde Niels Bohr in 1913 een model op van het waterstofatoom (figuur 3):

- Het waterstofatoom (systeem proton-elektron) kan zich alleen in vaste energietoestanden bevinden.
- Als het elektron van een hogere naar een lagere energietoestand gaat (van $E_n$ naar $E_m$), dan zendt het atoom een foton uit met energie gelijk aan $E_f = E_n - E_m$.
- Omgekeerd kan het atoom een foton opnemen als de energie van het foton overeenkomt met het verschil in energie van de toestanden.




▲ **figuur 3** overgangen tussen energietoestanden

Bohr leidde ook een verband af voor de energie van de toestanden van het waterstofatoom:

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

Hierin is:

- $E_n$ de energie van de $n$-de toestand van het waterstofatoom in elektronvolt (eV);
- $n$ een geheel getal: 1, 2, 3, …

$n$ wordt het **hoofdquantumgetal** genoemd, omdat de energietoestand van het waterstofatoom hierdoor wordt bepaald. De energiewaarden van de toestanden van waterstof zijn negatief. Dit is een gebruikelijke keuze voor gebonden toestanden.

**Voorbeeldopgave 1**

Een waterstofatoom bevindt zich in de derde aangeslagen toestand en valt terug naar de grondtoestand.
Bereken de golflengte van het foton dat het atoom hierbij uitzendt.

*Uitwerking*
Formules:

$E_f = E_n - E_m$

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

$E_f = h \cdot f$
$v = \lambda \cdot f$, met $v = c$

Gegevens:
$n = 4$
$m = 1$
$h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}$ J s (Binas tabel 7)
$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m s$^{-1}$ (Binas tabel 7)

$$E_f = -\frac{13{,}6}{4^2} - \frac{-13{,}6}{1^2} = 12{,}75 \text{ eV} = 2{,}043 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$f = \frac{E_f}{h} = \frac{2{,}043 \cdot 10^{-18}}{6{,}6261 \cdot 10^{-34}} = 3{,}083 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}9979 \cdot 10^{8}}{3{,}083 \cdot 10^{15}} = 97{,}2 \text{ nm}$$

Bohr kon op basis van zijn formule ook de spectra van andere, geïoniseerde atomen verklaren, bijvoorbeeld $He^+$. En omdat andere elementen ook lijnenspectra vertoonden, waren natuurkundigen het erover eens dat het model van Bohr een stap in de goede richting was. Toch had het model een aantal belangrijke beperkingen:
- Het verklaarde niet *waarom* atomen zich alleen in vaste energietoestanden kunnen bevinden.
- Het kon het spectrum van atomen en ionen met meer dan één elektron niet voorspellen.
- Het was niet in staat om chemische binding te verklaren.

Het was dus duidelijk dat er nieuwe natuurwetten nodig waren. Dit hoofdstuk gaat over de nieuwe natuurwetten van de quantumwereld. De 'oude' natuurwetten worden vaak de klassieke wetten of theorie genoemd.

## Quantum of klassiek

In het algemeen geldt dat de klassieke natuurwetten niet meer gelden wanneer je op kleine schalen kijkt. Wat 'klein' is, hangt af van de grootte van het quantum. Een lading van 1 C is groot ten opzichte van $e$ en 1 J is groot ten opzichte van de energie van één foton in zichtbaar licht. Als lading en energie wel in de orde van die quanta zijn, dan heb je quantummechanica nodig om de verschijnselen te beschrijven.
Het is niet zo dat quantummechanica alleen van toepassing is op kleine schalen. De schaatsenrijder in figuur 1 bijvoorbeeld zou je kunnen beschrijven met de quantummechanica. Het is alleen niet handig. In zulke orden van grootte kun je heel goed uitgaan van benaderingen: de natuurwetten van vóór 1900. En hoogstwaarschijnlijk zal de quantummechanica ook zelf weer een benadering zijn van een nieuwe theorie.

**Onthoud!**

- Een grootheid is gequantiseerd als deze alleen bepaalde vaste waarden aanneemt die een veelvoud zijn van een basishoeveelheid.
- Een voorbeeld van een gequantiseerde grootheid is lading, met als basishoeveelheid het elementair ladingsquantum $e$.
- Spectra van atomen zijn ook gequantiseerd: atomen zenden alleen straling met bepaalde frequenties uit.
- Het quantum van elektromagnetische straling is het foton, met energie $E_f = h \cdot f$.
- De energieniveaus van atomen, zoals het waterstofatoom, zijn ook gequantiseerd. Voor waterstof worden de energieniveaus (in eV) gegeven door $E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$, met $n$ een geheel getal.

## Opdrachten

**1** Quanta
In deze paragraaf ben je verschillende quanta tegengekomen.
**a** Geef de waarde van het elementair ladingsquantum in tien significante cijfers.
**b** Geef de naam van het quantum van elektromagnetische straling.
**c** Leg uit wat er in het model van Bohr gequantiseerd is.

**2** Schaal
Dit hoofdstuk gaat over kleine schalen. Het waterstofatoom heeft een diameter van ongeveer $10^{-10}$ m, zijn kern een diameter van ongeveer $10^{-15}$ m. Stel dat je het waterstofatoom uitvergroot zodat de kern even groot wordt als de middenstip ($d \approx 25$ cm) van een voetbalstadion.
**a** Bereken hoe groot het waterstofatoom dan zou zijn.
**b** Bereken hoe groot jij dan zou zijn.

**3** Fotonen
Fotonen hebben maar weinig energie; je merkt in het dagelijks leven niet dat elektromagnetische straling gequantiseerd is.
Bereken voor de volgende situaties hoeveel fotonen er per seconde worden uitgezonden. Neem in beide gevallen aan dat alle elektrische energie wordt omgezet in fotonen.
**a** Een ledlamp heeft een vermogen van 120 mW en een golflengte van 630 nm.
**b** Een magnetron heeft een vermogen van 800 W en een frequentie van 2450 MHz.

**4** Energieniveaus waterstof [1]
Een waterstofatoom bevindt zich in een aangeslagen energietoestand met $n = 5$ en valt terug naar toestand $n = 2$.
**a** Bereken de energie van het foton dat bij deze overgang wordt uitgezonden.
**b** Bereken de golflengte van het foton en geef aan om welk soort straling het gaat.

**5** Energieniveaus waterstof [2]
Yassine en Ruby bespreken het spectrum van waterstof zoals te zien is in figuur 2. Ze doen over de paars-violette spectraallijn de volgende uitspraken:
Yassine: “Deze fotonen hebben de kortste golflengte. Hun energie is gelijk aan die van de grondtoestand van waterstof (met $n = 1$).”
Ruby: “De energie van deze fotonen is gelijk aan het *verschil* in energie tussen twee energieniveaus.”
Leg uit wie er gelijk heeft.

**6** Spectrum van waterstof
In de theorie wordt een verband gegeven voor de frequenties van de emissielijnen van waterstof.
**a** Leid dit verband af uit de formule van Bohr voor de energieniveaus van het waterstofatoom. Bestudeer hiervoor de berekening in voorbeeldopgave 1.

In Binas tabel 20 vind je de spectra voor verschillende atomen.
**b** Bepaal de drie grootste golflengten uit het spectrum van waterstof.

In Binas tabel 21A vind je het energieniveauschema van waterstof.
**c** Bepaal welke energieovergangen horen bij de golflengten die je bij opdracht b hebt gevonden.
**d** Controleer met behulp van een berekening je antwoord op opdracht c.

**7** Quantum of klassiek?
De volgende situaties hebben te maken met elektromagnetische straling.
Leg voor elke situatie uit of deze te beschrijven is met de golfeigenschappen van elektromagnetische straling of met de quantisatie van elektromagnetische straling.

I In een magnetron met een vermogen van 800 W wordt straling opgewekt met een frequentie van 2450 MHz. De afmeting van de magnetron is zo gekozen dat deze straling wordt versterkt.

II Ozon ($O_3$) hoog in de atmosfeer beschermt ons tegen schadelijke uv-straling doordat deze moleculen bij bepaalde frequenties straling absorberen.

III Zeevonk is een eencellig organisme dat in zeewater voorkomt en bioluminescentie vertoont. Onder invloed van een enzym vindt een chemische reactie plaats waarbij licht met een golflengte van 475 nm wordt uitgezonden.

**+8** Eenheden
Voor de constante '13,6 eV' in de uitdrukking voor de energieniveaus van het waterstofatoom geldt:

$$13{,}6\ \text{eV} = 2\pi^2 \cdot \frac{m_e \cdot f^2 \cdot e^4}{h^2}$$

Met $e$ de elementaire lading, $m_e$ de massa van het elektron, $f$ de constante uit de wet van Coulomb en $h$ de constante van Planck.

**a** Geef voor elk van deze constanten een argument waarom de constante '13,6 eV' ervan afhangt.

**b** Laat door een analyse van eenheden zien dat deze combinatie van constanten de eenheid heeft van joule.

**c** Toon aan dat deze combinatie van constanten inderdaad een waarde oplevert gelijk aan 13,6 eV.

# 2 Materiegolven

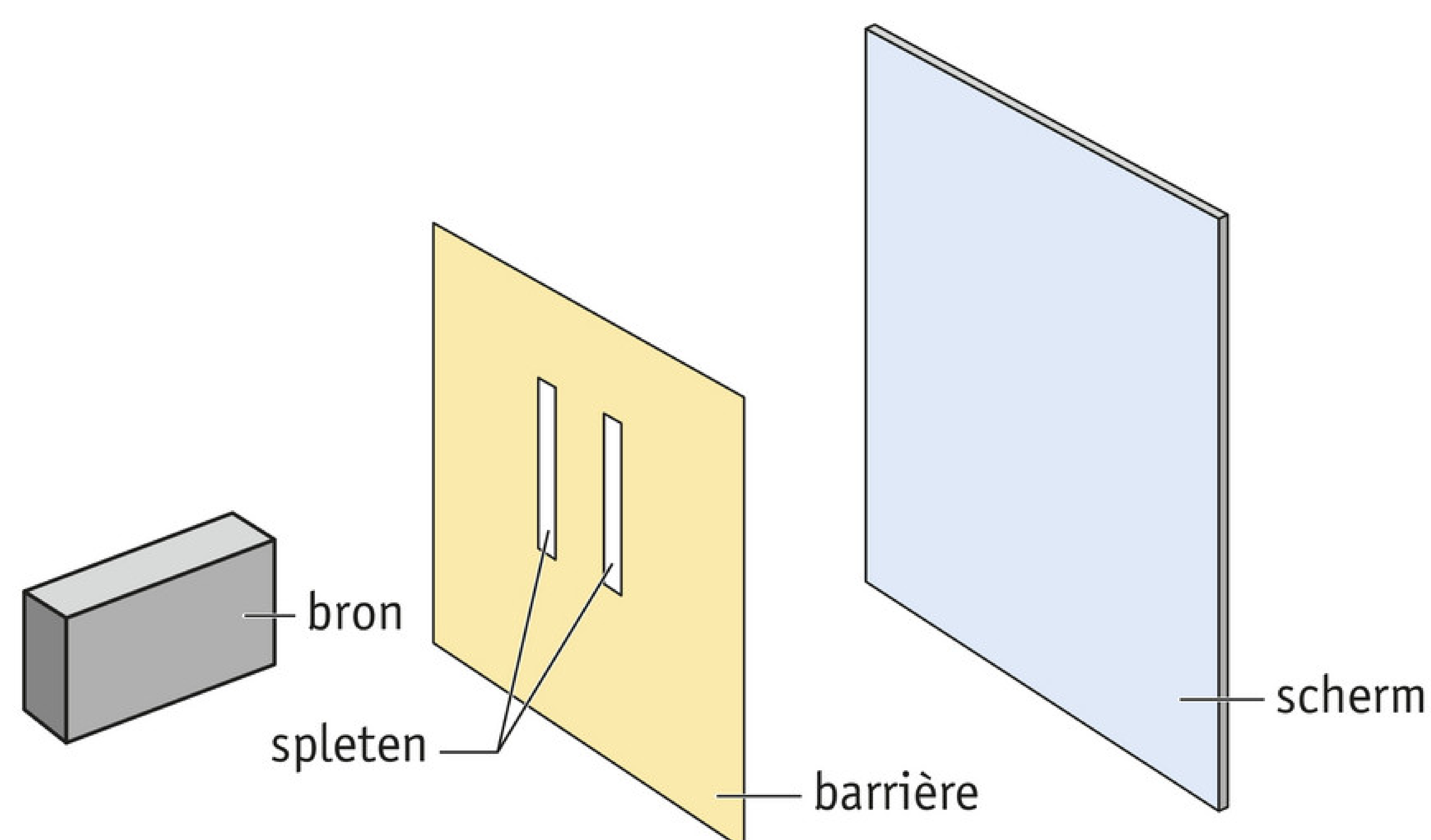
In deze paragraaf leer je:

- uitleggen dat interferentie een eigenschap is van golven;
- uitleggen onder welke omstandigheden er buiging van golven optreedt;
- uitleggen hoe het dubbelspleet-experiment te gebruiken is om te bepalen of er interferentie optreedt;
- berekeningen uitvoeren met de debroglie-golflengte.

Elektromagnetische straling, zoals licht, wordt soms als golf gezien en soms als deeltje (fotonen). Een bijzondere eigenschap van golven is dat ze kunnen interfereren: ze kunnen elkaar versterken of uitdoven. Interferentie treedt op in het zogenoemde dubbelspleet-experiment. Om te kijken of materiedeeltjes, zoals elektronen, ook als golf moeten worden beschreven, bekijk je in deze paragraaf het dubbelspleet-experiment.

## Dubbelspleet-experiment

Als je een steen in het water gooit, ontstaat een golf: een trilling die zich steeds verder uitbreidt (hoofdstuk 7). Steeds meer punten op het wateroppervlak gaan een trilling uitvoeren. Als je tegelijkertijd iets na elkaar twee stenen in het water gooit, dan gaan de golven door elkaar lopen. Waar de golven samenkomen, kunnen ze elkaar versterken; dat noem je **constructieve interferentie**. Ze kunnen elkaar ook (deels) uitdoven; dat noem je **destructieve interferentie**. Een experiment om interferentie te onderzoeken, is het dubbelspleet-experiment, ook wel tweespleten-experiment genoemd. In deze paragraaf bekijk je dit experiment voor watergolven, licht en elektronen. Het principe van de experimenten is steeds hetzelfde (figuur 4): een bron zendt golven uit die door een barrière deels worden tegengehouden. In de barrière bevinden zich twee kleine openingen (spleten). Het scherm is nodig bij licht en elektronen.

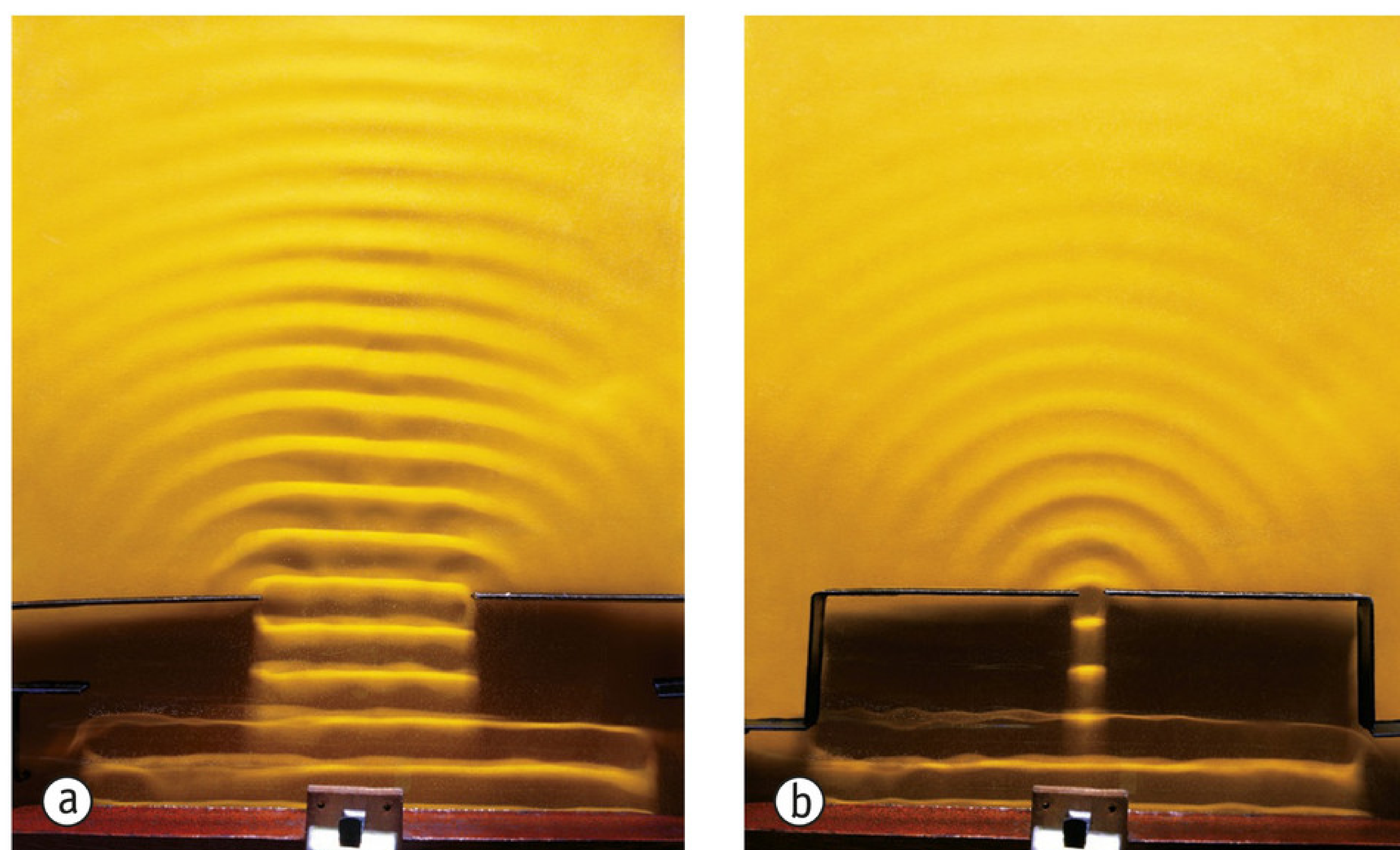



▲ **figuur 4** de opstelling van het dubbelspleet-experiment

▶ **EXPERIMENT 2** Dubbelspleet-experiment (begripspracticum)

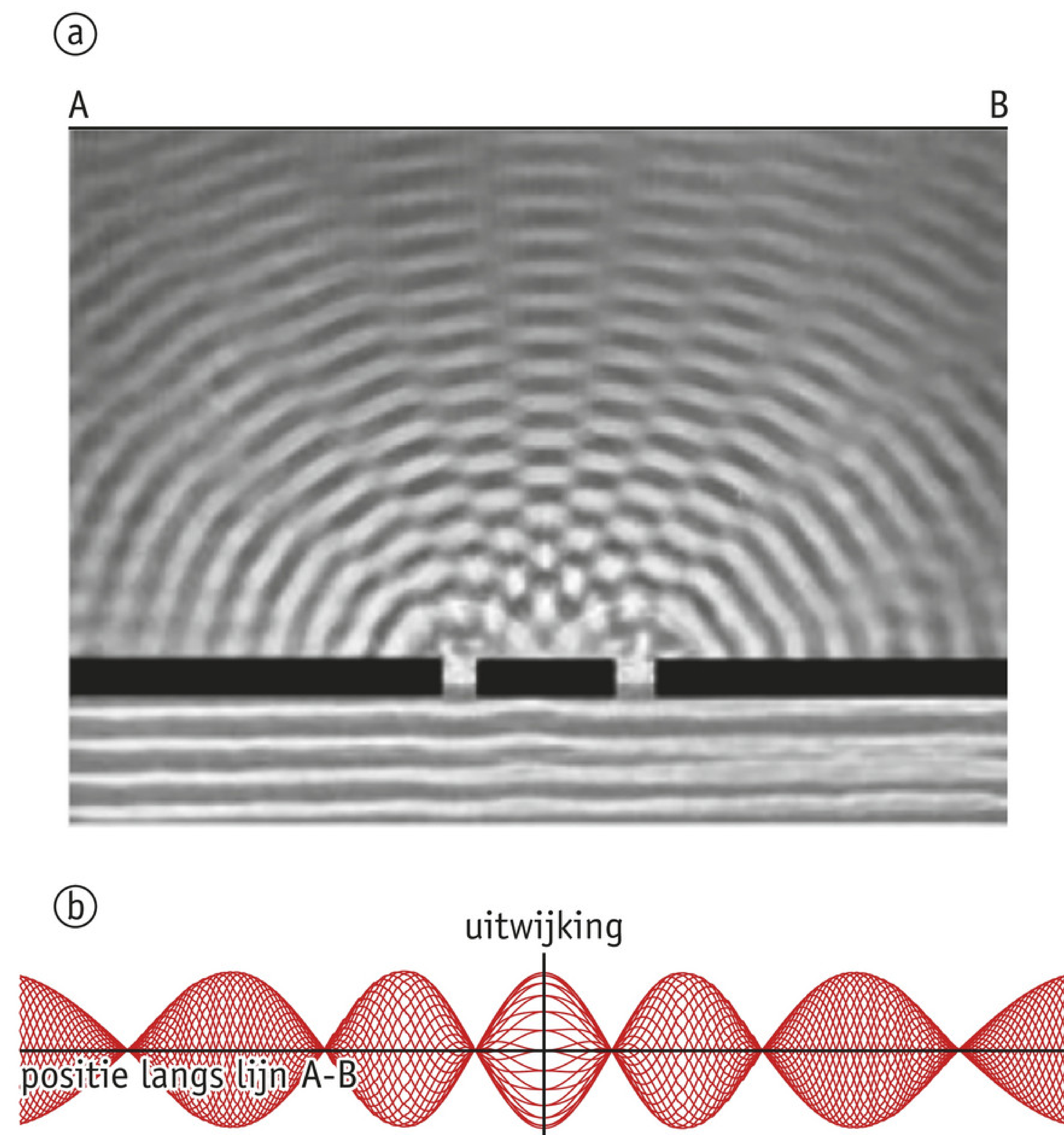
## Watergolven

In figuur 5 zie je bovenaanzichten van een bak met water. In de bak staat een barrière met een opening. Onder in de figuur trilt een plankje op het water op en neer. Zo ontstaan er vlakke golven: het golffront is recht. Als de golven de opening tegenkomen, dan gaan ze in het midden ongestoord verder, maar aan de randen treedt **buiging** op. Als de opening ongeveer gelijk is aan de golflengte van de golven, zoals in figuur 5b, dan treedt alleen buiging op en laat de opening cirkelvormige golven door. Het is alsof de opening zelf een puntbron is.




▲ **figuur 5** Buiging bij watergolven: (a) bij de randen van een opening treedt buiging op; (b) als de opening ongeveer gelijk is aan de golflengte, laat de opening cirkelvormige watergolven door.

In het dubbelspleet-experiment zijn er twee kleine openingen zoals in figuur 5b. De twee openingen zijn **coherente trillingsbronnen**: ze trillen met dezelfde frequentie en in fase. In figuur 6a zie je het resultaat. De vage, egaal grijze gebieden zijn plaatsen waar het water niet trilt. De golven uit de twee openingen doven elkaar hier uit (destructieve interferentie). Ertussen trilt het water juist heel sterk: hier versterken de golven uit de twee openingen elkaar (constructieve interferentie). Dit is ook zichtbaar in de grafiek van figuur 6b. Voor verschillende tijdstippen zie je daarin de uitwijking van het wateroppervlak langs de lijn A–B. Je ziet dat er plaatsen zijn waar het wateroppervlak niet trilt. Dit zijn knopen. Er zijn ook plaatsen die juist veel trillen, bijvoorbeeld in het midden van de grafiek. Dat zijn buiken.




◀ **figuur 6** (a) het dubbelspleet-experiment voor water; (b) de uitwijking van het wateroppervlak langs de lijn A–B

Het patroon dat in figuur 6 zichtbaar is, wordt een **interferentiepatroon** genoemd. Het is te verklaren met de golfeigenschappen van water.

## Licht

Als je met een laserpointer op een plaatje schijnt met daarin een smalle opening, dan zie je op een scherm achter de opening een patroon zoals in figuur 7. Je kunt dit vergelijken met het patroon voor water uit figuur 5. Je ziet geen stip, maar een vlek. Er treedt dus buiging op. De donkere en de lichtere plekken aan de randen van die vlek ontstaan door interferentie van golven afkomstig van verschillende plaatsen in de spleet. De opening is veel groter dan de golflengte van het licht, zodat er geen puntbron ontstaat.



▲ **figuur 7** lichtpatroon dat zichtbaar wordt achter een enkele smalle opening ($d$ = 50 µm)



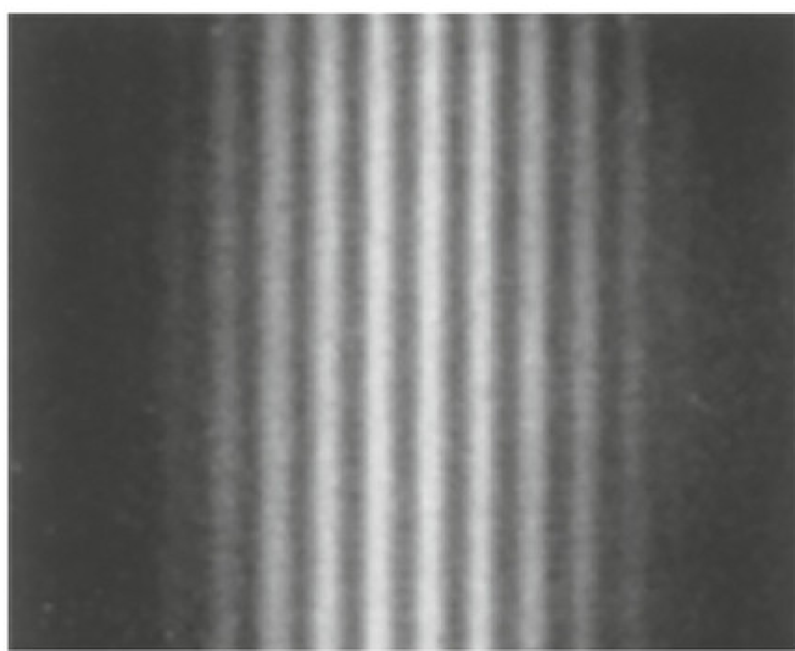
▲ **figuur 8** het dubbelspleet-experiment voor licht: lichtpatroon op het scherm achter de barrière

Als je nu met de laserpointer op *twee* smalle openingen naast elkaar schijnt, dan zou je kunnen verwachten dat je *twee* van de vlekken uit figuur 7 over elkaar te zien krijgt. Dat is echter niet het geval: op een scherm achter het plaatje wordt het patroon uit figuur 8 zichtbaar. Dit is het dubbelspleet-experiment voor licht.

Het lichtpatroon op het scherm zul je niet zien trillen, zoals je bij water wel het wateroppervlak ziet trillen. Het valt op dat heldere en donkere plekken elkaar afwisselen. Die plekken komen ruwweg overeen met de grafiek in figuur 6b. Die grafiek gaf de uitwijking langs de lijn A–B in figuur 6a. Die lijn komt overeen met de positie van het scherm in het dubbelspleet-experiment voor licht. Daar waar de watergolven constructief interfereren, is de intensiteit van het licht groot; daar waar de watergolven destructief interfereren, is het donker. Het patroon in figuur 8 is dus te verklaren door licht als golf te beschrijven. Daarom wordt ook figuur 8 een interferentiepatroon genoemd.

## Elektronen

Het dubbelspleet-experiment voor elektronen is voor het eerst door de Duitse fysicus Claus Jönsson uitgevoerd in 1961. De toen 31-jarige Jönsson gebruikte een barrière van koper waar twee spleten met een breedte van $0{,}3 \cdot 10^{-6}$ m in waren aangebracht. Achter de barrière plaatste hij fotografisch papier. Hij versnelde elektronen in een vacuüm en richtte ze op de barrière. Daar waar veel elektronen terechtkwamen, werd het papier na ontwikkelen zwart, op de andere plekken bleef het wit. In figuur 9 zie je van die foto een negatief.



▲ **figuur 9** het dubbelspleet-experiment voor elektronen

Dit patroon lijkt sterk op dat van licht. Aangezien bij water en licht het patroon volledig te verklaren is met interfererende golven, is dit een sterke aanwijzing dat elektronen zich als golf gedragen. Er is wel iets vreemds aan de hand. De elektronen worden versneld als deeltjes met massa. Zodra je ze door een beperkte ruimte stuurt, zoals de twee openingen in het dubbelspleet-experiment, gedragen ze zich blijkbaar als golf. Dit wordt de **golf-deeltjesdualiteit** genoemd.

▶ **EXPERIMENT 3** Elektronendiffractie aan grafiet (demonstratie, begripspracticum)

Bij water en licht bepaalt de golflengte hoe ver de maxima in het interferentiepatroon uit elkaar liggen. Zo is ook uit het patroon van figuur 9 de golflengte af te leiden die bij een elektron hoort. Als je dat voor verschillende snelheden doet, dan blijkt de golflengte van de elektronen kleiner te worden naarmate de snelheid toeneemt. De golflengte is dus omgekeerd evenredig met de snelheid van de elektronen. Hetzelfde experiment kun je ook uitvoeren met neutronen en ook die blijken interferentie te vertonen. Als die zwaardere neutronen dezelfde snelheid hebben als de elektronen, dan blijken ze een *kortere* golflengte te hebben. Daaruit volgt dat ook de massa van het quantumdeeltje invloed heeft. Het verband wordt dan:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{p}$$

Hierin is:
- $\lambda$ de debroglie-golflengte in meter (m);
- $h$ de constante van Planck in joule keer seconde (J s);
- $m$ de massa in kilogram (kg);
- $v$ de snelheid in meter per seconde (m $s^{-1}$);
- $p$ de impuls in kilogram keer meter per seconde (kg m $s^{-1}$).

De **debroglie-golflengte** is vernoemd naar de Franse fysicus Louis de Broglie (1892–1987), die het verband in 1924 in zijn proefschrift opstelde ('broglie' spreek je uit als 'broje'). Alle materiedeeltjes hebben, afhankelijk van hun impuls, een debroglie-golflengte. De **impuls** is een maat voor de hoeveelheid beweging van een massa. Vergelijk bijvoorbeeld een tennisbal en een bowlingbal met eenzelfde snelheid: de impuls van de bowlingbal is groter door de grotere massa. Voor niet-relativistische snelheden ($v \ll c$) geldt voor de impuls $p = m \cdot v$. In dit hoofdstuk mag je van deze niet-relativistische impuls uitgaan. In hoofdstuk 15 lees je meer over wat er met de impuls gebeurt wanneer de snelheid de lichtsnelheid nadert.

**Voorbeeldopgave 2**

Alle voorwerpen hebben een debroglie-golflengte, maar daar merk je niet altijd wat van.

**a** De gemiddelde grootte van de snelheid van een elektron in een waterstofatoom is in de orde van $1 \cdot 10^6$ m s$^{-1}$. Bereken de orde van grootte van de debroglie-golflengte van dit elektron.

**b** Bereken de orde van grootte van de debroglie-golflengte van een kogel met een massa van 10 g die met een snelheid van $5 \cdot 10^2$ m s$^{-1}$ de loop van een pistool verlaat.

**c** Geef voor beide situaties aan of je verwacht dat het systeem quantumgedrag vertoont.

*Uitwerking*
Formule:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

**a** Gegevens:
$m = m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg (Binas tabel 7)
$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s (Binas tabel 7)

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \times 1 \cdot 10^{6}} = 7{,}3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

De debroglie-golflengte is dus in de orde van $10^{-10}$ m.

**b** De massa van een kogel is 10 g en dus $10^{28}$ keer zo groot als de massa van een elektron. Bij dezelfde snelheid is de debroglie-golflengte dan ook $10^{28}$ keer zo klein, dus in de orde van grootte van $10^{-38}$ m. De kogel beweegt echter $2 \cdot 10^3$ keer zo langzaam. Dat maakt de debroglie-golflengte weer $2 \cdot 10^3$ keer zo groot. Al met al is de debroglie-golflengte van de kogel in de orde van grootte van $10^{-35}$ m.

**c** Je merkt iets van de debroglie-golflengte als er duidelijk buiging optreedt, zoals in figuur 5b voor water en figuur 7 voor licht. Je merkt iets van die buiging wanneer de golflengte van de orde van grootte van de beschikbare ruimte is. Het waterstofatoom heeft een afmeting van zo'n $10^{-10}$ m, dus vergelijkbaar met de debroglie-golflengte van het elektron. Dat systeem vertoont duidelijk quantumgedrag: het is een quantumsysteem. De kogel in de loop van het pistool bevindt zich in een ruimte van ongeveer 1 cm = $10^{-2}$ m, 33 orden van grootte groter dan de uitgerekende golflengte. Dit is geen quantumsysteem.

Uit voorbeeldopgave 2 blijkt dat je niet altijd iets merkt van de debroglie-golflengte. Door de kleine massa van subatomaire deeltjes en de kleine ruimte waarin ze zich bevinden, ga je er iets van merken. Kogeltjes die je op een dubbele spleet afvuurt, zullen dus geen interferentiepatroon veroorzaken. Moleculen met een massa in de orde van grootte van $10^4$ u zijn de grootste deeltjes waarbij het wetenschappers is gelukt om interferentieverschijnselen aan te tonen.

## Onthoud!

- Buiging van golven treedt op langs randen. Buiging is het sterkst merkbaar wanneer de golflengte van de orde van grootte is van het obstakel of de opening in het obstakel.
- Het interferentiepatroon in het dubbelspleet-experiment bevat plaatsen met volledige constructieve en destructieve interferentie. De openingen werken als twee coherente bronnen. Als een spleet ongeveer even breed is als de golflengte, werkt hij als een puntbron.
- Interferentie hoort onlosmakelijk bij golfverschijnselen. Het dubbelspleet-experiment is een opstelling om interferentie te onderzoeken.
- Materiedeeltjes hebben een debroglie-golflengte die je uitrekent met $\lambda = \dfrac{h}{p}$, met $p$ de impuls. Wanneer de snelheid veel lager is dan de lichtsnelheid, geldt voor de impuls $p = m \cdot v$.

## Opdrachten

**9** Voorwaarden voor buiging en interferentie
In figuur 5 zie je buiging optreden bij watergolven.
**a** Leg uit wanneer je iets merkt van buiging bij golven.

De maxima en minima in het interferentiepatroon in figuur 6a veranderen niet van plaats.
**b** Noem de drie voorwaarden voor het ontstaan van een dergelijk interferentiepatroon.

**10** Buiging watergolven
In figuur 5 zie je watergolven die door twee openingen van verschillende grootte deels worden doorgelaten.
Controleer voor elke figuur of de regel opgaat dat de opening in de orde van grootte moet zijn als de golflengte van de golven wil de opening werken als een nieuwe puntbron.

**11** Buiging geluidsgolven
Golven buigen ook wanneer er een obstakel is in plaats van een opening. Hoe groter de golflengte, hoe meer de golven om het obstakel buigen. Hierdoor is het bijvoorbeeld mogelijk dat je iemand hoort praten die achter een muurtje staat.
**a** Leg dit met behulp van figuur 5 uit.
**b** Beredeneer welke frequenties in het stemgeluid zo het sterkst worden afgebogen: hoge of lage?

**12** Enkele spleet
In figuur 7 zie je het lichtpatroon achter een enkele spleet. Deze opening heeft een breedte van 50 µm.
**a** Beredeneer of deze situatie het meest lijkt op die uit figuur 5a of die uit figuur 5b.

Hoewel er slechts één spleet is en niet twee, treedt hier toch interferentie op. Dat komt doordat het licht uit de opening geen puntbron vormt.
**b** Leg uit hoe je aan het patroon kunt zien dat er interferentie optreedt.
**c** Beredeneer hoe het patroon zal veranderen wanneer de opening smaller wordt.

**13** Debroglie-golflengte van een elektron
Een elektron heeft een kinetische energie van 20 eV.
Bereken de debroglie-golflengte van dit elektron.

**14** Verschillende opstellingen

Het principe van de opstelling voor het dubbelspleet-experiment voor water, licht en elektronen is gelijk. Toch kun je niet exact dezelfde opstelling gebruiken voor deze drie gevallen. Dat heeft vooral te maken met de verschillende grootte van de golflengten.

**a** Beredeneer dat de afstand tussen de openingen kleiner moet worden voor kleinere golflengten om het patroon van maxima en minima even goed zichtbaar te maken.

Een verschil tussen de opstellingen is dat je van bovenaf gezien alleen bij water golven ziet trillen (zoals in figuur 5). Bij licht en elektronen zul je niets zien.

**b** Leg uit waarom dat zo is.

**c** Noem nog enkele verschillen tussen de opstellingen voor de drie experimenten.

**15** Debroglie-golflengte

Alle deeltjes hebben een debroglie-golflengte.

Bereken voor de volgende twee situaties de debroglie-golflengte (in drie significante cijfers). Zoek eventueel benodigde gegevens op in Binas.

**a** Een auto ($m$ = 750 kg) die met een snelheid van 120 km $h^{-1}$ op de snelweg rijdt.

**b** De aarde die om de zon beweegt.

Temperatuur is een maat voor de gemiddelde kinetische energie van de deeltjes waaruit een stof bestaat. Voor een ideaal gas geldt: $E_{k,gem} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T$, met $k_B$ de constante van Boltzmann en $T$ de temperatuur in kelvin.

Bereken voor de volgende situaties de debroglie-golflengte.

**c** Een zuurstofmolecuul in een huiskamer bij $T$ = 293 K.

**d** Een waterstofmolecuul bij $T$ = 1 K.

**e** Welk deeltje of welke voorwerpen uit opdracht a-d zal of zullen zich het meest quantum gedragen? Licht je antwoord toe.

**16** Quantumgedrag

Bepaal voor de volgende situaties of er quantumgedrag te verwachten is. Maak zelf een schatting voor ontbrekende gegevens.

**a** Het groen fluorescerende eiwit GFP in een kristalkwal bevat geconjugeerde bindingen. Een elektron in zo'n geconjugeerde binding beweegt met een gemiddelde snelheid van $2 \cdot 10^6$ m $s^{-1}$. De afstand tussen de atomen is in de orde van grootte van $10^{-10}$ m.

**b** Een stofdeeltje met een snelheid van 1 m $s^{-1}$ kan 0,1 µm vrij bewegen voor het tegen een ander stofdeeltje aan botst.

**c** Een alfadeeltje, uitgezonden door een uranium-235-kern in een stuk uraniumerts.

**+17** Afleiding debroglie-golflengte

De impuls van fotonen kun je berekenen met de formule: $p = \frac{E}{c}$, met $E$ de energie van het foton en $c$ de lichtsnelheid.

Leid hiermee af wat de debroglie-golflengte is van fotonen. Vergelijk je antwoord met de vergelijking voor de debroglie-golflengte in de theorie.

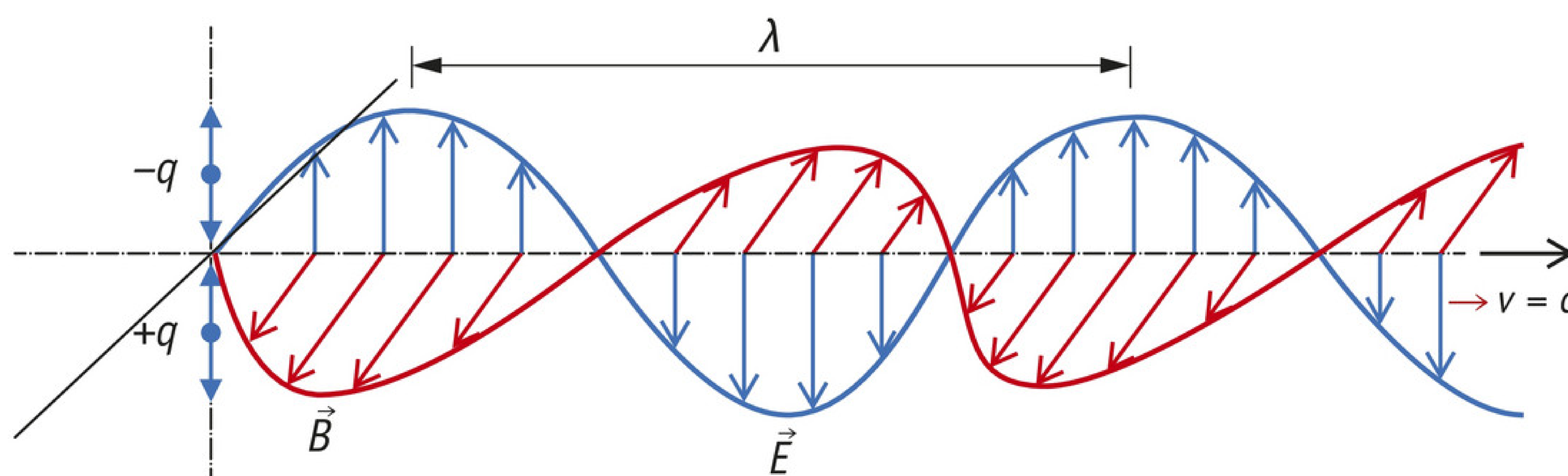
# 3 Toepassing van materiegolven

In deze paragraaf leer je:
- met behulp van de golf-deeltjesdualiteit de uitkomst van het dubbelspleet-experiment uitleggen voor elektronen en fotonen;
- met behulp van de begrippen ‘waarschijnlijkheidsverdeling’ en ‘golffunctie’ de uitkomst van het dubbelspleet-experiment voor elektronen verklaren;
- de werking van de elektronenmicroscoop uitleggen;
- uitleggen hoe de golflengte van licht en elektronen bepalend is voor de resolutie bij microscopische opnamen;
- op basis van de debroglie-golflengte en de opsluiting van een quantumdeeltje bepalen of er quantumeffecten te verwachten zijn.

Uit het dubbelspleet-experiment blijkt dat materiedeeltjes zich gedragen als golven. Daar merk je vooral wat van als de golflengte in de orde van grootte van de opening is. Maar wat die materiegolf precies is en wat deze betekent, is nog niet duidelijk. Dankzij de zeer kleine debroglie-golflengte van elektronen is het mogelijk om met een elektronenmicroscoop afbeeldingen te maken met veel meer detail dan met een lichtmicroscoop mogelijk is.

## Betekenis van de golf bij materiedeeltjes

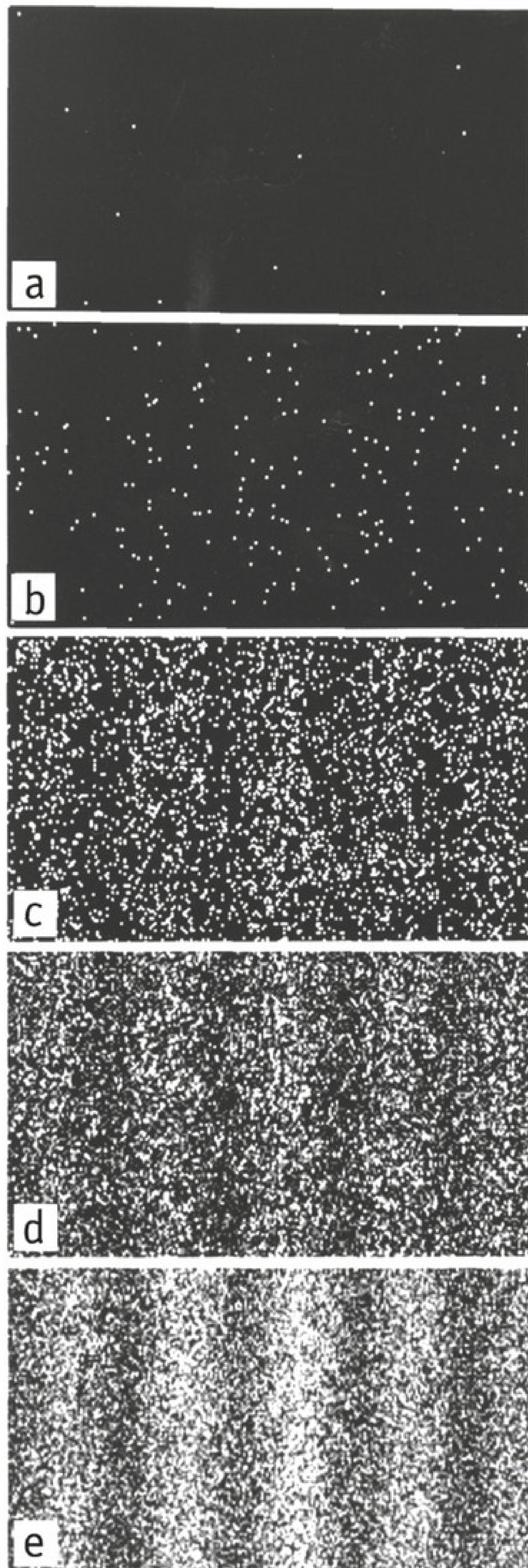
Het patroon bij het dubbelspleet-experiment (figuur 9) is te verklaren door aan te nemen dat de elektronen zich als golf gedragen. Die golven interfereren en veroorzaken het kenmerkende interferentiepatroon. De golf die bij een materiedeeltje hoort, wordt een **materiegolf** genoemd, ook wel **golffunctie**. De golflengte van deze materiegolf is de debroglie-golflengte uit de vorige paragraaf. Als deze materiegolf ergens een grote amplitude heeft, dan verschijnen daar veel elektronen. Omgekeerd: als de materiegolf ergens niet trilt (amplitude nul), dan verschijnen daar geen elektronen. Blijkbaar voorspelt de materiegolf hoeveel elektronen er in een bepaald gebied op het scherm terecht zullen komen.
Bij een watergolf is het duidelijk wat er trilt: het water gaat omhoog of omlaag. De ‘golf’ zegt dus iets over de uitwijking van het water boven of onder de evenwichtsstand. Bij licht wordt het al lastiger om aan te geven wat er nu eigenlijk trilt. Volgens de theorie van de Schotse wis- en natuurkundige James Clerk Maxwell (1831–1879) uit 1865 is licht een trilling van elektrische en magnetische velden die zich in de ruimte uitbreidt met de lichtsnelheid (figuur 10). Dat is al best moeilijk voor te stellen. Om te begrijpen wat de betekenis is van de golf bij materiedeeltjes, is het nodig het dubbelspleet-experiment beter te bestuderen.




▲ **figuur 10** een elektromagnetische golf volgens de theorie van Maxwell

## Individuele elektronen

Interferentie treedt alleen op wanneer er meerdere golven samenkomen. Als een elektron wordt beschreven door een golf, dan zou je kunnen denken dat elektronen met elkaar interfereren. Om dat uit zoeken heeft de Japanse Akira Tonomura (1942–2012) in 1989 elektronen een voor een door een dubbelspleet gestuurd. Hij hield bij waar de elektronen terechtkwamen en maakte daarvan een film. In figuur 11 zie je voor vijf verschillende tijden de posities van de elektronen op het scherm. De elektronen verschijnen op een willekeurige manier op het scherm, maar er is nog steeds een interferentiepatroon zichtbaar. De elektronen interfereren dus niet met elkaar.



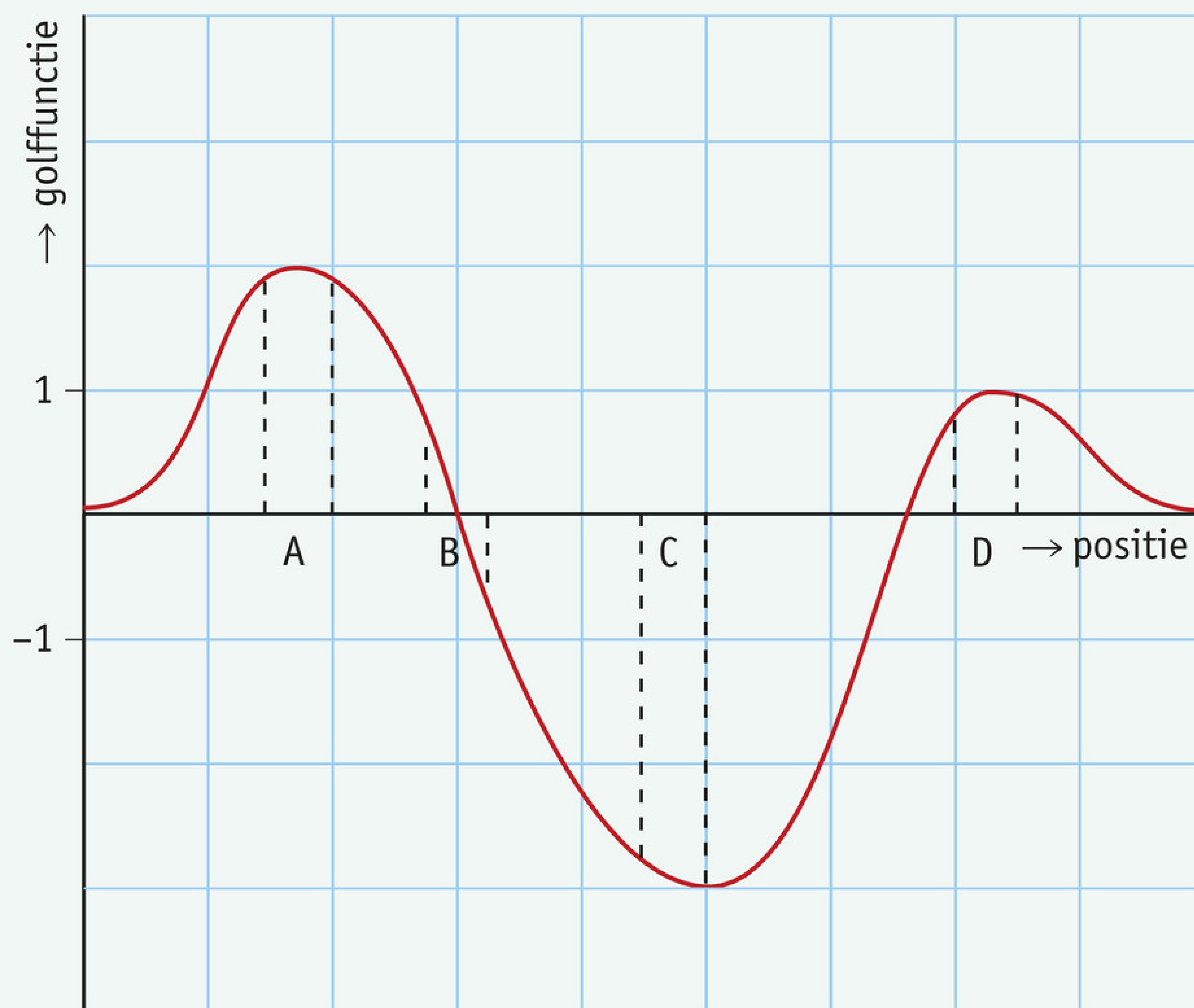

◀ **figuur 11** het experiment van Tonomura: opbouw van het interferentiepatroon

## Kansverdeling

Uit de verschillende dubbelspleet-experimenten blijkt dat de golffunctie niet voorspelt waar een enkel quantumdeeltje te vinden is, wel wat *de kans* is het ergens te vinden: hoe groter de amplitude van de golffunctie, hoe groter die kans. Het kwadraat van de golffunctie is een **kansverdeling**, ook wel waarschijnlijkheidsverdeling genoemd: het geeft de waarschijnlijkheid (kans) een quantumdeeltje in een bepaald gebied aan te treffen.
Anders dan bij water trilt er bij de golffunctie geen materie op en neer. Je kunt je wel een golf zoals bij water voorstellen en dan de vertaling maken naar kansen. Dan ziet voor elk elektron in het dubbelspleet-experiment de golffunctie op het scherm er ongeveer uit zoals de watergolven in figuur 5b. Het kwadraat van de amplitude van die golven geeft vervolgens de kans het elektron ergens aan te treffen. In tegenstelling tot de klassieke mechanica van Newton kan de quantummechanica niet langer met zekerheid zeggen welke baan, of welk pad een quantumdeeltje zal beschrijven. De quantummechanica voorspelt echter wel zeer nauwkeurig wat de *kansen* zijn om quantumdeeltjes ergens aan te treffen.

**Voorbeeldopgave 3**

In figuur 12 zie je de golffunctie van een neutron.
Orden de gebieden A tot en met D van kleine naar grote kans om het neutron aan te treffen.

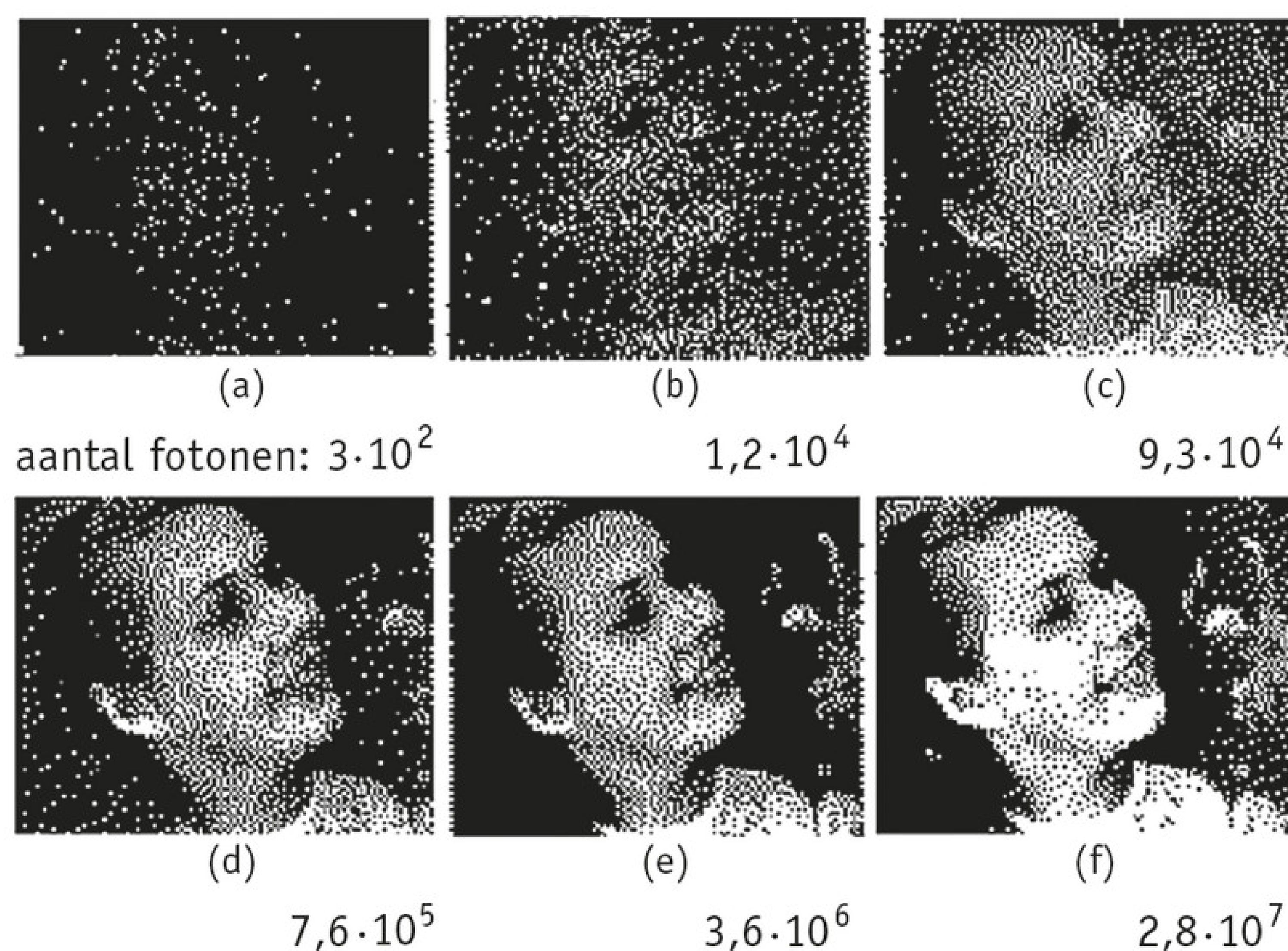



▲ **figuur 12** de golffunctie van een neutron

*Uitwerking*
De gebiedjes A, B, C en D zijn even breed, dus je hoeft alleen te kijken naar de grootte van de golffunctie. Het kwadraat daarvan is een maat voor de kans. Als de golffunctie groter is dan 1, dan wordt de kans (het kwadraat) nog groter. Als de golffunctie kleiner is dan 1, zoals in gebied B, dan wordt de kans kleiner. Van kleine naar grote kans om het neutron aan te treffen, wordt de ordening: B – D – A – C.

## Fotonen en resolutie

Bij elektronen lijkt het vreemd dat ze een interferentiepatroon kunnen veroorzaken, omdat je ze meestal als deeltje beschouwt. Voor licht is het misschien minder vreemd. In hoofdstuk 7 en 9 werd licht immers voornamelijk als golfverschijnsel gezien. Maar in paragraaf 1 en hoofdstuk 9 bleek dat licht is opgebouwd uit kleine energiepakketjes, of deeltjes: fotonen. Wat voor elektronen geldt, geldt dus ook voor fotonen: ze gedragen zich soms als deeltjes, soms als golven. In figuur 13 zie je dat deeltjeskarakter terug in de opbouw van een foto wanneer de



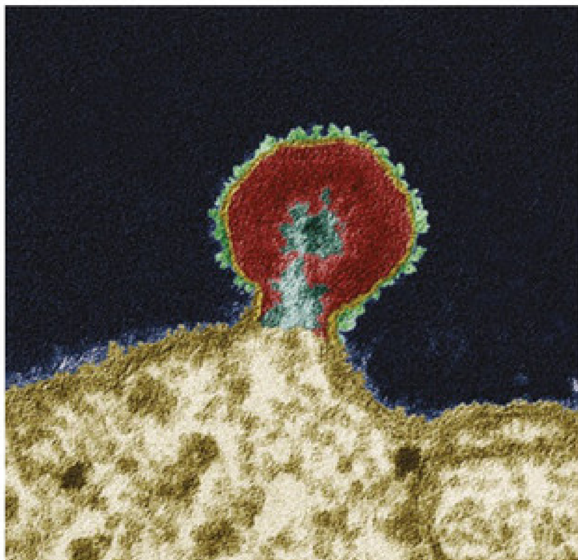

◀ **figuur 13** de opbouw van een foto door individuele fotonen

lichtintensiteit zo laag is dat fotonen stuk voor stuk op een fotografische plaat terechtkomen. Je merkt hier in het dagelijks leven niets van, omdat er al bij een heel lage lichtintensiteit heel veel fotonen zijn.

Doordat licht een golflengte heeft, kan er buiging optreden zoals in figuur 6. Die buiging is vooral merkbaar wanneer een opening of obstakel klein is, in de orde van grootte van de golflengte van het licht. Daardoor hebben lichtmicroscopen een beperkte resolutie: de minimale afstand $d$ waarop twee punten in het object nog herkenbaar als twee punten worden afgebeeld. Voor de resolutie geldt dat $d \sim \lambda$. Onder de beste omstandigheden is de resolutie van een lichtmicroscoop ongeveer 0,2 µm.

## Elektronenmicroscoop

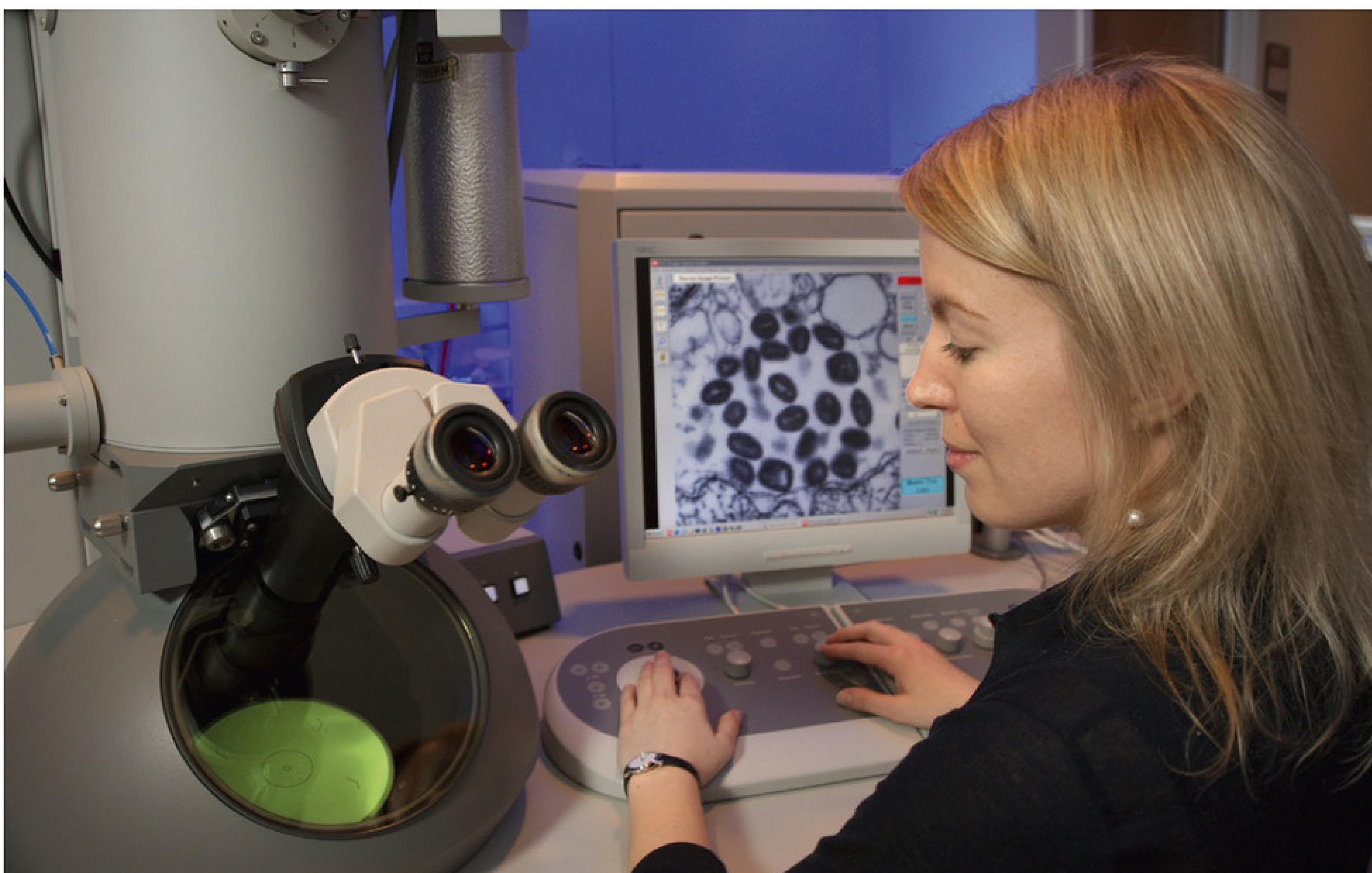
In figuur 14 zie je een microscopische opname van een virus (hiv) dat uit een afweercel komt. De diameter van het virus is slechts $2 \cdot 10^{-7}$ m, ofwel 0,2 µm. Je kunt duidelijk de structuur van zowel de afweercel als het virus zien. De resolutie van de opname is dus veel hoger dan 0,2 µm. Deze opname is dan ook niet met een gewone lichtmicroscoop gemaakt, maar met een elektronenmicroscoop. De elektronen in zo'n microscoop worden afgebogen *alsof* het licht is, maar dan met een veel kleinere golflengte. Dat maakt het mogelijk een resolutie tot wel 0,1 nm te behalen.



▲ **figuur 14** een hiv-virusdeeltje (ingekleurd) gemaakt met een transmissie-elektronenmicroscoop (vergroting 100 000×)

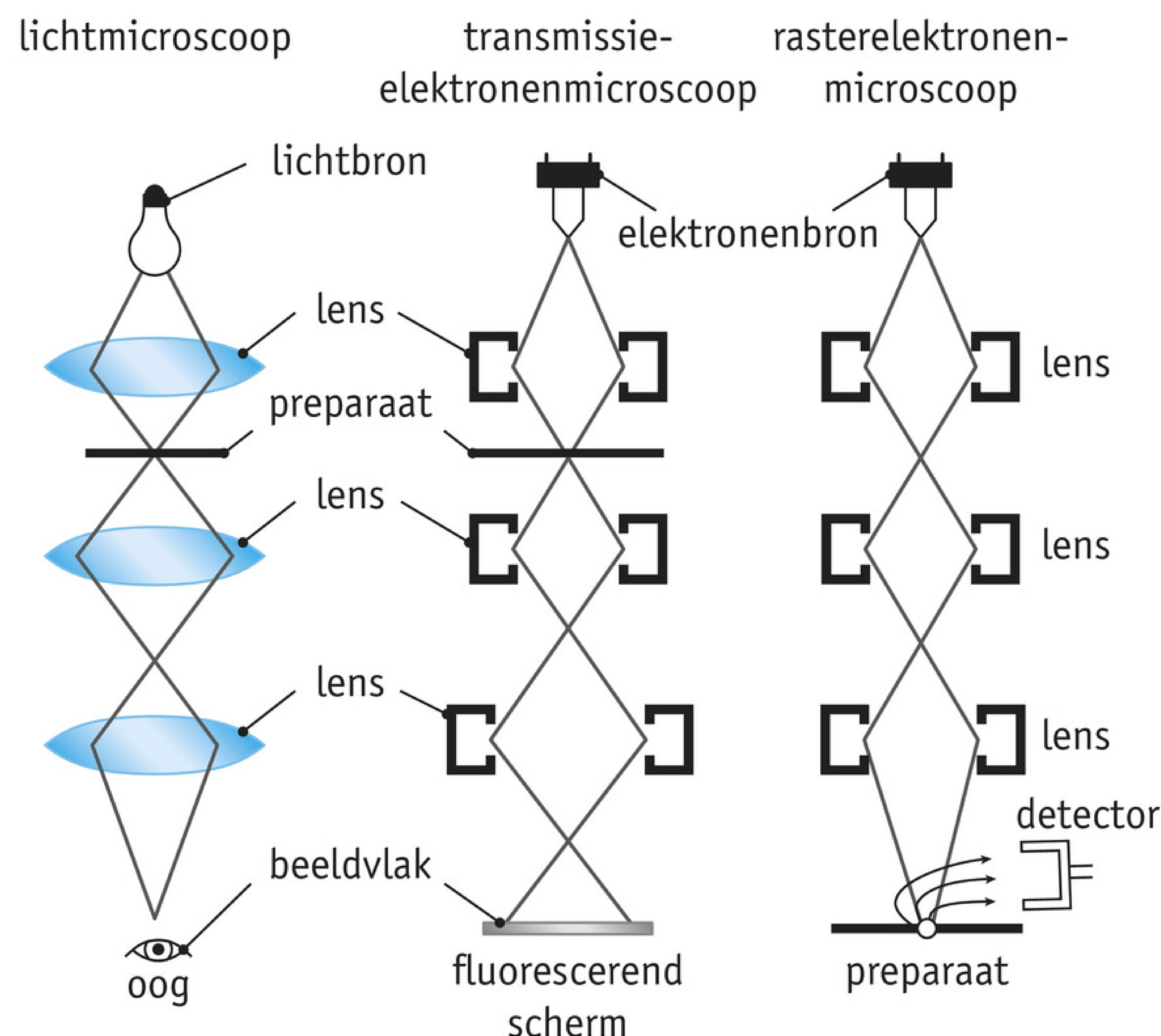
## De werking van de elektronenmicroscoop

Er zijn twee soorten elektronenmicroscoop: een rasterelektronenmicroscoop (*scanning electron microscope* in het Engels, of SEM) en een transmissie-elektronenmicroscoop (TEM, figuur 15). In beide wordt een elektronenbundel op een preparaat gericht. Dat wordt gedaan door middel van 'lenzen'. Geen glazen lenzen zoals in een fotocamera, maar elektrische en magnetische velden die de elektronen afbuigen. Om de elektronenbundel niet te verstoren moet het preparaat zich in een vacuüm bevinden.



▲ **figuur 15** werken met een transmissie-elektronenmicroscoop

In figuur 16 zie je schematisch de werking van een lichtmicroscoop, een TEM en een SEM met elkaar vergeleken. Bij een lichtmicroscoop en een TEM kijk je door het preparaat heen. Dat betekent dat het preparaat dun moet zijn. Bij een SEM wordt met een elektronenbundel het oppervlak van het preparaat gescand. Hierbij ontstaan drie soorten signalen waarmee het preparaat in beeld kan worden gebracht. Een deel van de elektronen 'kaatst' van het oppervlak en verandert van richting. Ze verliezen dan nauwelijks kinetische energie. Hierbij worden ook elektronen uit het materiaal losgemaakt, met een veel lagere kinetische energie. De elektronen in deze twee signalen worden door een positief geladen detector verzameld en vertaald naar een beeld. Het derde signaal komt van elektronen die uit een molecuul of atoom worden vrijgemaakt en een vrije energietoestand achterlaten. Als die wordt ingenomen door een elektron uit een hogere energietoestand, wordt een röntgenfoton uitgezonden. De frequentie daarvan is karakteristiek voor de stof. De werking is analoog aan het bepalen van de samenstelling van een ster uit hoofdstuk 9.
Bij een SEM tast je dus het oppervlak van je preparaat af. Het preparaat kan daardoor veel dikker zijn dan bij een TEM. Met een SEM kun je ook de chemische samenstelling van je preparaat bepalen. De resolutie van een SEM ligt in de orde van grootte van 10 nm, die van een TEM in de orde van grootte van 0,1 nm.




▲ **figuur 16** werking van een lichtmicroscoop, een TEM en een SEM

**Onthoud!**

- Het interferentiepatroon van elektronen in het dubbelspleet-experiment is te verklaren door de elektronen te beschrijven als een golf. Deze golf wordt voor materiedeeltjes een materiegolf of golffunctie genoemd.
- De amplitude van de golffunctie van een quantumdeeltje is een maat voor de kans het in een klein gebiedje aan te treffen. Het kwadraat van de golffunctie geeft een kansverdeling.
- In de quantummechanica zijn kansen precies uit te rekenen, maar de precieze uitkomst van een meting is niet te voorspellen.
- Transmissie- en rasterelektronenmicroscopen kunnen afbeeldingen maken met zeer hoge resolutie dankzij de kleine debroglie-golflengte van de elektronen.

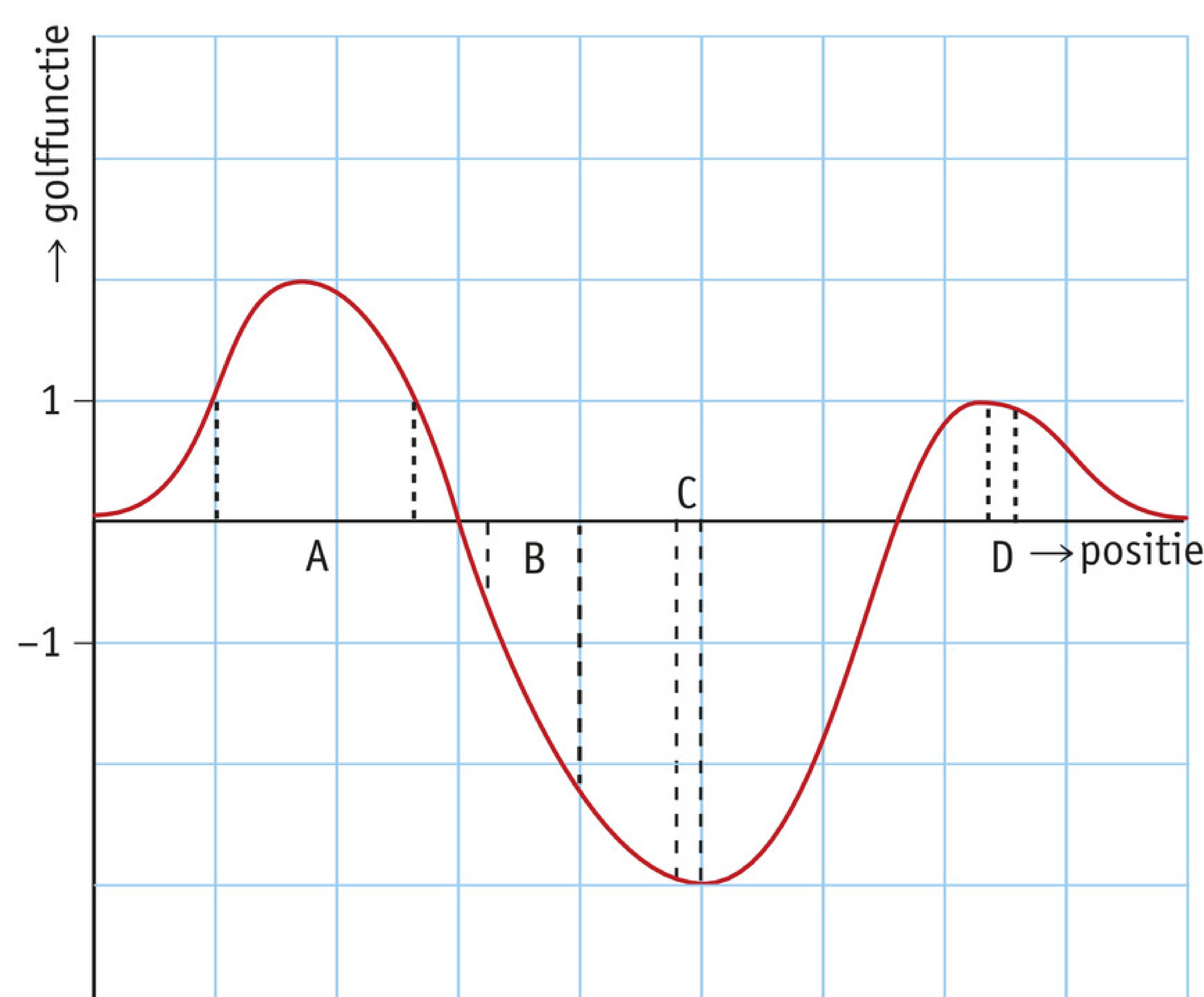
## Opdrachten

**18** Betekenis golffunctie
In de quantumtheorie worden deeltjes beschreven met een golffunctie.
**a** Leg uit hoe hiermee interferentie te verklaren is van elektronen in het dubbelspleet-experiment.
**b** Leg uit in hoeverre je met een golffunctie kunt voorspellen waar een elektron terechtkomt.

**19** Dubbelspleet-experiment met tennisballen
Stel je een dubbelspleet-experiment met tennisballen voor.
**a** Beschrijf beknopt de opstelling.
**b** Beschrijf welk patroon je achter een enkele spleet verwacht te meten.
**c** Beschrijf het patroon dat je bij de dubbelspleet verwacht te meten.
**d** Leg uit welk verband er is tussen het patroon met enkele en dubbele spleet.
**e** Leg met behulp van het begrip ‘debroglie-golflengte’ uit waarom er geen interferentie optreedt.

**20** Tonomura
Om aan te tonen dat elektronen in het dubbelspleet-experiment niet met elkáár interfereren, zorgde Tonomura ervoor dat er op elk moment ten hoogste één elektron in zijn opstelling aanwezig was. Per seconde werden er $1{,}0 \cdot 10^3$ elektronen afgevuurd die door een spanning van 50 kV waren versneld. De opstelling was 1,0 m lang.
**a** Bereken hoeveel tijd er gemiddeld tussen twee afgevuurde elektronen zat.
**b** Bereken op basis van de versnelspanning met welke snelheid de elektronen op de dubbelspleet werden afgevuurd.
**c** Bereken hoe groot de onderlinge afstand van de elektronen zou zijn geweest als ze ongehinderd konden doorvliegen.
**d** Klopt de bewering dat er ten hoogste één elektron in de opstelling was?

**21** Golffunctie van een proton
In figuur 17 is de golffunctie voor een proton weergegeven.
Orden de gebieden A tot en met D van kleine naar grote kans om het proton aan te treffen.




▲ **figuur 17** de golffunctie van een proton

**22** Kansproces

Bekijk figuur 11a en 13a. Er zijn hier nog maar weinig elektronen en fotonen waargenomen.

**a** Zou je op basis van deze figuren kunnen aangeven wat de bijbehorende golffunctie is? Licht je antwoord toe.

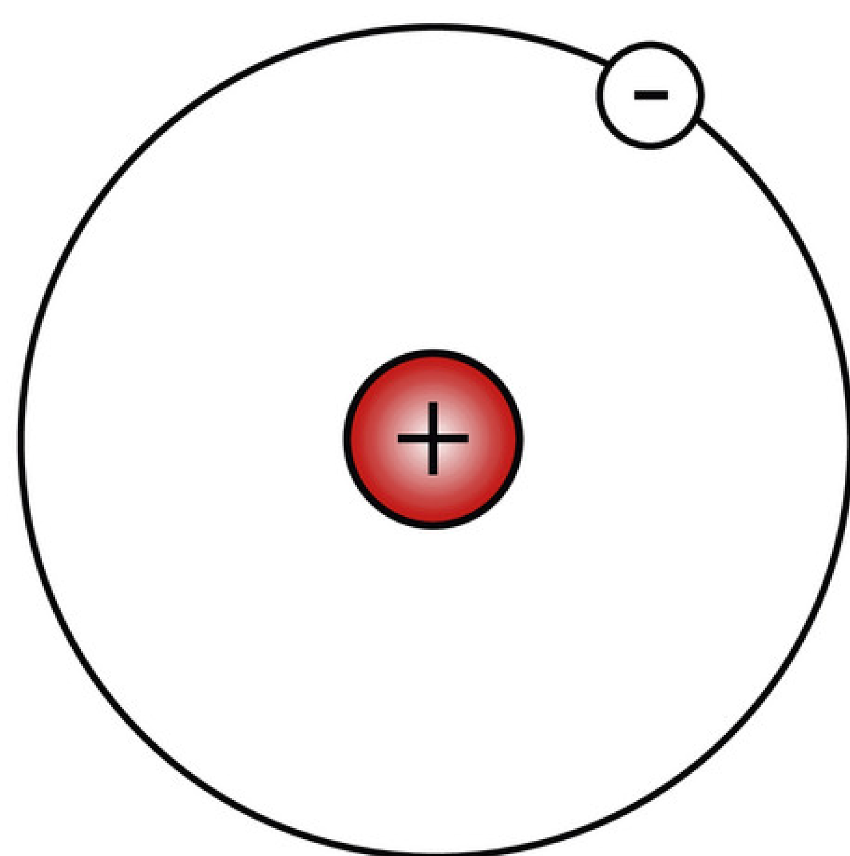
Ook fotonen in het dubbelspleet-experiment van figuur 6 zijn te beschrijven met een golffunctie.

**b** Waarom merk je in de figuur niets van het kansproces waarmee fotonen op het scherm terechtkomen?

**c** Beschrijf het dubbelspleet-experiment voor fotonen waarbij je de 'golffunctiebenadering' gebruikt.

**23** Verkeerd beeld van waterstofatoom

In figuur 18 zie je een weergave van een waterstofatoom.
Leg uit wat er quantummechanisch gezien niet juist is aan figuur 18.



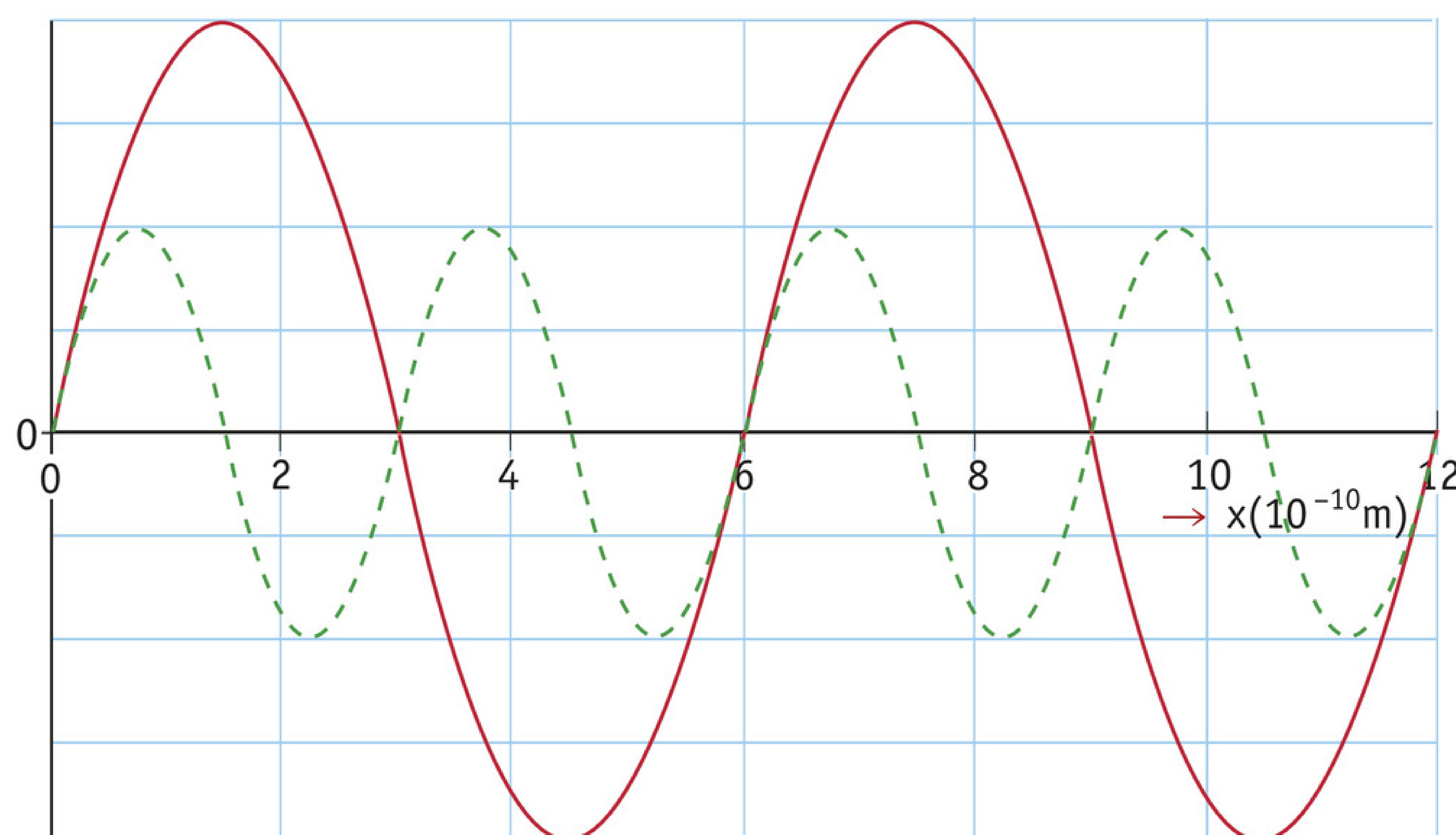

▲ **figuur 18** weergave van een waterstofatoom

**24** Golffunctie en debroglie-golflengte

In figuur 19 is een deel van twee golffuncties getekend van twee verschillende elektronen.

**a** Leg uit welke golffunctie hoort bij het elektron met de hoogste kinetische energie.

**b** Bereken op basis van de figuur de kinetische energie van het elektron met de kortste golflengte.




▲ **figuur 19** twee golffuncties

**25** Elektronenmicroscoop
Om voorwerpen in een TEM te bekijken mag het te bestuderen object niet te dik zijn.
**a** Leg uit waarom niet.
**b** Leg uit waarom deze eis niet geldt voor een SEM.
**c** Geef een reden waarom binnen in een TEM en een SEM een vacuüm moet heersen.

In de theorie kun je vinden wat de hoogst haalbare resolutie van een lichtmicroscoop is.
**d** Controleer dat deze resolutie in de orde van grootte overeenkomt met de golflengte van licht.

De versnelspanning in een TEM is in de orde van grootte van 100 kV.
**e** Bereken voor deze versnelspanning de bijbehorende debroglie-golflengte van de elektronen.
**f** Vergelijk je antwoord op opdracht e met de resolutie van de TEM.
Wat betekent dit verschil voor de kwaliteit van de 'lenzen' in een TEM als je die vergelijkt met die in een lichtmicroscoop?

**26** Resolutie SEM
Een fluorescentiemicroscoop is te vergelijken met een SEM: in plaats van een elektronenbundel wordt een smalle laserbundel gebruikt die het preparaat scant. Dat preparaat zendt vervolgens in een andere kleur licht uit. Dit heet fluorescentie. Die fotonen worden door een lenzensysteem verzameld en zo ontstaat er een beeld.
**a** Leg uit dat de resolutie van zowel de SEM als de fluorescentiemicroscoop wordt beperkt door de breedte van de bundel waarmee het preparaat wordt gescand.
**b** Leg uit dat bij een fluorescentiemicroscoop geen gebruik kan worden gemaakt van een spanning om de fotonen te verzamelen.
**c** Leg uit op welke manier de resolutie van een fluorescentiemicroscoop verder wordt beperkt door het lenzensysteem waarmee de uitgezonden fotonen worden verzameld.
**d** Leg uit waarom een SEM daar geen last van heeft.

**+27** Beeldtechnieken
Er zijn verschillende technieken waarbij met golven een beeld wordt gevormd.
**a** Noem voor elk van de volgende gevallen welk soort golven er wordt gebruikt:
- echoscopie bij een zwangere vrouw;
- echolocatie door een vleermuis;
- röntgenfoto.

**b** Maak voor elk van de toepassingen genoemd in opdracht a een schatting van de benodigde resolutie.
**c** Bereken de grootte van de frequentie voor elk van de toepassingen genoemd in opdracht a.
**d** Welke van de technieken in opdracht a zijn te vergelijken met een SEM en welke met een TEM?

**+28** Structuur van protonen
De structuur en de afmeting van het proton worden onderzocht door elektronen met grote snelheid op waterstofkernen af te vuren. De elektronen bewegen in dit experiment met vrijwel de lichtsnelheid. Voor hun impuls geldt dan bij benadering: $p = \frac{E}{c}$

Ga door middel van een berekening na of de resolutie in dit experiment voldoende is als de elektronen een energie hebben van 1 GeV.

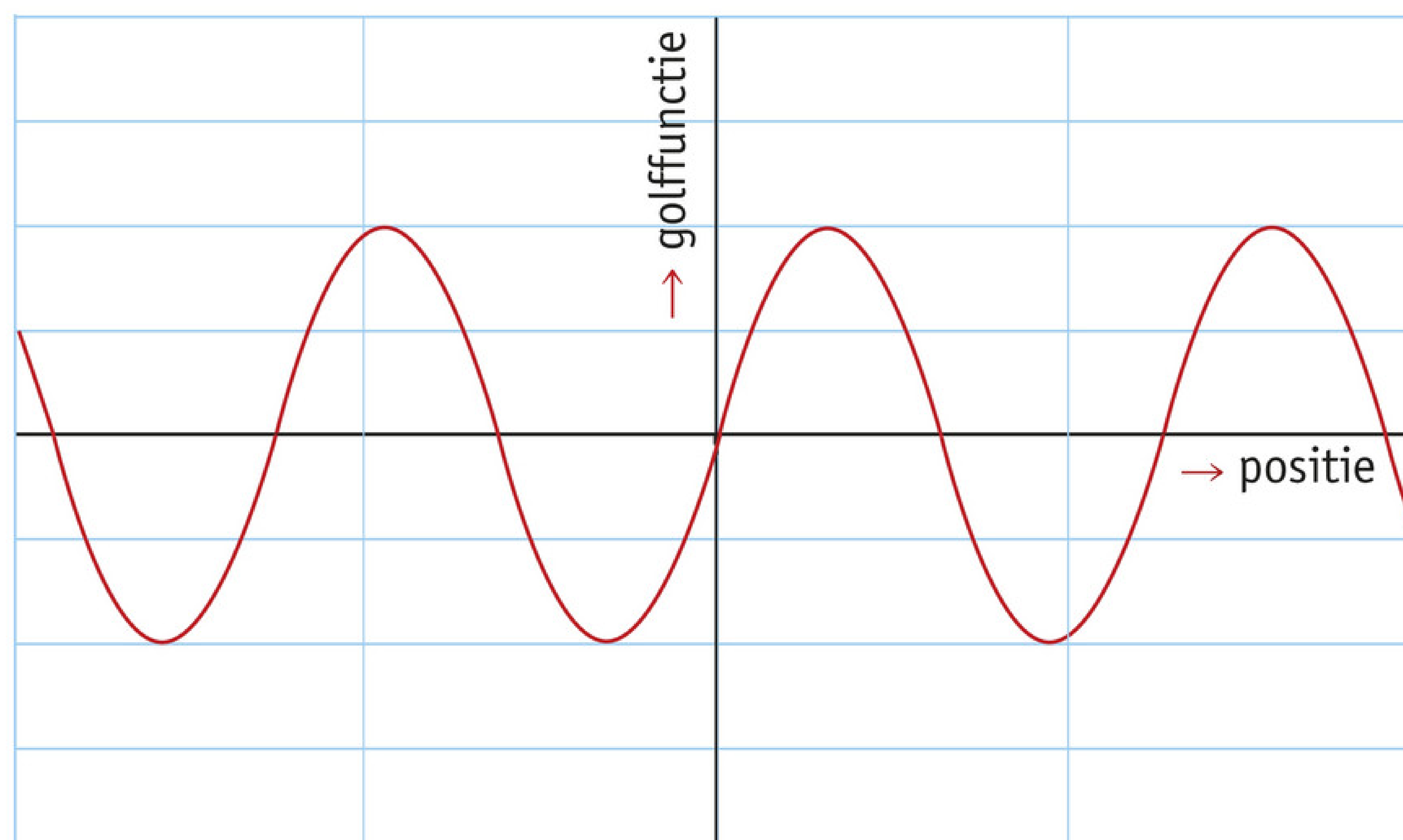
# 4 Onbepaaldheid

In deze paragraaf leer je:
- op basis van de golffunctie uitleggen dat de plaats en impuls van een deeltje niet willekeurig nauwkeurig bepaald zijn;
- berekeningen uitvoeren en redeneren met de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg;
- uitleggen dat de nulpuntsenergie van een deeltje een gevolg is van de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

Een gevolg van het golfkarakter van quantumdeeltjes is dat hun plaats en impuls niet tegelijk bepaald zijn. Dat wordt de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg genoemd, ook wel de onzekerheidsrelatie. Je kunt met deze relatie begrijpen waarom bijvoorbeeld het waterstofatoom een bepaalde afmeting heeft.

## Bepaalde impuls

De golflengte van een golffunctie is gelijk aan de debroglie-golflengte uit paragraaf 2. Als een quantumdeeltje een bepaalde impuls heeft, dan heeft zijn golffunctie dus een bepaalde golflengte. De golffunctie ziet er dan uit zoals in figuur 20, maar gaat oneindig lang door. Dit is de golffunctie van een vrij quantumdeeltje dat met een bepaalde snelheid in een rechte lijn beweegt. Elke keer dat je de impuls meet, zul je dezelfde waarde vinden. Een elektron dat door een spanning van 100 kV is versneld, heeft bijvoorbeeld een impuls van $1{,}7 \cdot 10^{-22}$ kg m s$^{-1}$. De impuls is dus goed bepaald.




▲ **figuur 20** de golffunctie van een quantumdeeltje met een bepaalde impuls

## Bepaalde positie

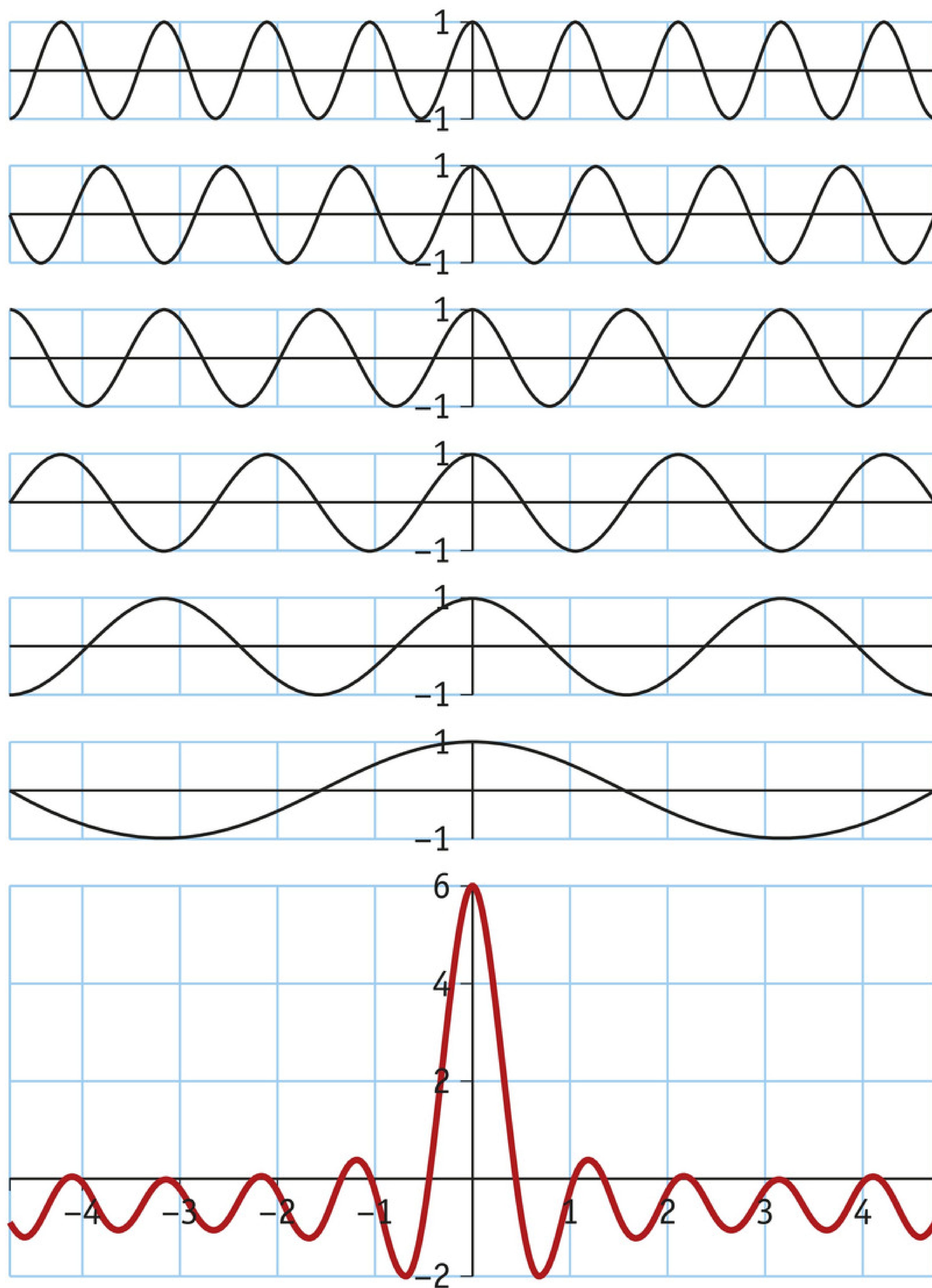
In figuur 21 zie je een golffunctie van een quantumdeeltje waarvan de plaats heel goed bepaald is. Elke keer dat je een meting uitvoert, zul je het deeltje dichtbij $x = 0$ aantreffen; daar heeft de golffunctie een grote amplitude. Op alle andere posities heeft de golffunctie een amplitude van nul, dus is de kans ook nul het quantumdeeltje daar aan te treffen. Het is moeilijker te zeggen welke impuls dit quantumdeeltje heeft. Als je naar de golffunctie kijkt, kun je niet zeggen hoe groot de golflengte is.

De golffunctie in figuur 21 kun je beschrijven door heel veel cosinusfuncties bij elkaar op te tellen, allemaal met een iets andere golflengte. In figuur 22 is dat als voorbeeld gedaan met slechts zes cosinusfuncties. Als je de impuls gaat meten van een quantumdeeltje met de golffunctie uit

figuur 22, dan zul je (via de golflengte) de impuls meten van een van de afzonderlijke golffuncties (cosinusfuncties). Om de golffunctie uit figuur 21 met cosinusfuncties te beschrijven, moet je er oneindig veel bij elkaar optellen. Er zijn dus oneindig veel verschillende meetuitkomsten mogelijk voor de impuls; de impuls is dus volledig onbepaald.




▲ **figuur 21** Bij deze golffunctie is de plaats bepaald.




▲ **figuur 22** een golffunctie (onder) bestaande uit meerdere cosinusfuncties (boven)

▶ **EXPERIMENT 4** De onbepaaldheidsrelatie 'horen' (begripspracticum)

## Onbepaaldheidsrelatie

Als een quantumdeeltje een welbepaalde impuls heeft, is de plaats dus volledig onbepaald. En omgekeerd: als de *plaats* welbepaald is, is de *impuls* volledig onbepaald. Dit wordt samengevat door de **onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg**, vernoemd naar de Duitse fysicus Werner Heisenberg (1901–1976) die de relatie in 1927 opstelde:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Hierin is:
- $\Delta x$ de spreiding in plaats in meter (m);
- $\Delta p$ de spreiding in impuls in kilogram keer meter per seconde (kg m $s^{-1}$);
- $h$ de constante van Planck.

Je kunt de spreiding 'Δ' zien als de gemiddelde afwijking van het gemiddelde van de plaats en de impuls van het quantumdeeltje. Je kunt de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg gebruiken om in te schatten of een deeltje quantumgedrag vertoont. De onbepaaldheidsrelatie legt een ondergrens op voor de nauwkeurigheid waarmee plaats en impuls bepaald kunnen zijn, vandaar het 'groter dan'-teken. Dat betekent dat er quantumtoestanden mogelijk zijn waarbij de plaats en impuls zo slecht bepaald zijn, dat het product van $\Delta x$ en $\Delta p$ veel groter is dan $\frac{h}{4\pi}$.

**Voorbeeldopgave 4**

Leg voor de volgende twee beweringen uit of ze in overeenstemming zijn met de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg. Maak zo nodig een schatting van ontbrekende grootheden.

**I** Bij een service bij tennis wordt de snelheid van de bal (massa 60 g) gemeten tot op 0,1 km $h^{-1}$ nauwkeurig. Ook kan worden bepaald of de bal in of uit is.

**II** Een leerling stelt zich de grondtoestand van de kern van een ijzeratoom voor als een klompje opeengepakte protonen en neutronen zonder snelheid.

*Uitwerking*

**I** De snelheidsmetingen bij tenniswedstrijden hebben een nauwkeurigheid van 0,1 km $h^{-1}$, dus 0,03 m $s^{-1}$. De massa van de tennisbal is 60 g. De spreiding in de impuls is dan maximaal:

$\Delta p = m \cdot \Delta v \approx 0{,}06 \times 0{,}03 = 2 \cdot 10^{-3}$ kg m $s^{-1}$

Om de minimale spreiding in de positie van de tennisbal te berekenen ga je uit van het gelijkteken in de onbepaaldheidsrelatie:

$$\Delta x = \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{1}{\Delta p} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{4\pi} \times \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-32} \text{ m}$$

Dus de positie van de tennisbal is zeer nauwkeurig te bepalen. Het is daarom goed mogelijk te bepalen of de bal in of uit is. Dit voorbeeld is in overeenstemming met de onbepaaldheidsrelatie.

**II** Een atoomkern heeft een afmeting in de orde van grootte van $10^{-15}$ m, dus voor de kerndeeltjes geldt: $\Delta x \approx 10^{-15}$ m. De onbepaaldheid in impuls is dan:

$$\Delta p = \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{4\pi} \times \frac{1}{10^{-15}} \approx 10^{-20} \text{ kg m s}^{-1}$$

Om de onbepaaldheid in de snelheid te vinden, deel je door de massa van een kerndeeltje:

$$\Delta v = \frac{10^{-20}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} \approx 10^{6} \text{ m s}^{-1}$$

De protonen en neutronen kunnen dus nooit stilstaan, ook niet bijna. Daarvoor is de spreiding in de snelheid te groot. Dit voorbeeld is dus niet in overeenstemming met de onbepaaldheidsrelatie.

Uit voorbeeldopgave 4 volgt dat je de onbepaaldheidsrelatie ook kunt gebruiken om te beslissen of een systeem quantumgedrag vertoont. In het eerste geval merk je niets van de begrensde bepaaldheid van de plaats van de tennisbal: dit is geen quantumsysteem. In het tweede geval volgt uit de bepaaldheid van de plaats dat de kerndeeltjes niet stil kunnen staan, zoals je bij een klassiek model van de kern zou verwachten: dit is wel een quantumsysteem. Merk op dat het hier voldoende is om de orde van grootte in onbepaaldheid van plaats en impuls te weten.

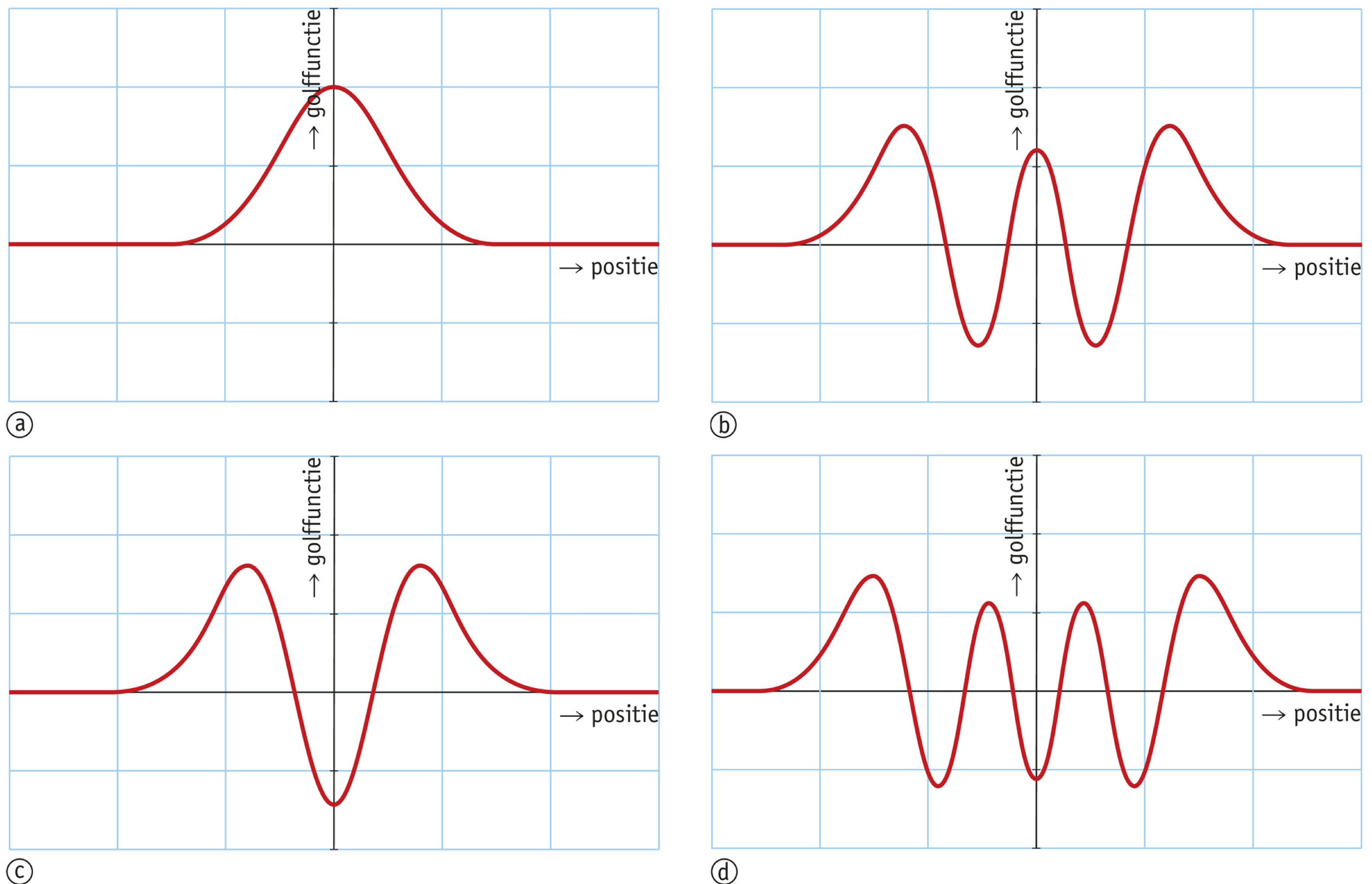
## Onthoud!

- Voor quantumdeeltjes met een welbepaalde impuls komt de golflengte van de golffunctie overeen met de debroglie-golflengte.
- Als de impuls van een quantumdeeltje goed bepaald is, dan kan het deeltje bij een meting overal worden aangetroffen: de plaats is onbepaald.
- Als de plaats van een quantumdeeltje goed bepaald is, dan is de impuls onbepaald.
- De onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg geeft het verband tussen de mate van bepaaldheid van de plaats en de impuls.
- De onbepaaldheid van plaats en impuls wordt uitgedrukt in een spreiding van $\Delta p$ en $\Delta x$. De spreiding is de gemiddelde afwijking van het gemiddelde.

## Opdrachten

**29** Onbepaaldheidsrelatie
In de onbepaaldheidsrelatie staat het product van een lengte en een impuls.
**a** Leg uit wat de betekenis is van de Δ's in de onbepaaldheidsrelatie.
**b** Controleer dat de eenheid links en rechts in de onbepaaldheidsrelatie gelijk is.

**30** Quantumgedrag
In voorbeeldopgave 4 is op basis van de onbepaaldheidsrelatie berekend of een tennisbal ($m$ = 60 g) en een kerndeeltje in bepaalde situaties quantumgedrag vertonen.
Herhaal de berekening, maar nu door gebruik te maken van de debroglie-golflengte. Gebruik hiervoor de methode van voorbeeldopgave 2.




▲ **figuur 23** vier golffuncties (de schaalverdeling is steeds dezelfde)

**31** In figuur 23 zijn de golffuncties A tot en met D weergegeven.
Orden de golffuncties van lage naar hoge $\Delta x$.

**32** Spreiding in impuls
In figuur 23 staan vier verschillende golffuncties.
Leg uit hoe je aan de vorm van de grafiek kunt zien dat bij elk van deze golffuncties niet één bepaalde impuls hoort.

**33** Onbepaaldheidsrelatie bij andere golven
De onbepaaldheidsrelatie speelt ook een rol in andere gebieden van de natuurkunde waar sprake is van golven.
Verklaar de volgende situaties door gebruik te maken van de onbepaaldheidsrelatie.
**a** Een antenneradio staat afgestemd op een bepaalde radiozender. Ook is er een tik op de radio te horen die wordt veroorzaakt door een elektrostatische ontlading waarbij een vonk ontstaat.
**b** Om de akoestiek van een ruimte te analyseren, is het nodig te weten hoe bepaalde frequenties worden versterkt. Daarvoor is het voldoende om een ballon kapot te prikken en het weerkaatste geluid te registreren.
**c** Om een gitaarsnaar goed te stemmen, moet je de snaar enige tijd laten klinken.

**34** Klassiek waterstofatoom
Als je het proton en het elektron in een waterstofatoom als kleine balletjes beschouwt, dan zou in de laagst mogelijke energietoestand het elektron stil op het oppervlak van de kern liggen. In dat geval zou de kinetische energie nul zijn en de tegengestelde ladingen zouden zo dicht mogelijk bij elkaar zijn.
Leg met behulp van de onbepaaldheidsrelatie uit dat deze toestand onmogelijk kan bestaan.

**35** Constante van Planck

De fundamentele natuurconstante van de quantumtheorie is de constante van Planck. Als deze constante nul zou zijn geweest, dan waren er geen quantumeffecten.

**a** Leg dit uit met behulp van de onbepaaldheidsrelatie.

Als de constante van Planck heel groot zou zijn geweest, dan zouden we zelfs op menselijke schaal quantumeffecten ervaren. Licht voelt dan aan alsof je door kogeltjes wordt beschoten.

**b** Leg dit uit met behulp van het verband van Planck-Einstein: $E_f = h \cdot f$

Stel je een persoon voor die op een gebouw afloopt waarin zich twee openstaande deuren bevinden. Hij komt binnen in een wachtruimte. Langs de wand tegenover de ingangen staan dertig stoelen. De kans om hem op die stoelen aan te treffen vormt een interferentiepatroon met maxima en minima.

**c** Hoe groot zou $h$ moeten zijn wil je dit echt kunnen ervaren? Maak gebruik van de debroglie-golflengte.

**+36** Afmeting van het waterstofatoom

Voor de energie (in eV) van een elektron in een waterstofatoom geldt:

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

Voor de grondtoestand geldt dat deze energie zo laag mogelijk is.

**a** Leg uit dat de potentiële energie zo laag mogelijk is wanneer de golffunctie een heel smal piekje is bij de kern.

**b** Leg uit dat de kinetische energie zo laag mogelijk is wanneer de golffunctie een heel grote golflengte heeft.

Het is onmogelijk om tegelijk aan beide eisen van opdracht a en b te voldoen. Als maat voor $p$ en $r$ kun je uitgaan van de spreiding in deze grootheden: $\Delta p$ en $\Delta r$.

**c** Gebruik de onbepaaldheidsrelatie om de energie uit te drukken in termen van $\Delta r$. Ga uit van het gelijkteken in de onbepaaldheidsrelatie om $\Delta p$ uit te drukken in $\Delta r$. Voor de elektrische energie geldt: $E_{el} = -f \cdot \dfrac{e^2}{r}$

**d** Bereken de afmeting $\Delta r$ waarvoor de energie minimaal is. Differentieer daartoe de energie naar $\Delta r$.

**e** Vergelijk je antwoord bij opdracht d met de bohrstraal van het waterstofatoom (zie Binas). Verklaar een eventueel verschil door na te gaan welke vereenvoudigingen je hiervoor hebt gemaakt.

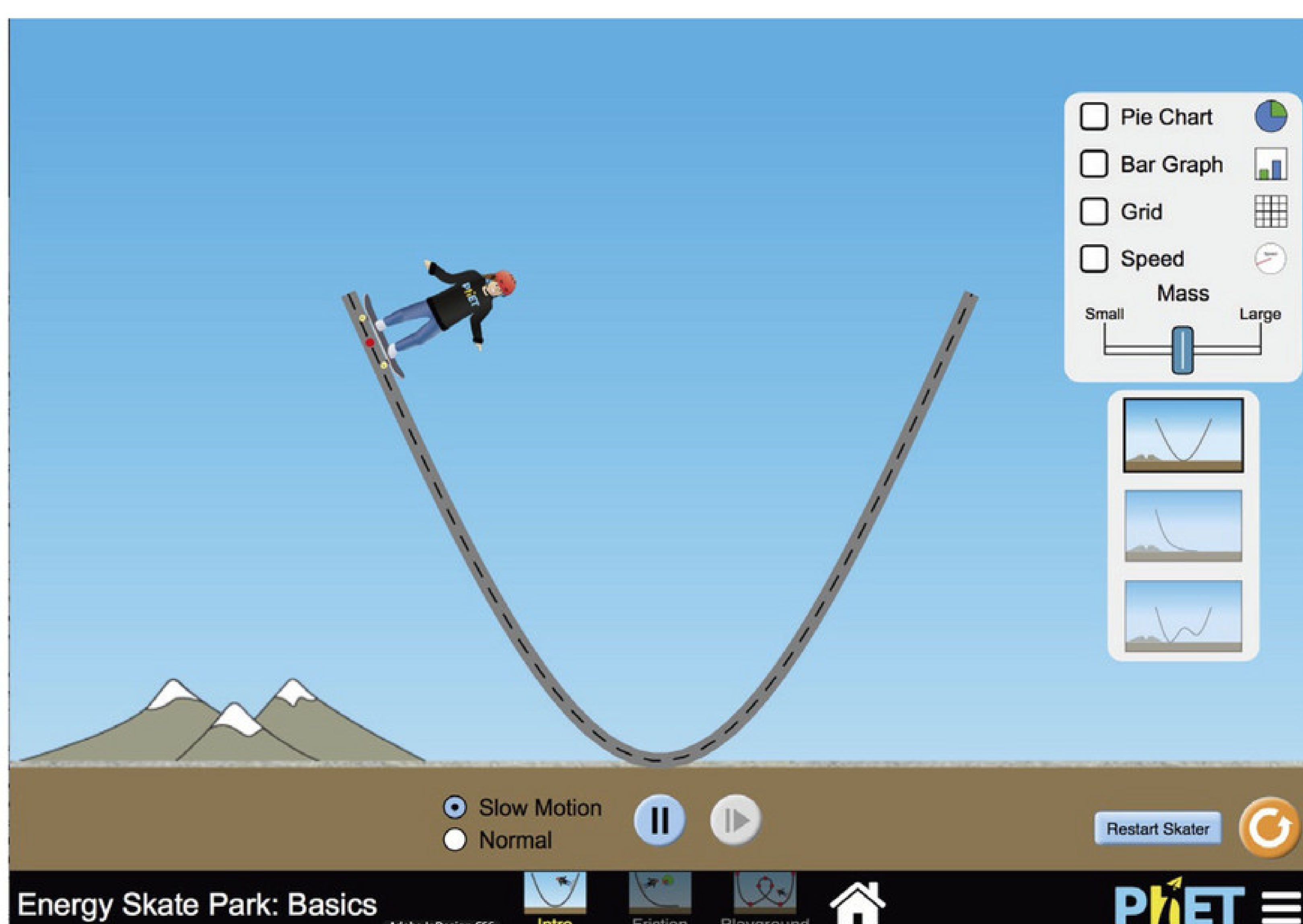
# 5 Quantisatie

In deze paragraaf leer je:
- op basis van de potentiële en totale energie van een deeltje beredeneren wat de vorm van de golffunctie is;
- het quantummodel van een deeltje in een eendimensionale energieput beschrijven en de mogelijke energieën van het deeltje berekenen;
- uitleggen of er quantumeffecten te verwachten zijn op basis van de mate van opsluiting van een deeltje.

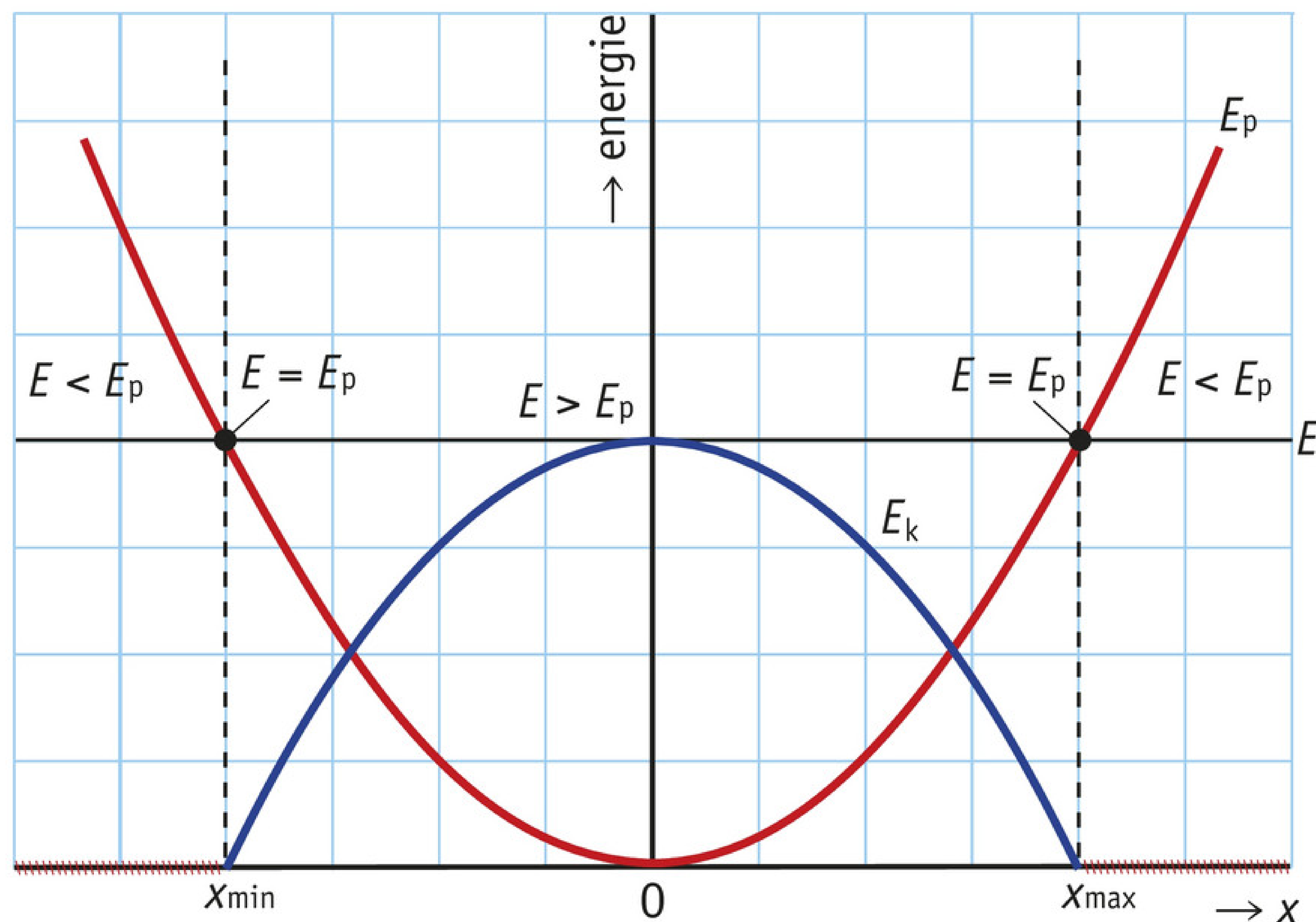
Aan het lijnenspectrum van atomen kun je zien dat atomen zich alleen in bepaalde toestanden kunnen bevinden: de energie is gequantiseerd. Die quantisatie is het gevolg van het opsluiten van quantumdeeltjes. Met de quantumtheorie kun je begrijpen hoe dat kan. Hiermee zijn niet alleen de lijnenspectra van atomen, maar bijvoorbeeld ook de kleuren van kleurstoffen te verklaren.

## Deeltjes opsluiten

In de meeste situaties zijn quantumdeeltjes, zoals elektronen, protonen en neutronen, niet vrij: ze zijn opgesloten in gebonden toestanden. Denk maar aan elektronen in een atoom of molecuul en protonen en neutronen in de kern van een atoom. In deze en de volgende paragrafen bekijk je verschillende systemen waarbij er sprake is van opsluiting.
In de klassieke mechanica bepaalt de energie van een deeltje of het gebonden is of niet. Stel dat je met je skateboard boven aan een halfpipe staat (figuur 24). Als je je naar beneden laat rollen, zonder af te zetten, dan bereik je aan de andere kant van de halfpipe ongeveer dezelfde hoogte en rol je weer terug. Door wrijving kom je uiteindelijk tot stilstand. Zonder wrijving zou je eindeloos heen en weer blijven ‘rollen’ tussen twee punten: de omkeerpunten. Je bevindt je in dat geval in een gebonden toestand: je bent opgesloten in de halfpipe.
Dit is ook in te zien met behulp van energie. Er zijn twee soorten energie: kinetische energie (of bewegingsenergie) en potentiële energie. In dit geval is de potentiële energie gelijk aan de zwaarte-energie: $E_z = m \cdot g \cdot h$. Linksboven aan de halfpipe is je potentiële energie maximaal en je kinetische energie nul. Wanneer je naar beneden rolt, neemt je potentiële energie af en je kinetische energie toe. Omdat energie behouden is, is de som constant. Onderin is je potentiële energie nul en je kinetische energie maximaal. Dan neemt de kinetische energie weer af tot nul en bevind je je rechtsboven aan de halfpipe. Hoe de potentiële en kinetische energie veranderen, is weergegeven in figuur 25. Daarin zie je ook de omkeerpunten.



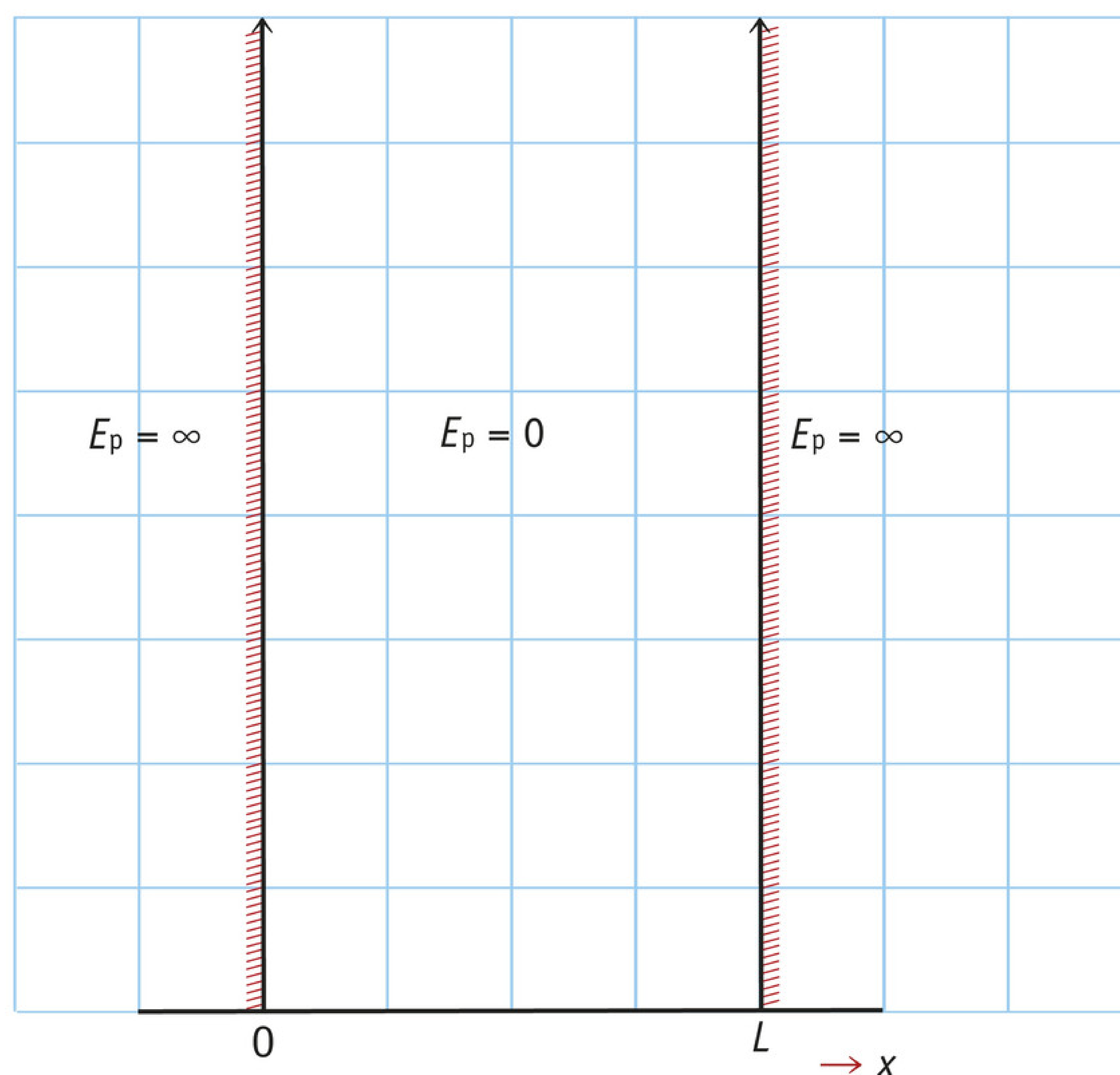

▲ **figuur 24** een skater in een halfpipe




▲ **figuur 25** de potentiële en kinetische energie van een skater in een halfpipe

## Eendimensionaal doosje

Het is handig om eerst een situatie te bekijken die eenvoudiger is dan die van een skater in een halfpipe. Stel je een knikker voor die in een horizontale buis met lengte $L$ wrijvingsloos heen en weer kan rollen. De uiteinden van de buis zijn afgesloten met een kurk. Als de knikker daar tegenaan botst, dan ondervindt de knikker kort een zeer sterke kracht en keert hij om zonder verlies van energie. Omdat de knikker alleen langs een rechte lijn kan bewegen en is opgesloten, wordt dit een eendimensionaal doosje genoemd.
De potentiële energie voor dit systeem ziet eruit zoals in figuur 26. Tussen $x = 0$ en $x = L$ is de potentiële energie constant (nul). Dat betekent dat je geen arbeid hoeft te verrichten en dus geen kracht hoeft uit te oefenen om de knikker te verplaatsen. Bij de uiteinden van de buis is de potentiële energie van de knikker in één keer oneindig. Dat betekent alleen maar dat je de knikker niet uit het doosje krijgt: daar zou je immers oneindig veel energie voor nodig hebben en dat kan niet.




▲ **figuur 26** de potentiële energie voor een eendimensionaal doosje

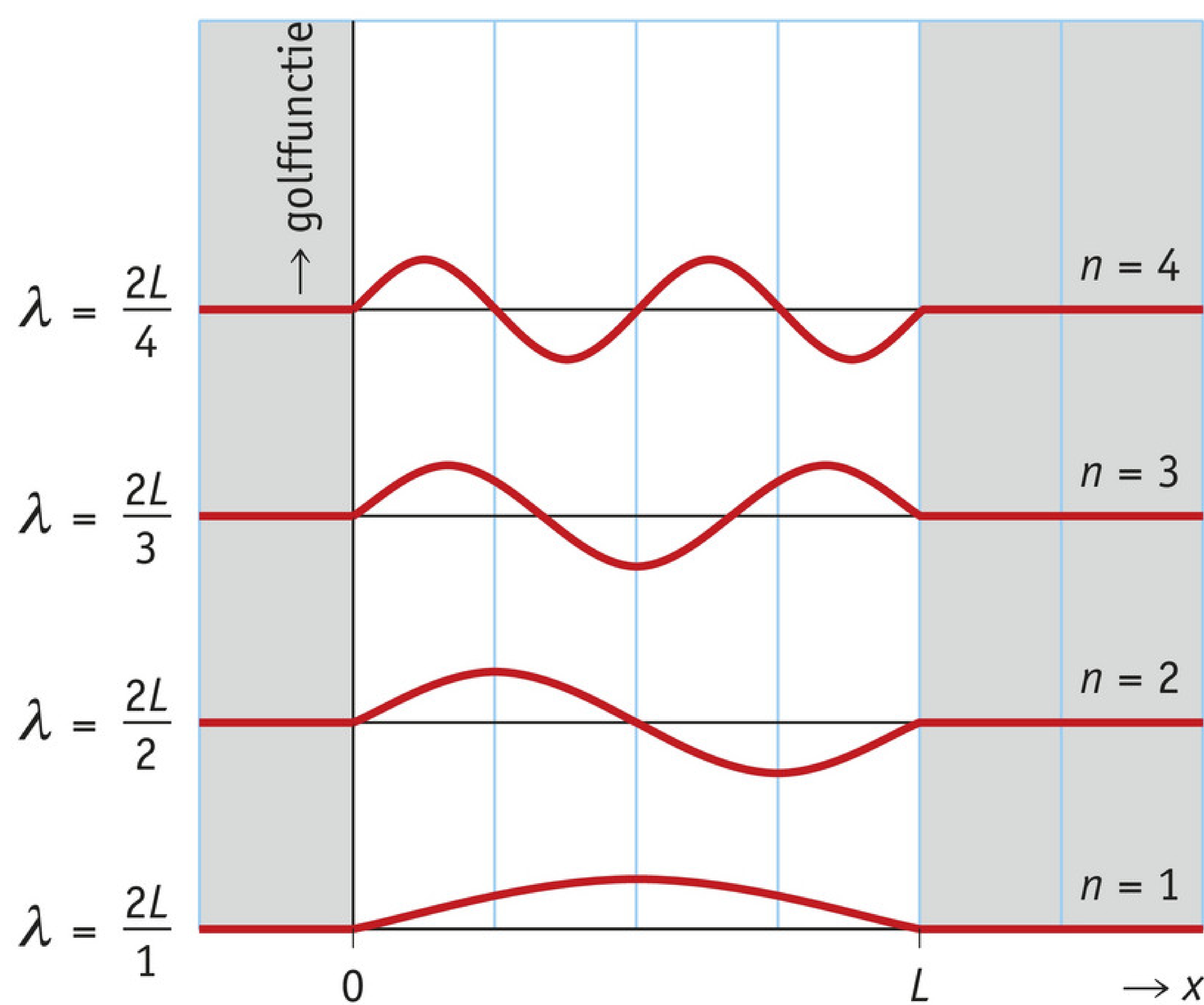
De vraag is welke golffuncties passen bij een quantumdeeltje in zo'n eendimensionaal doosje. Je kunt dit beredeneren door een paar regels te gebruiken:

1 Voor de golflengte van de golffunctie geldt de relatie van De Broglie, dus: $\lambda = \dfrac{h}{p}$

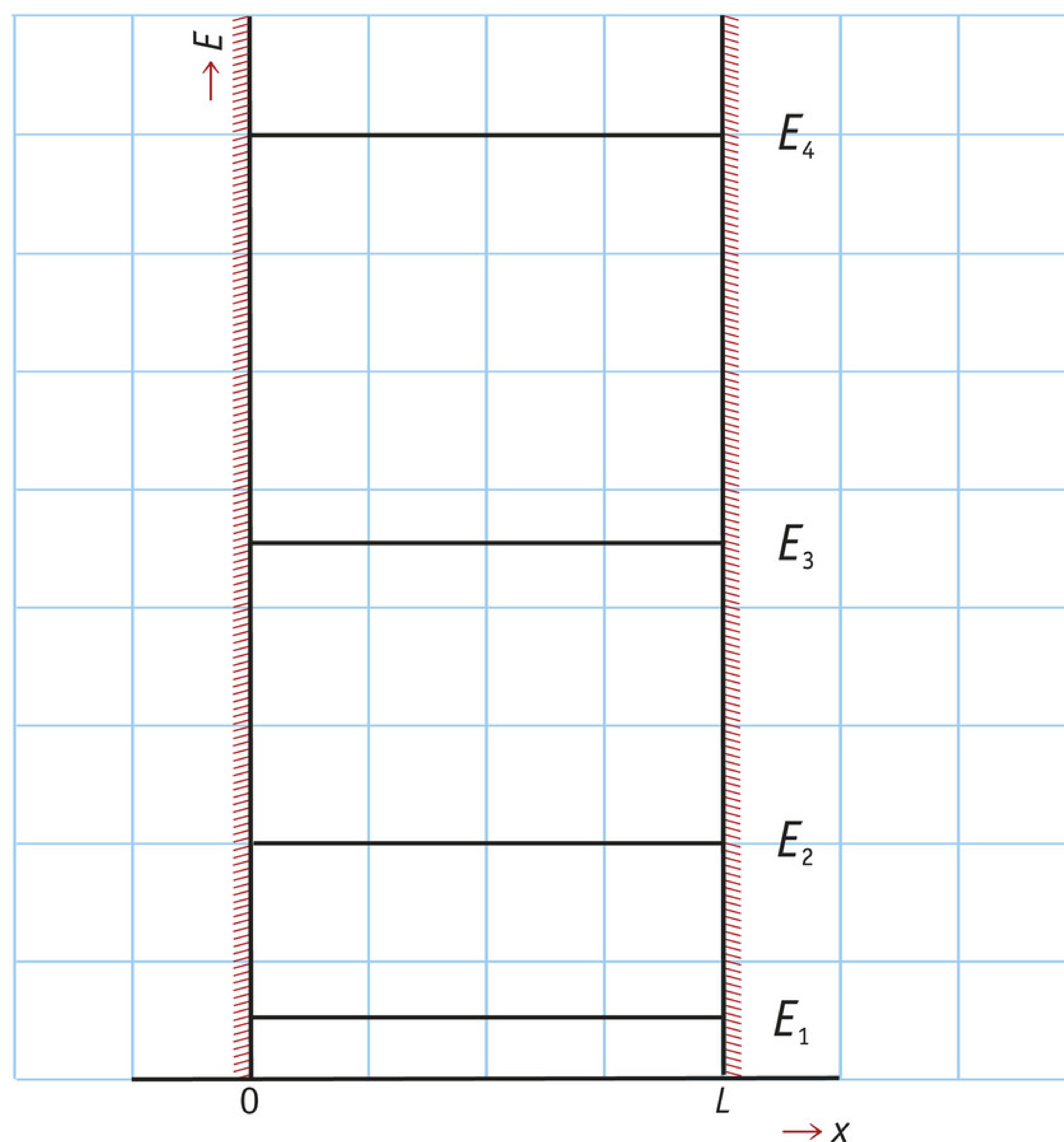
2 De impuls $p = m \cdot v$ van het quantumdeeltje hangt af van de kinetische energie die een klassiek deeltje zou hebben. De kinetische energie kun je schrijven als: $E_k = ½ \cdot m \cdot v^2 = \dfrac{p^2}{2m}$
Dan volgt voor de impuls: $p = \sqrt{2m \cdot E_k}$. Omdat het deeltje in het doosje alleen maar kinetische energie heeft en geen potentiële energie is de impuls: $p = \sqrt{2m \cdot E}$

3 Als het quantumdeeltje ergens niet kan worden aangetroffen, dan is de golffunctie daar nul. Dat is zo bij de grenzen van het doosje en daarbuiten.

De golffunctie voor het quantumdeeltje in het doosje moet op de randen dus nul zijn, en daartussen heeft het een constante golflengte. De laagste energietoestanden vind je door de grootste golflengte in het doosje te passen (figuur 27). Eerst past er een halve golflengte in. De volgende




◀ **figuur 27** de golffuncties bij de vier laagste energietoestanden van het eendimensionale doosje




◀ **figuur 28** de eerste vier energieniveaus voor het quantumdeeltje in een doosje

toestand heeft een kortere golflengte: er past nu één hele golflengte in het doosje. Dit is de eerste aangeslagen toestand. Je ziet dat deze toestanden veel lijken op de mogelijke trillingen van een aan twee kanten ingeklemde snaar (hoofdstuk 7). In een snaar ontstaan staande golven doordat twee golven met eenzelfde frequentie en golflengte tegen elkaar in bewegen. Dat is hier ook zo: de golffunctie komt overeen met een quantumdeeltje dat met een bepaalde snelheid naar links of naar rechts beweegt.

De toestanden zijn genummerd: $n = 1$ voor de grondtoestand, $n = 2$ voor de eerste aangeslagen toestand, enzovoort. Een toestand met een golflengte die ligt tussen die van $n = 1$ en $n = 2$ is niet mogelijk: de golflengten zijn **gequantiseerd**. Omdat bij een bepaalde golflengte een bepaalde impuls en dus ook een bepaalde energie hoort, zijn ook de energietoestanden gequantiseerd (figuur 28).

Voor de energie van het quantumdeeltje in een eendimensionaal doosje geldt:

$$E_\text{n} = \frac{n^2 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot L^2}$$

Hierin is:
- $E_\text{n}$ de energie van de $n$-de toestand in joule (J);
- $n$ een geheel getal: 1, 2, 3, …;
- $h$ de constante van Planck;
- $m$ de massa van het quantumdeeltje in kilogram (kg);
- $L$ de afmeting van het doosje in meter (m).

## Nulpuntsenergie

De energie van de toestand met de laagste energie, de grondtoestand, wordt de **nulpuntsenergie** genoemd. Die energie is niet nul, zoals binnen de klassieke theorie wel mogelijk is als het deeltje stilligt. Volgens de klassieke theorie zou het elektron uiteindelijk ook op de kern storten. Voor een quantumdeeltje zou dit in strijd zijn met de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg. Immers: als het quantumdeeltje met zekerheid stilligt, dan zul je het altijd aantreffen met een impuls $p$ gelijk aan nul. Maar dan zou $\Delta p$ ook gelijk aan nul zijn, zodat het product

$\Delta x \cdot \Delta p = 0 < \dfrac{h}{4\pi}$. Dat is onmogelijk. Hierdoor hebben ook atomen een grondtoestand met een minimale omvang. Het elektron rond bijvoorbeeld het waterstofatoom zal gemiddeld gezien op een bepaalde afstand van de kern worden gevonden.

## Emissie en absorptie

Als het quantumdeeltje een elektron is dat zich in de grondtoestand bevindt, kan het een foton opnemen (absorptie) en zo in de eerste aangeslagen toestand terechtkomen. Het foton moet dan wel precies de juiste energie hebben, namelijk:

$$E_\text{f} = E_2 - E_1 = \frac{2^2 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} - \frac{1^2 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} = \frac{3 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot L^2}$$

Als het elektron weer terugvalt naar de grondtoestand, dan wordt dit verschil in energie weer uitgezonden als een foton (emissie).

**Voorbeeldopgave 5**

Bereken de minimale afmeting van een eendimensionaal doosje waarin zich een elektron bevindt dat nog net zichtbaar licht kan absorberen.

*Uitwerking*
Hoe kleiner het doosje is, hoe korter de golflengten worden van de toestanden en dus hoe hoger de impuls en energieniveaus zijn. Ook de verschillen tussen de energieniveaus nemen dan toe. Dus hoe kleiner het doosje, hoe verder het systeem richting ultraviolet absorbeert. Er is gevraagd wat de *minimale* afmeting van het doosje is waarbij het nog zichtbaar licht absorbeert. Het gaat dus om violet (paars) licht. Het kleinste energieverschil is van de grondtoestand naar de eerste aangeslagen toestand. De energie daarvan is hiervoor uitgerekend:

$$\frac{3 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot L^2}$$

De energie van een violet foton kun je in Binas tabel 19A vinden, of berekenen met $E_f = h \cdot f$:
$E_f = 0{,}497 \cdot 10^{-18}$ J
Dus voor de afmeting van het doosje geldt minimaal:

$$L = \sqrt{\frac{3 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot E_f}} = \sqrt{\frac{3 \times (6{,}63 \cdot 10^{-34})^2}{8 \times 9{,}11 \cdot 10^{-31} \times 0{,}497 \cdot 10^{-18}}} = 6{,}03 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Uit voorbeeldopgave 5 volgt dat bij een bepaalde afmeting van een eendimensionaal doosje ook een bepaalde absorptiegolflengte hoort. De sprong van grondtoestand naar eerste aangeslagen toestand is daarbij de kleinste. Voor hogere waarden van $n$ worden de energiesprongen tussen opeenvolgende energieniveaus alleen maar groter. Dus als de sprong van $n = 1$ naar $n = 2$ nog net zichtbaar licht is, dan zullen hogere sprongen in het ultraviolet vallen. Bedenk wel dat het eendimensionale doosje een *model* is. In de natuur komen dergelijke systemen alleen bij benadering voor. Vooral als de energie toeneemt, zal dit model minder goed werken.

## Onthoud!

- De beweging van een deeltje wordt bepaald door de totale energie van het deeltje en van de potentiële energie die het deeltje op een bepaalde positie heeft. Daaruit volgt de kinetische energie en dus de snelheid van het deeltje.
- Een deeltje dat niet genoeg energie heeft om buiten een bepaald gebied te komen, is opgesloten en bevindt zich in een gebonden toestand.
- In een eendimensionaal doosje kan een deeltje vrij langs een rechte lijn bewegen, maar het wordt bij de uiteinden teruggekaatst.
- Een quantumdeeltje in een eendimensionaal doosje vertoont quantisatie. Voor de energieniveaus geldt $E_n \sim n^2 \cdot L^{-2}$. Hoe groter het doosje, hoe dichter de energieniveaus bij elkaar komen te liggen.
- Een overgang tussen de energietoestanden van het eendimensionale doosje gaat gepaard met het uitzenden of absorberen van een foton.

## Opdrachten

**37** Doosje
In deze paragraaf wordt steeds gesproken van een eendimensionaal doosje.
**a** Leg uit waarom je je dit niet moet voorstellen als bijvoorbeeld een schoenendoos.
**b** Noem de twee grootheden die in de grafieken van het eendimensionale doosje op de verticale as staan.

**c** Leg uit in hoeveel richtingen een deeltje in een tweedimensionaal doosje zich zou kunnen bewegen.

**38** Absorptie

Een elektron bevindt zich in een eendimensionaal doosje met een afmeting van 10 nm.

**a** Bereken de golflengte van de straling die door dit systeem wordt geabsorbeerd van de grondtoestand naar de eerste aangeslagen toestand.

**b** Noem het soort straling waarom het gaat bij opdracht a.

Een ander eendimensionaal doosje absorbeert rood licht. Dit is de grootste golflengte die kan worden geabsorbeerd.

**c** Leg uit dat het hier moet gaan om de overgang vanuit de grondtoestand naar de eerste aangeslagen toestand.

**d** Bereken de orde van grootte van de lengte van het doosje.

**e** Beredeneer of het doosje vanuit de grondtoestand nog een andere kleur zichtbaar licht kan absorberen.

**39** Onbepaaldheid

De onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg geldt ook voor een quantumdeeltje in een eendimensionaal doosje. Bij elke toestand van het eendimensionale doosje hoort één bepaalde golflengte van de golffunctie.

Stel dat een elektron zich in de grondtoestand van een eendimensionaal doosje bevindt met $L = 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ m.

**a** Leg uit dat de *grootte* van de impuls één bepaalde waarde heeft, maar dat de *gemiddelde* impuls nul is.

**b** Bereken welke twee meetuitkomsten er zijn voor de impuls van het elektron.

**c** Leg met behulp van je antwoorden op opdracht a en b uit dat $\Delta p$ niet gelijk aan nul is.

**d** Geef de orde van grootte van $\Delta p$.

**e** Controleer door middel van een berekening of voldaan is aan de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

**40** Quantum of niet?

Er zijn verschillende manieren om te bepalen of een systeem zich quantummechanisch gedraagt.

**a** Noem de twee manieren die eerder aan bod zijn gekomen.

Een andere manier maakt gebruik van het model voor een eendimensionaal doosje. Stel dat een tennisbal zich in een opbergkoker bevindt. De vraag is of dit een quantumsysteem is.

**b** Leg uit dat de tennisbal in de koker te zien is als een deeltje in een eendimensionaal doosje wanneer de koker horizontaal ligt.

**c** Geef een schatting voor de relevante grootheden: de lengte van de koker en de massa van de tennisbal.

**d** Bereken met behulp van je antwoord op opdracht c de *kleinste* energiesprong die de tennisbal kan maken.

**e** Leg uit of je iets zult kunnen merken van de quantisatie van de energie van de tennisbal.

**41** Atomen en kernen

Zowel atomen als kernen van atomen kunnen zich in een aangeslagen toestand bevinden en bij het terugvallen in de grondtoestand elektromagnetische straling uitzenden. Kernen zenden hierbij meestal gammastraling uit met een energie in de orde van grootte van MeV. De energie die atomen uitzenden bij terugvallen naar de grondtoestand ligt een stuk lager.

**a** Geef de orde van grootte van de energie van de fotonen die atomen uitzenden bij terugvallen naar de grondtoestand. Maak eventueel gebruik van Binas.

**b** Leg uit dat een atoom en kern beide te zien zijn als een *drie*dimensionaal doosje.

Door een atoom en kern als *een*dimensionaal doosje te beschouwen, kun je al het energieverschil van fotonen begrijpen die deze twee systemen uitzenden. De ruimte die een elektron in een atoom inneemt, heeft een afmeting in de orde van grootte van $10^{-10}$ m. De ruimte die een kerndeeltje in de kern inneemt, heeft een afmeting in de orde van grootte van $10^{-15}$ m.

**c** Hoeveel keer zo groot zou de energie van de fotonen zijn die door de kern worden uitgezonden, als de massa van de kerndeeltjes hetzelfde was als die van een elektron?

**d** Beantwoord opdracht c nog een keer, maar houd nu rekening met het verschil in massa. Vergelijk je antwoord met dat op opdracht a.

**42** Afleiding

De formule voor de energieën van de toestanden van het quantumdeeltje in een eendimensionaal doosje kun je zelf afleiden.

**a** Leg uit dat voor de totale energie van een deeltje in een eendimensionaal doosje geldt: $E_{tot} = E_k = ½ \cdot m \cdot v^2$

**b** Herschrijf de formule voor de totale energie in termen van de impuls $p$.

**c** Substitueer de debroglie-golflengte in de formule voor de totale energie en elimineer zo de impuls $p$.

De golflengte van de golffunctie kan alleen bepaalde waarden aannemen, aangezien op de randen moet gelden dat de golffunctie nul is.

**d** Geef een uitdrukking voor de golflengte $\lambda$ in termen van de lengte van het doosje $L$ en een geheel getal $n$. Hint: hiervoor geldt dezelfde resonantievoorwaarde als voor een aan twee kanten ingeklemde snaar.

**e** Vul de uitdrukking voor de golflengte van opdracht d in de formule voor de totale energie in en ga na dat deze overeenkomt met de formule uit de theorie.

**+43** Pauli-uitsluitingsprincipe

De in Oostenrijk geboren Zwitsers-Amerikaanse natuurkundige Wolfgang Pauli (1900–1958) formuleerde in 1925 het naar hem vernoemde uitsluitingsprincipe: elektronen zijn deeltjes die nooit tegelijk eenzelfde quantumtoestand kunnen bezetten. Met dit principe is onder andere de bouw van atomen en moleculen en de stevigheid van stoffen te begrijpen. Zonder het uitsluitingsprincipe van Pauli zou er geen scheikunde bestaan! Naast een energietoestand kunnen elektronen zich ook nog in een van twee mogelijke spintoestanden bevinden. Het is alsof elektronen zich als een tol gedragen die met een bepaalde snelheid ofwel linksom ofwel rechtsom draait.

**a** Leg uit dat zich in elke energietoestand van het eendimensionale doosje twee elektronen kunnen bevinden.

In een eendimensionaal doosje bevinden zich vijf elektronen. Het doosje heeft een afmeting van 10 nm.

**b** Bereken de langste golflengte van een foton dat door dit doosje kan worden geabsorbeerd.

**c** Leg uit dat zonder uitsluitingsprincipe deze golflengte groter zou zijn.

Stel dat je het doosje wilt samendrukken, waardoor het kleiner wordt.

**d** Leg uit dat de energie van de elektronen daardoor toeneemt en dat je hiervoor arbeid moet verrichten.

**e** Geef een schatting van de kracht die nodig is om het doosje 1% in te drukken. Geef hiermee een verklaring voor de stevigheid van vaste stoffen.

# 6 Kleurstoffen en spectra

In deze paragraaf leer je:
- met behulp van het quantummodel van een deeltje in een eendimensionale energieput de kleuren van kleurstoffen verklaren;
- het quantummodel van het waterstofatoom beschrijven en de mogelijke energieën van het waterstofatoom berekenen.

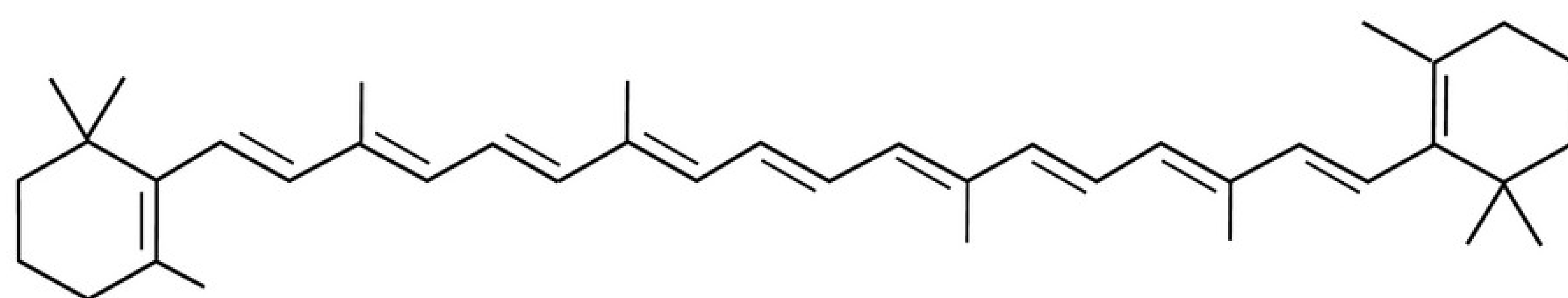
De spectra van atomen en moleculen zijn een gevolg van het feit dat de elektronen zich alleen in bepaalde energietoestanden kunnen bevinden. Het spectrum vormt zo een vingerafdruk van de stof. Niet alleen atoomspectra zijn te verklaren met quantummechanica, ook de kleur van kleurstoffen en verschijnselen als fluorescentie zijn een gevolg van deze quantisatie.

## Kleurstoffen

Veel kleurstoffen bestaan uit moleculen die bij benadering te zien zijn als eendimensionale doosjes. Neem bijvoorbeeld het oranje pigment bètacaroteen, een stof die in onder andere wortels en bladeren voorkomt (figuur 29). Het molecuul bestaat uit een keten van geconjugeerde bindingen (figuur 30). Het kenmerkende van de elektronen die deze bindingen tot stand brengen, is dat ze bij benadering vrij over de lengte van het molecuul kunnen bewegen. Ze worden begrensd door de uiteinden van het molecuul. Het molecuul is dus te zien als een eendimensionaal doosje. Het absorbeert daardoor alleen bepaalde golflengten licht. De energie hiervan wordt niet opnieuw als licht uitgezonden, maar wordt bijvoorbeeld omgezet in warmte. Het overige licht dat erop valt, wordt gereflecteerd. Zo krijgt de kleurstof zijn kleur.

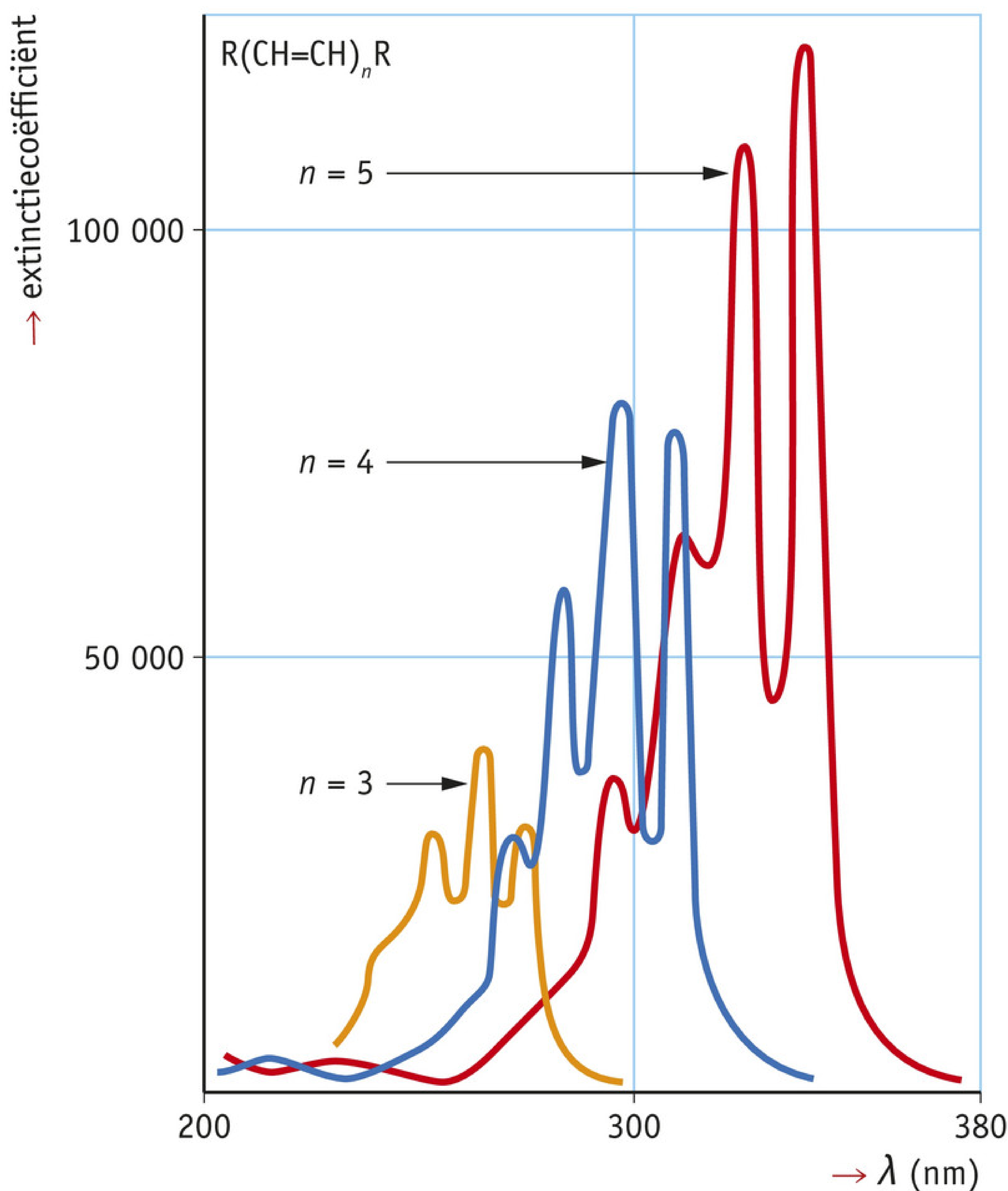


▲ **figuur 29** Bladeren bevatten bladgroen en caroteenachtige stoffen. In de herfst wordt het chlorofyl afgebroken en niet meer aangevuld. Er blijft dan geeloranje caroteen achter.

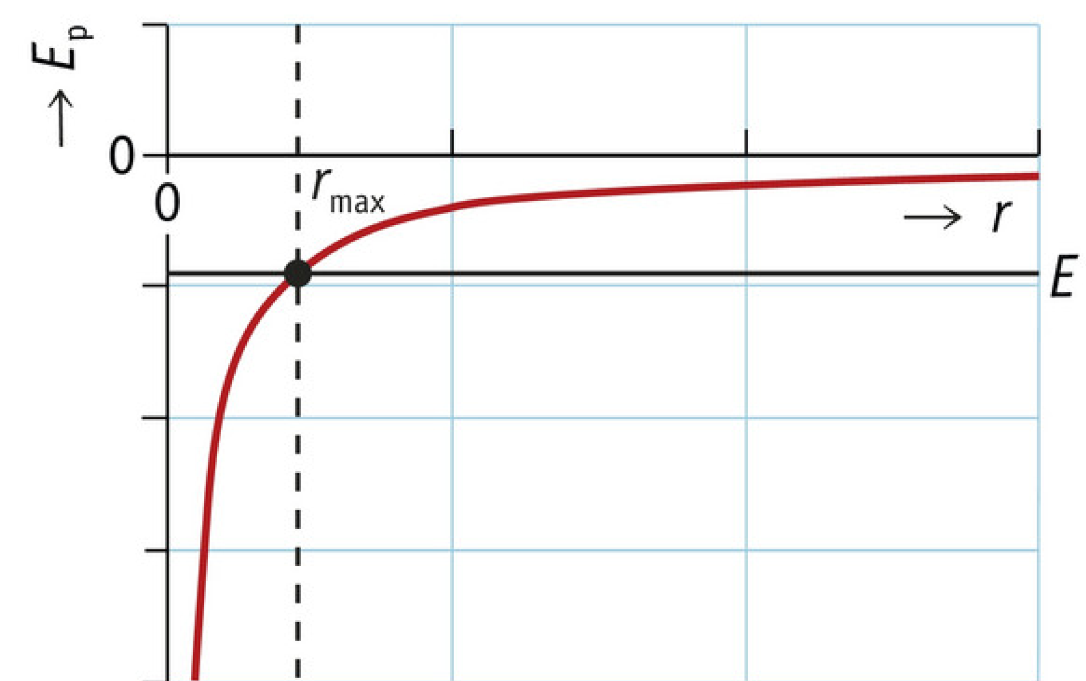


▲ **figuur 30** de structuur van bètacaroteen

Met dit model kun je voorspellen welke kleur het molecuul zal hebben als je iets van de structuur weet. Omgekeerd kun je iets te weten komen over de structuur als je weet welke kleur licht het absorbeert. De absorptiespectra in figuur 31 horen bij moleculen met de structuur $R(CH{=}CH)_nR$. De waarde voor $n$ geeft aan hoe vaak het middenstuk in het molecuul voorkomt: hoe groter $n$, des te langer het molecuul. Je ziet dat langere moleculen grotere golflengten licht absorberen. Dat is ook te begrijpen met een model van een eendimensionaal doosje. De energietoestanden van het eendimensionale doosje en de verschillen tussen die energieën zijn immers omgekeerd evenredig met het kwadraat van de lengte van het doosje: $E \sim L^{-2}$. Dus hoe langer een molecuul, hoe kleiner de energiesprongen en hoe groter de golflengten die het molecuul absorbeert.




▲ **figuur 31** absorptiespectra van steeds langere moleculen




▲ **figuur 32** de potentiële energie voor een elektron met totale energie $E$ in een waterstofatoom, met $r$ de afstand van het elektron tot het proton

## Quantumtoestanden voor waterstof

Een proton en een elektron in een waterstofatoom worden aangetrokken door de coulombkracht (hoofdstuk 8):

$$F_{el} = -f \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

Het minteken geeft aan dat het om aantrekking gaat. In deze formule is $r$ de afstand tussen het elektron en proton. Bij deze kracht hoort een potentiële energie die het elektron ondervindt ten gevolge van het proton:

$$E_p = -f \cdot \frac{e^2}{r}$$

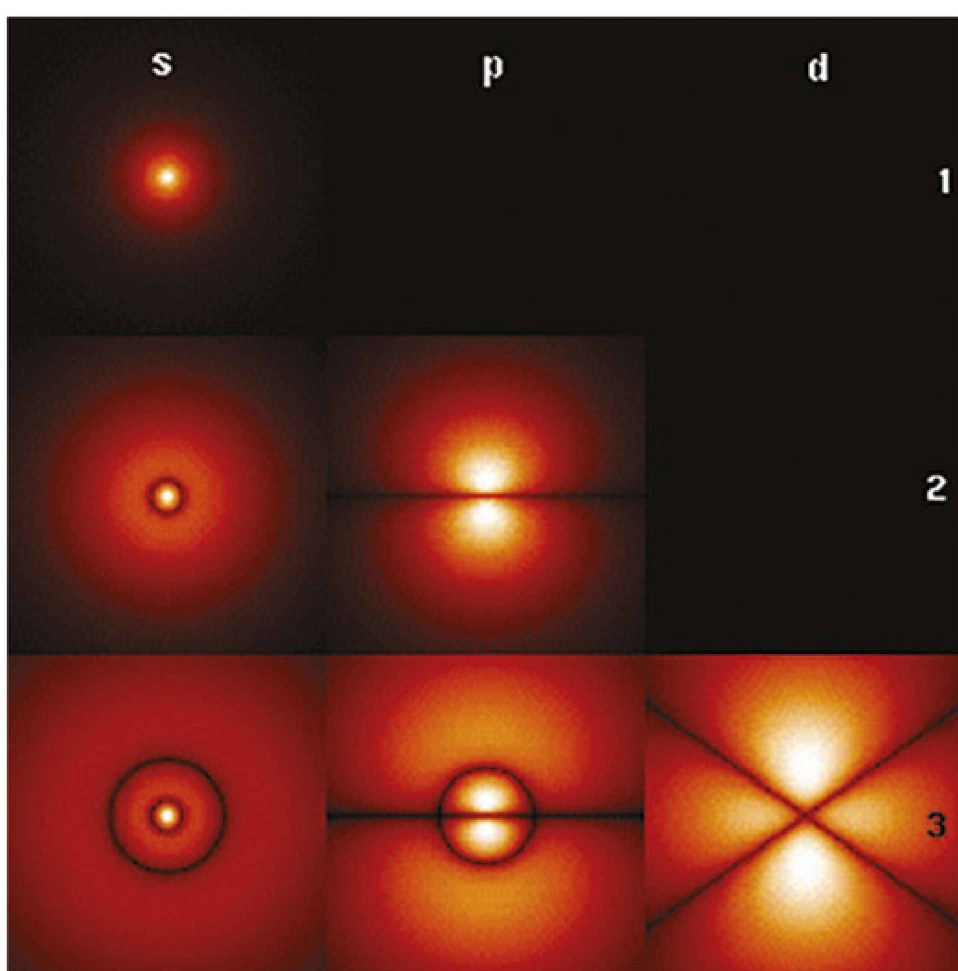
Dit is de coulombpotentiaal. Merk op dat er nu wordt gedeeld door de afstand en niet door de afstand in het kwadraat. In figuur 32 zie je een grafiek voor de coulombpotentiaal.

Voor een elektron met een energie $E < 0$ zijn er omkeerpunten waar het elektron niet buiten kan komen, net als bij de skater in de halfpipe (paragraaf 5). Het elektron bevindt zich dus in een gebonden toestand: het is opgesloten in het atoom. De quantumtheorie voorspelt dan dat de energietoestanden gequantiseerd zijn, net als bij het eendimensionale doosje. Er is wel een verschil: nu hangt de potentiële energie af van de positie van het deeltje. De energieën worden gegeven door het al in paragraaf 1 genoemde verband: $E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$

Wat opvalt is dat hoe groter $n$, hoe dichter de energieniveaus bij elkaar komen te liggen (Binas tabel 21A). Dat heeft te maken met de vorm van de potentiële energie. Als de energie van het elektron toeneemt, komen de omkeerpunten ook verder naar buiten te liggen: het elektron krijgt als het ware meer ruimte. Bij het eendimensionale doosje zag je dat hoe groter het doosje, dus hoe meer ruimte het deeltje heeft, hoe lager de energieniveaus komen te liggen. Dat betekent bij het waterstofatoom dat voor grotere $n$ de energie steeds minder toeneemt.

## Kansverdeling in drie dimensies

Bij het eendimensionale doosje kun je de golffuncties gemakkelijk tekenen: het zijn veelvouden van halve golflengten. Voor het waterstofatoom zijn de golffuncties ingewikkelder. Dat komt doordat het functies zijn in een driedimensionale ruimte. Daarom wordt vaak de waarschijnlijkheidsverdeling weergegeven. Daarin wordt de kans weergegeven het elektron ergens aan te treffen: hoe groter die kans, hoe witter het gebiedje wordt getekend. Zwart komt dan overeen met een kans nul.
In figuur 33 zie je een aantal van de laagste energietoestanden getekend. Verticaal staat het **hoofdquantumgetal** $n$ uitgezet (1, 2, 3). Je kent dit quantumgetal uit de scheikunde als de schillen K, L, M, enzovoort. Horizontaal staat een quantumgetal uitgezet dat de vorm van de waarschijnlijkheidsverdeling bepaalt (aangegeven met s, p en d).

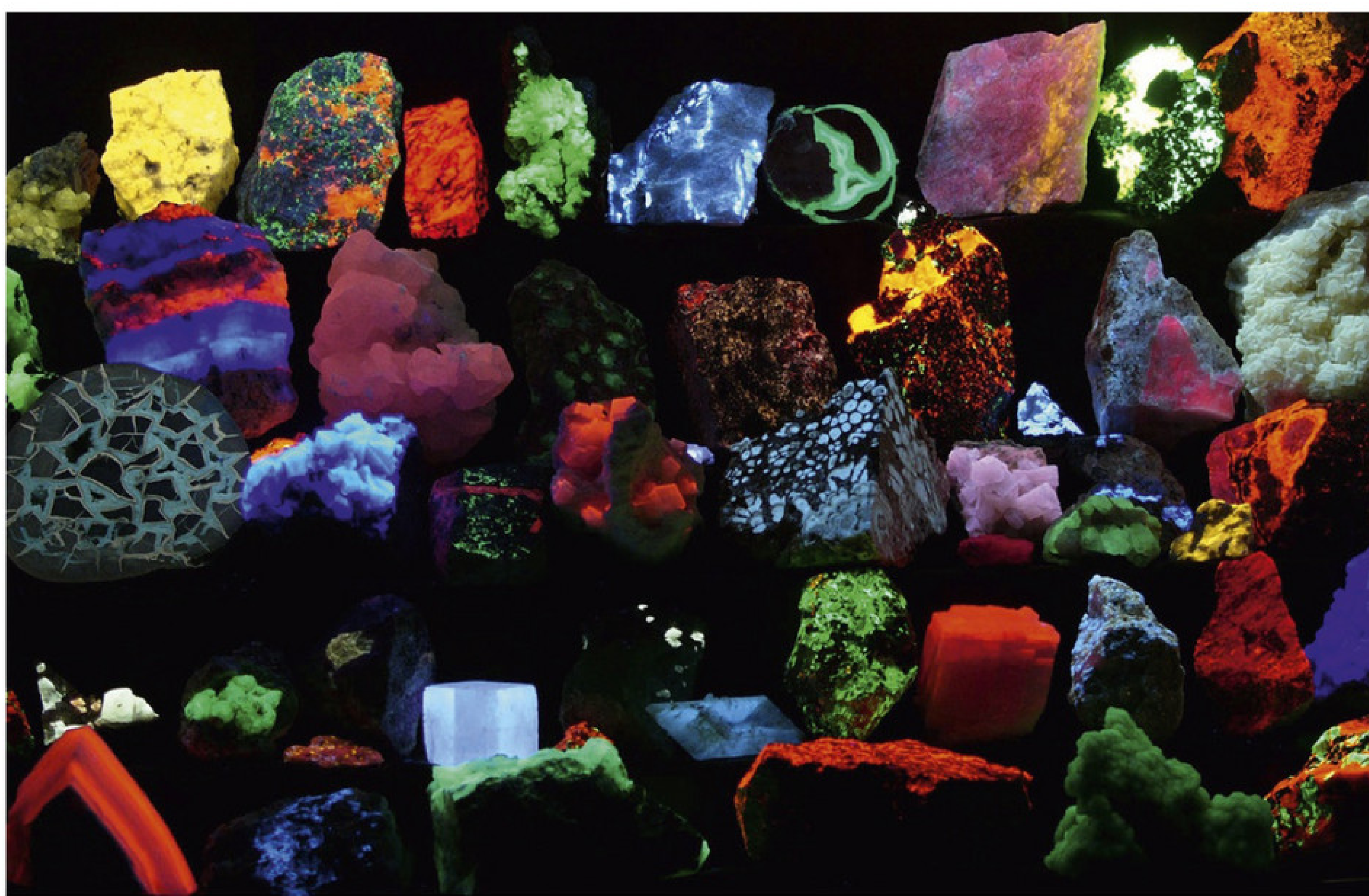



▲ **figuur 33** waarschijnlijkheidsverdelingen voor waterstof

Het plaatje linksboven is de grondtoestand. Je ziet dat de kans om het elektron aan te treffen in het midden heel groot is: daar zit immers het proton, waar het elektron omheen beweegt. Daarbuiten is ook nog een kans het elektron aan te treffen, die kleiner wordt voor grotere afstanden. Gemiddeld zal het elektron op een afstand van $5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m worden gevonden. Deze afstand wordt de **bohrstraal** $a_0$ genoemd.
In figuur 33 zie je dat hoe hoger de energie (grotere $n$), hoe verder het elektron gemiddeld van de kern te vinden is. Voor de 2s-toestand is er een bolvormige schil rondom de kern waar de kans nul is het elektron te vinden (zichtbaar als donkere cirkel in figuur 33). Voor de 2p-toestand is er een vlak waar de kans nul is (zichtbaar als lijn). In de derde rij kun je twee van zulke gebieden ontdekken: twee schillen voor de 3s-toestand, een schil en een vlak voor de 3p-toestand en twee vlakken voor de 3d-toestand. Dit lijkt op het aantal snijpunten van de golffunctie met de $x$-as bij een eendimensionaal doosje: nul voor de grondtoestand, één voor de eerste aangeslagen toestand, twee voor de tweede aangeslagen toestand, enzovoort.

## Fluorescentie en fosforescentie

Bij atoomspectra komen de absorptie- en emissielijnen overeen. Dat komt doordat de energieovergangen bij de absorptie van een foton overeenkomen met die bij de emissie van een foton. Bij kleurstoffen werkt dat niet zo. Een foton wordt geabsorbeerd, waardoor het molecuul in een aangeslagen toestand komt. Het molecuul verliest die energie vervolgens via andere overgangen, bijvoorbeeld thermische. De stof warmt dan op. Hierbij wordt infraroodstraling uitgezonden.
Er is nog een andere mogelijkheid. Er zijn moleculen die in een aangeslagen toestand komen en dan in meerdere stappen terugvallen naar de grondtoestand. Als er bijvoorbeeld blauw licht wordt geabsorbeerd, dan zendt het molecuul vervolgens groen licht uit en dan infrarood. De golflengte van een 'blauw foton' is immers korter en de energie ervan hoger dan die van een 'groen foton'. Op deze manier terugvallen naar de grondtoestand kost meer tijd en gebeurt met een bepaalde halveringstijd. Als die halveringstijd in de orde van een nanoseconde is, dan wordt dit effect **fluorescentie** genoemd (figuur 34). Er zijn ook stoffen waarbij deze halveringstijd in de orde van milliseconden tot uren duurt. Dat effect heet **fosforescentie** en is bekend als 'glow in the dark'.



▲ **figuur 34** gesteenten die fluorescentie vertonen wanneer ze met uv worden belicht

**Onthoud!**

- Veel pigmenten zijn te beschouwen als een eendimensionaal doosje: hoe langer het molecuul, hoe groter de golflengte van het geabsorbeerde licht.
- Een elektron in een waterstofatoom is door de coulombkracht gebonden aan het proton. De bijbehorende potentiële energie wordt de coulombpotentiaal genoemd.
- Bij het waterstofatoom hangen de energieniveaus af van het hoofdquantumgetal $n$:

  $E_n = -\dfrac{13{,}6}{n^2}$. Hoe groter $n$, hoe verder het elektron gemiddeld van het proton te vinden is.
- Bij fluorescentie en fosforescentie wordt een foton met een bepaalde golflengte geabsorbeerd en vervolgens wordt een foton met een langere golflengte uitgezonden. Als het om zichtbaar licht gaat, verandert hiermee de kleur van het licht. Bij fluorescentie vindt dat terugvallen plaats in de orde van nanoseconden, bij fosforescentie in de orde van milliseconden tot uren.

## Opdrachten

**44** Kleurstoffen

De kleur van kleurstoffen heeft in belangrijke mate te maken met de lengte van de moleculen waaruit de kleurstof bestaat.

**a** Welk kwalitatief verband geldt er tussen de kleur die een kleurstof absorbeert en de lengte van de moleculen?

Je kunt kledingstukken bleken (wit maken) door ze in bleekmiddel te dompelen.

**b** Beredeneer dat de kleurstoffen na bleken geen zichtbaar licht meer absorberen.

Er zijn verschillende soorten bleekmiddelen die een verschillend effect hebben op de moleculen waaruit de kleurstoffen bestaan.

**c** Beredeneer welke twee veranderingen de bleekmiddelen in kleurstofmoleculen kunnen veroorzaken waardoor de kleur verandert.

**45** Lange en korte moleculen

In figuur 31 zie je absorptiespectra van drie verschillende moleculen. Ze zijn beschenen met uv-straling en er is gemeten hoeveel daarvan werd geabsorbeerd (langs de verticale as, de eenheid is niet van belang). Je ziet dat de spectra meerdere pieken vertonen.

**a** Beredeneer dat de ligging van de vier pieken in het spectrum van bijvoorbeeld het langste molecuul niet te verklaren is met het model voor het eendimensionale doosje.

De maximale absorptiegolflengte $\lambda_{max}$ blijkt wel te verklaren met het model voor het eendimensionale doosje.

**b** Leg uit dat deze $\lambda_{max}$ overeenkomt met de overgang van de grondtoestand naar de eerste aangeslagen toestand.

**c** Bereken voor het langste molecuul de lengte van het eendimensionale doosje.

**d** Leg uit of de werkelijke lengte van dit molecuul groter, kleiner of ongeveer gelijk is aan de bij opdracht c berekende lengte.

**46** Spectrum van waterstof

In Binas tabel 21A zie je het energieniveauschema voor waterstof. Er zijn verschillende reeksen aangegeven die experimenteel als eerste zijn ontdekt: Lyman, Balmer en Paschen.

**a** Noem de reeks waarvan het spectrum in het zichtbare gebied ligt.

**b** Controleer met behulp van de formule voor de energieniveaus van waterstof de kortste in Binas vermelde golflengte in de paschenreeks.

**c** Bereken met behulp van de formule voor de energieniveaus van waterstof hoeveel energie het kost om het atoom te ioniseren. Controleer je antwoord met Binas tabel 21C.

**47** Ionen

Ook ionen, zoals $He^+$, hebben een spectrum.

**a** Leg uit hoeveel elektronen zich in $He^+$ rond de kern bevinden.

**b** Leg uit waarom het spectrum van $He^+$ lijkt op dat van waterstof.

**c** Beredeneer op welke manier het spectrum van $He^+$ zal verschillen van dat van waterstof. Maak hierbij gebruik van de ionisatie-energieën vermeld in Binas tabel 21C.

**d** Welk spectrum zal meer lijken op dat van waterstof: dat van $Li^+$ of dat van $Li^{2+}$? Licht je antwoord toe.

**48** Waarschijnlijkheidsverdelingen waterstof

In Binas tabel 23 en figuur 33 staan golffuncties en waarschijnlijkheidsverdelingen voor het waterstofatoom. Het getal voor de s-toestanden in Binas is het hoofdquantumgetal *n*.

**a** Vergelijk de functies 1s, 2s en 3s. Noem de overeenkomst tussen de drie getekende s-toestanden.

Voor het eendimensionale deeltje geldt: hoe hoger $n$, hoe meer nulpunten de golffunctie heeft.

**b** Ga na dat deze regel ook opgaat voor de s-toestanden.

**c** Beredeneer welke waarde het hoofdquantumgetal $n$ heeft voor de getekende p-toestanden.

Het atoom wordt weleens voorgesteld als een mini-zonnestelsel waarin de elektronen in banen rond de kern draaien.

**d** Leg met behulp van Binas tabel 23 en figuur 33 uit wat er aan dit beeld niet klopt.

**49** Smart highway

Ontwerper Daan Roosegaarde heeft de *smart highway* ontworpen. De wegbelijning van deze weg bestaat uit een speciale verf die overdag door zonlicht wordt opgeladen en 's nachts licht geeft (figuur 35).

**a** Formuleer ten minste vier relevante ontwerpeisen voor deze speciale wegbelijning.

**b** Leg uit of het hier gaat om fluorescentie of fosforescentie.

**c** Teken schematisch het energieniveauschema en de bijbehorende overgangen voor de stof die in de verf is verwerkt. Leg hiermee uit dat het rendement van de verf nooit 100% is.

**d** Schets een grafiek voor de intensiteit van de door de verf uitgezonden straling als functie van de tijd. Geef een toelichting.

**e** Leg uit dat een verf met een hogere intensiteit korter werkt.



▲ **figuur 35** *glowing lines* van Studio Roosegaarde (opname met lange belichtingstijd)

**+50** Driedimensionaal doosje

Je zou het waterstofatoom kunnen benaderen door een driedimensionaal doosje waarin het elektron is opgesloten. De eigenschappen van een driedimensionaal doosje lijken veel op die van een eendimensionaal doosje. In elk van de ruimtelijke richtingen zien de golffuncties eruit als de mogelijke golffuncties voor een eendimensionaal doosje.

**a** Leg uit dat er nu niet één quantumgetal $n$ is, maar dat er drie zijn: $n_x$, $n_y$ en $n_z$.

De energieniveaus voor een kubusvormig doosje met ribbe $L$ worden gegeven door:

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \cdot \frac{h^2}{8\ m \cdot L^2}$$

**b** Teken de eerste negen toestanden van het energieniveauschema voor het driedimensionale doosje.

Verschillende combinaties van de quantumgetallen $n_x$, $n_y$ en $n_z$ geven dezelfde energie.

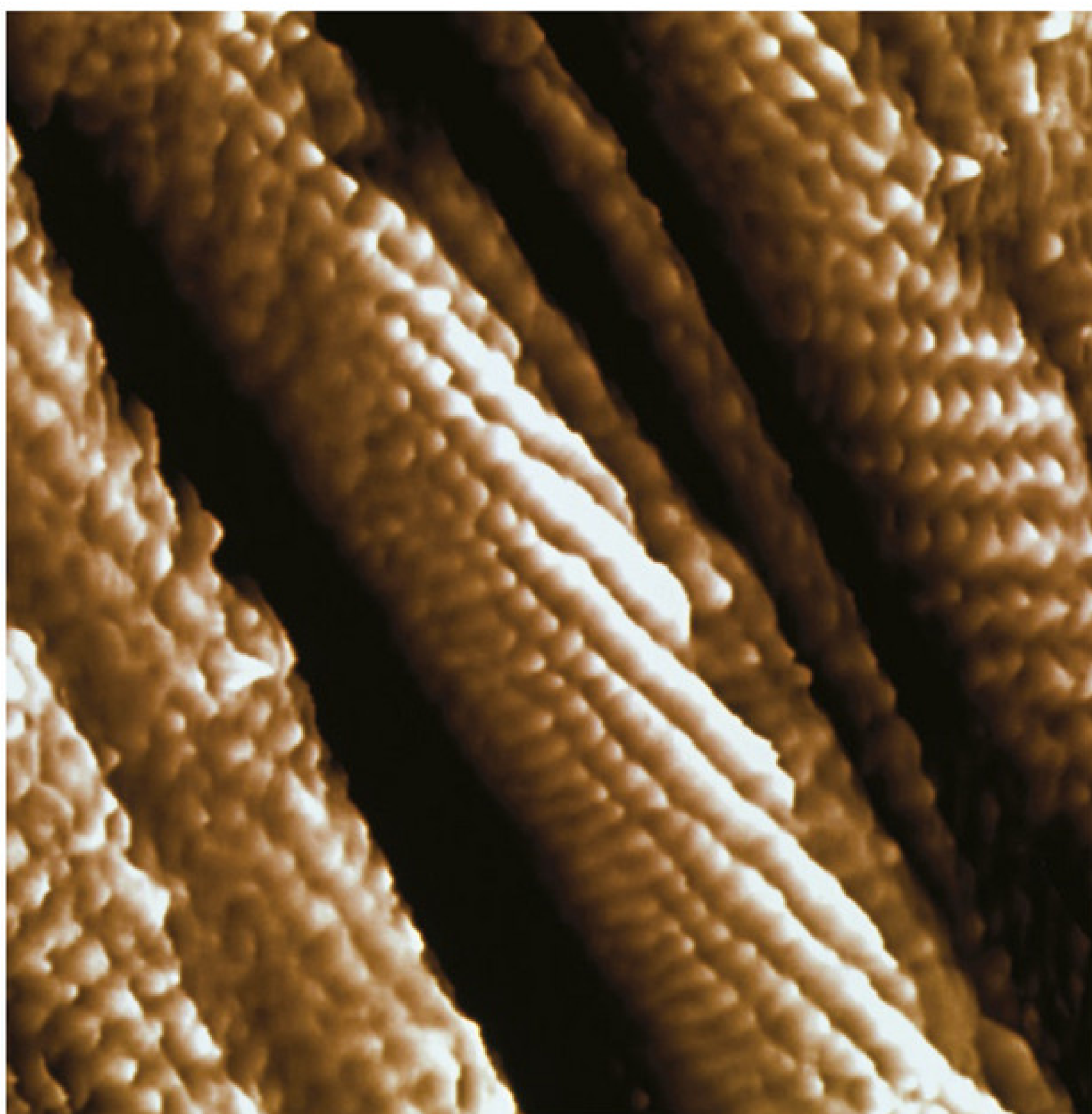
**c** Ga voor elk van de getekende energieniveaus na hoeveel verschillende combinaties quantumgetallen er zijn.

**d** Vergelijk het energieniveauschema van opdracht b met dat van een eendimensionaal doosje en dat van het waterstofatoom. Leg uit in welk opzicht het driedimensionale doosje als model beter werkt dan een eendimensionaal doosje en in welk opzicht het nog niet goed genoeg werkt. Geef hiervoor een verklaring.

# 7 Tunneling

In deze paragraaf leer je:
- het quantum-tunneleffect beschrijven aan de hand van een eenvoudig model;
- uitleggen hoe de kans op tunnelen afhangt van de massa van het deeltje en de hoogte en de breedte van de energiebarrière;
- uitleggen hoe het quantum-tunneleffect gebruikt wordt in een STM;
- uitleggen hoe de halveringstijden van alfastralers te verklaren zijn met een model op basis van het quantum-tunneleffect.

Atomen zijn zo klein dat je ze niet kunt zien, zeker niet met een lichtmicroscoop. Een elektronenmicroscoop (TEM) komt in de buurt, maar er is een apparaat om nog kleinere details te zien: een scanning-tunnelingmicroscoop (STM, figuur 36). Deze bijzondere microscoop heeft veel toepassingen en berust op een puur quantummechanisch verschijnsel: tunneling. Daarmee is ook alfaverval te verklaren.

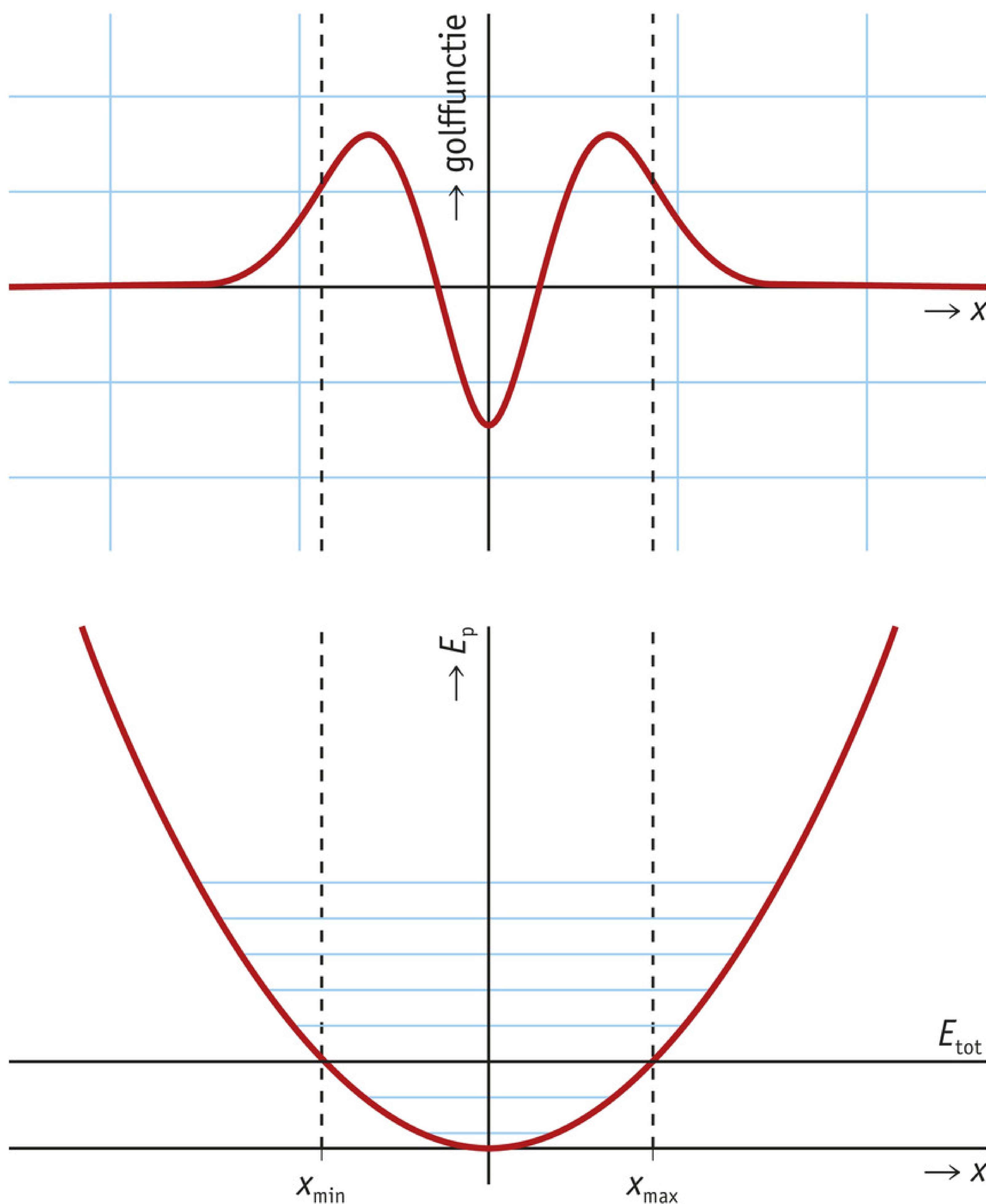


▲ **figuur 36** een STM-opname van koolstofnanobuisjes (zes miljoen keer vergroot)

## Verboden gebied

De skater uit paragraaf 5 bevindt zich altijd tussen de twee omkeerpunten. De skater heeft niet genoeg energie om buiten die punten te komen. Dat is verboden gebied, want daar geldt $E < E_p$ en dat zou betekenen dat de kinetische energie negatief is, wat onmogelijk is.

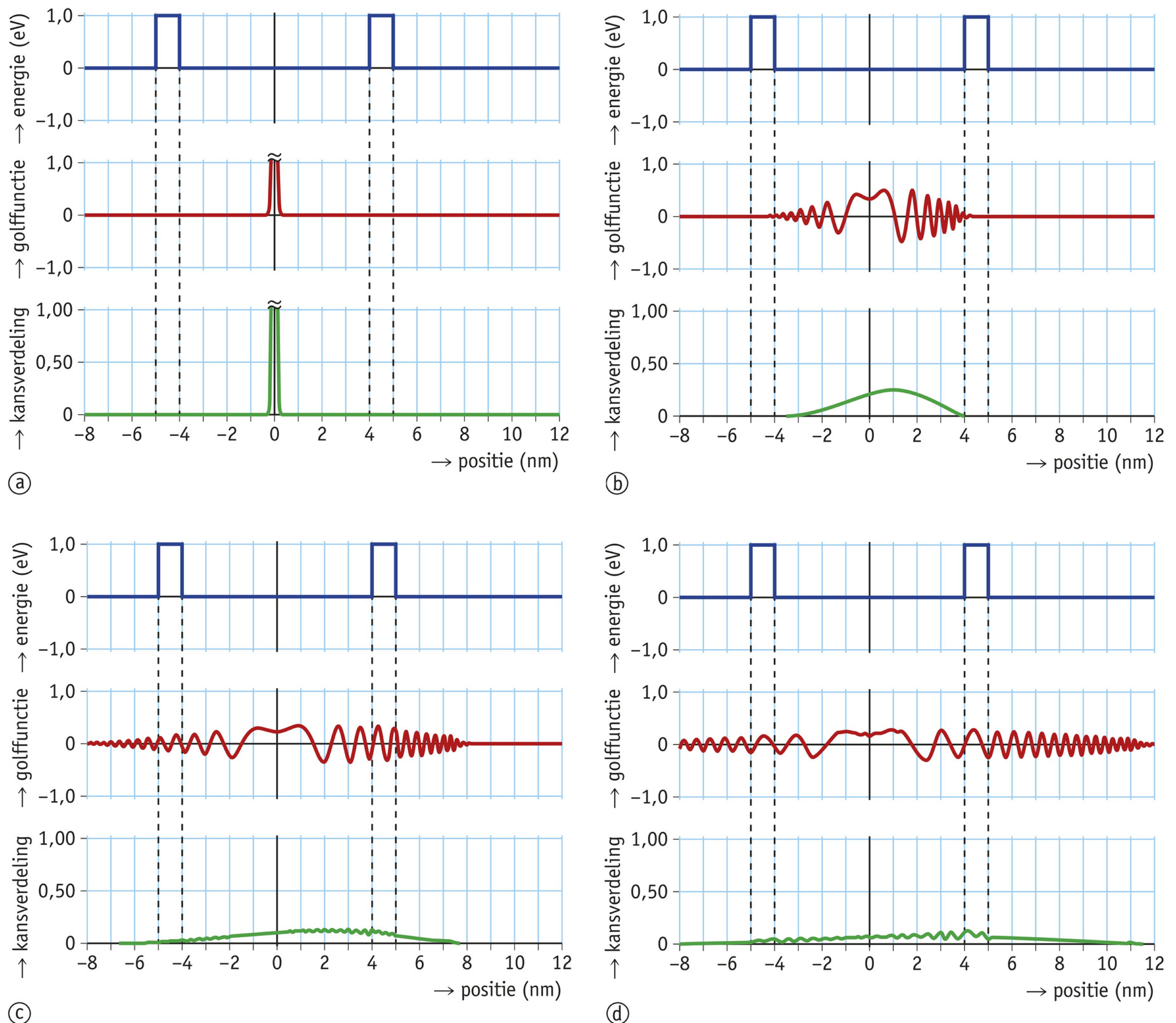
Een quantumdeeltje gedraagt zich heel anders: dat wordt beschreven door een golffunctie die de kansverdeling beschrijft. Tussen de omkeerpunten heeft die golffunctie een sinusachtige vorm: de golflengte wordt korter waar een klassiek deeltje een hogere snelheid en meer kinetische energie zou hebben. Dat is een gevolg van de debroglie-relatie.
Buiten de omkeerpunten, in het klassiek verboden gebied, heeft de golffunctie de vorm van een exponentiële functie die naar nul gaat hoe verder je in het verboden gebied komt. Uiteindelijk gaat de golffunctie en dus de kans naar nul. Ook het quantumdeeltje zit dus opgesloten. Dat zie je bijvoorbeeld gebeuren bij de golffunctie voor de tweede aangeslagen toestand van een quantumdeeltje in een halfpipe (figuur 37).




▲ **figuur 37** een quantumdeeltje in een halfpipe (onder: de potentiële energie; boven: een van de golffuncties)

## Tunnelen

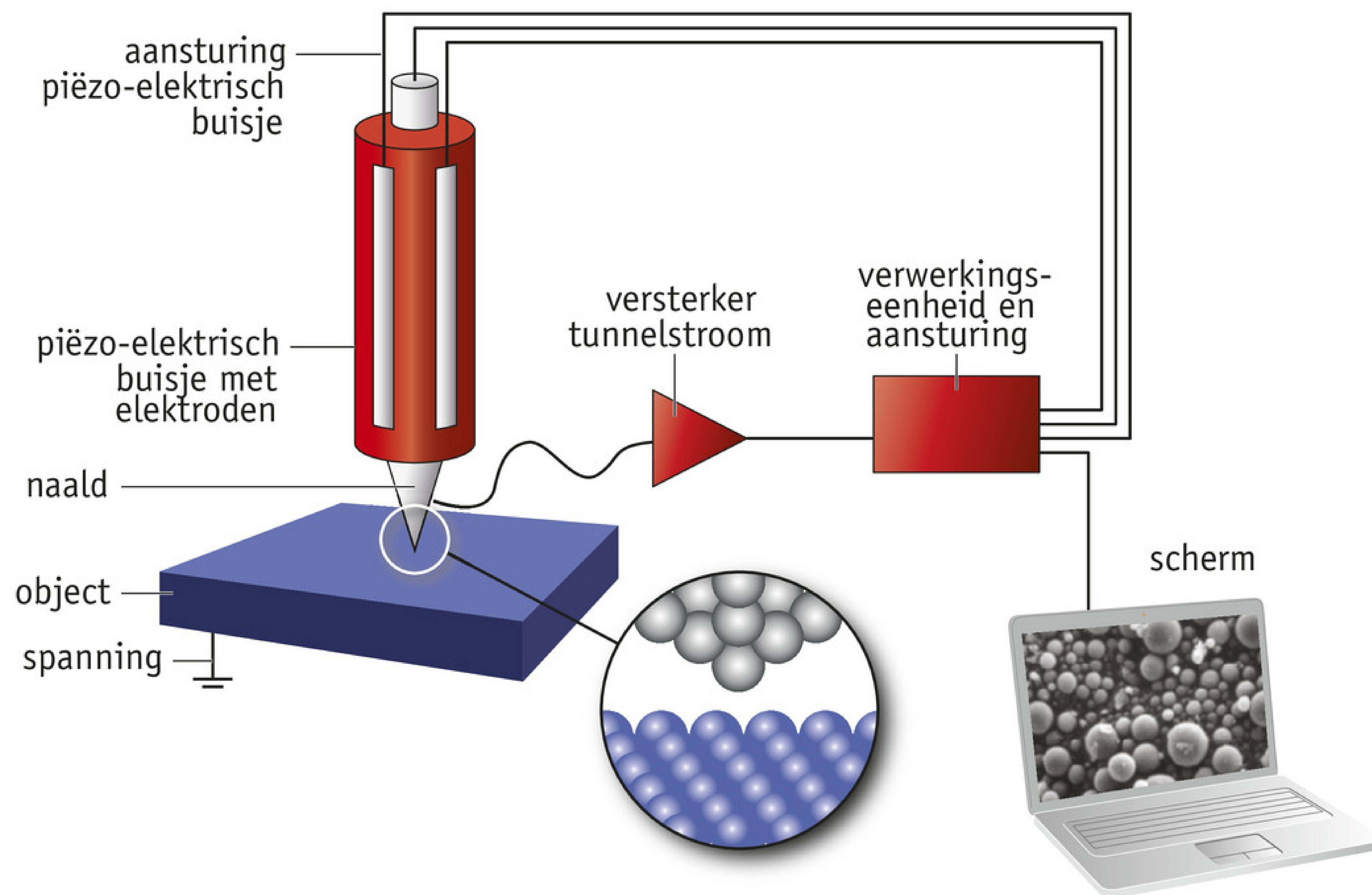
Een deeltje, zowel klassiek als quantum gezien, is in figuur 37 opgesloten, omdat buiten de omkeerpunten de potentiële energie altijd groter is dan de totale energie. In figuur 38a zie je een andere situatie. Op $t = 0$ bevindt een quantumdeeltje zich in de buurt van $x = 0$ nm met een gemiddelde kinetische energie van 0,5 eV. Tussen $x = -4$ nm en $x = +4$ nm kan het deeltje vrij bewegen. Op die twee punten wordt de potentiële energie over een afstand van 1 nm hoger: 1 eV. Een klassiek deeltje zou niet genoeg energie hebben om langs die punten te komen. Die twee pieken bij $x = -4$ nm en $x = +4$ nm vormen elk een barrière voor het deeltje. Een quantumdeeltje heeft echter een kans om toch langs die twee barrières te komen. Dat zie je in de figuren 38b tot en met 38d. Daarin zie je de golffunctie en de kansverdeling, steeds voor 2 fs later. Dit verschijnsel heet **tunneling**. Met tunneling is ook alfaverval te verklaren en ze vormt de basis van de scanning-tunnelingmicroscoop (STM).




▲ **figuur 38** vier momentopnamen voor een quantumdeeltje tussen twee barrières, steeds 2 fs later

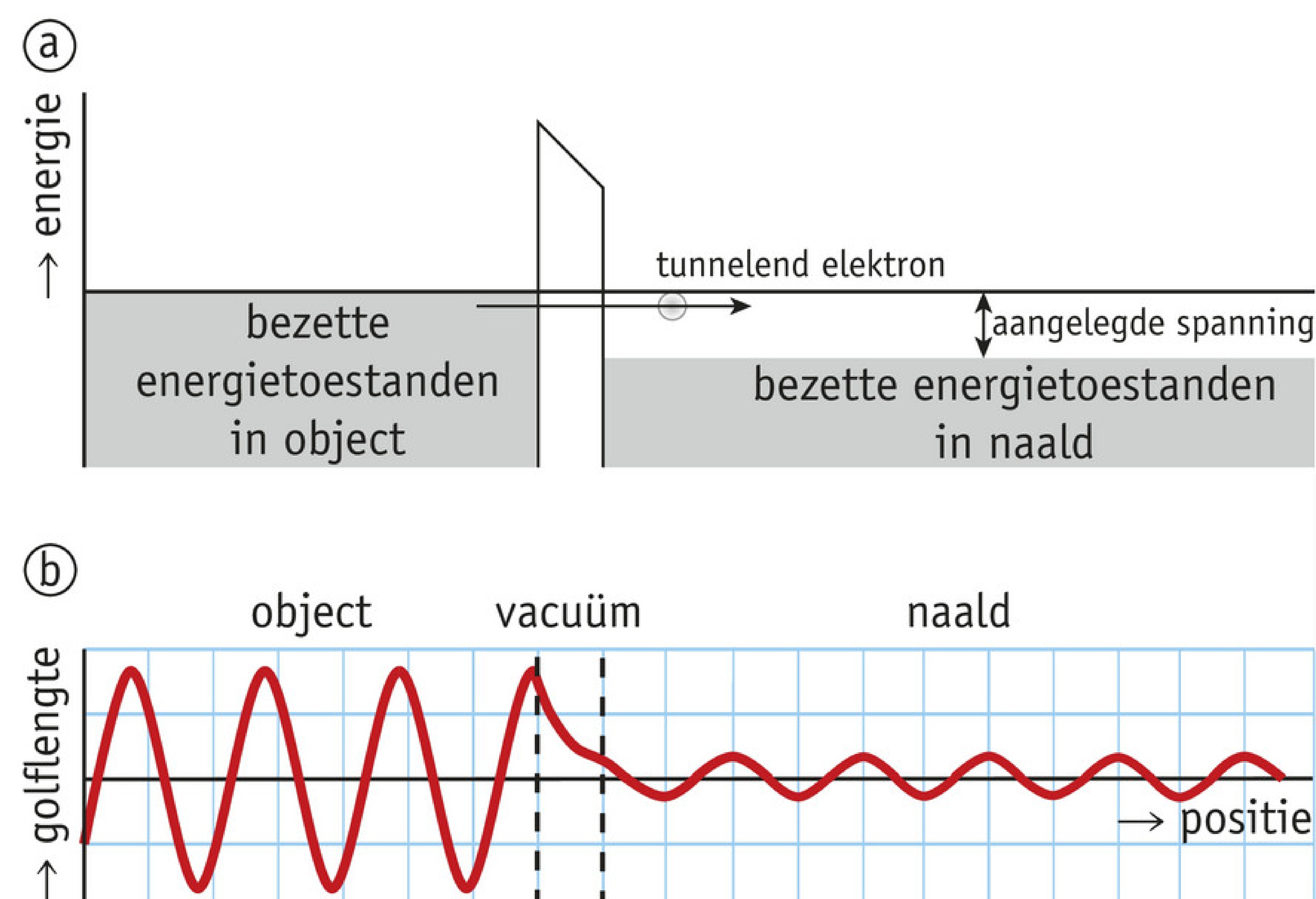
## Scanning-tunnelingmicroscoop

In figuur 39 zie je schematisch de opstelling van een STM. Zowel het af te beelden object als de naald waarmee wordt gescand, moet elektrisch geleidend zijn en zich in hoogvacuüm bevinden. Over de naald en het object wordt een spanning aangebracht. Als ze geen contact maken, dan zou er klassiek gezien geen stroom kunnen lopen. Het vacuüm tussen naald en object vormt een barrière waardoor elektronen niet kunnen passeren.
Quantummechanisch gezien gaat er wel een stroom lopen: de **tunnelstroom**. De grootte van deze stroom hangt af van de aangebrachte spanning, de afstand tussen naald en object (de breedte van de energiebarrière) en de massa van de tunnelende quantumdeeltjes (elektronen in dit geval). De naald wordt nu zodanig op en neer bewogen dat de tunnelstroom constant blijft. De informatie over hoe ver de naald omhoog of omlaag moet worden gebracht, wordt naar een computer gestuurd. Deze maakt vervolgens een plaatje zoals dat van figuur 39.




▲ **figuur 39** de opstelling van een STM

Om te begrijpen hoe de STM werkt, kun je naar de potentiële energie kijken van de elektronen als functie van de positie (figuur 40). Zowel in het object (links) als in de naald (rechts) bevinden zich heel veel energietoestanden die bezet zijn door elektronen. Daarboven bevinden zich onbezette toestanden (niet getekend). Door de aangebrachte spanning komen de elektronen in het object in een hogere energietoestand dan de elektronen in de naald. Omdat de elektronen gebonden zijn in het object en de naald, gaat de potentiële energie in het vacuüm omhoog. Klassiek gezien heeft een elektron onvoldoende energie om daar te komen.

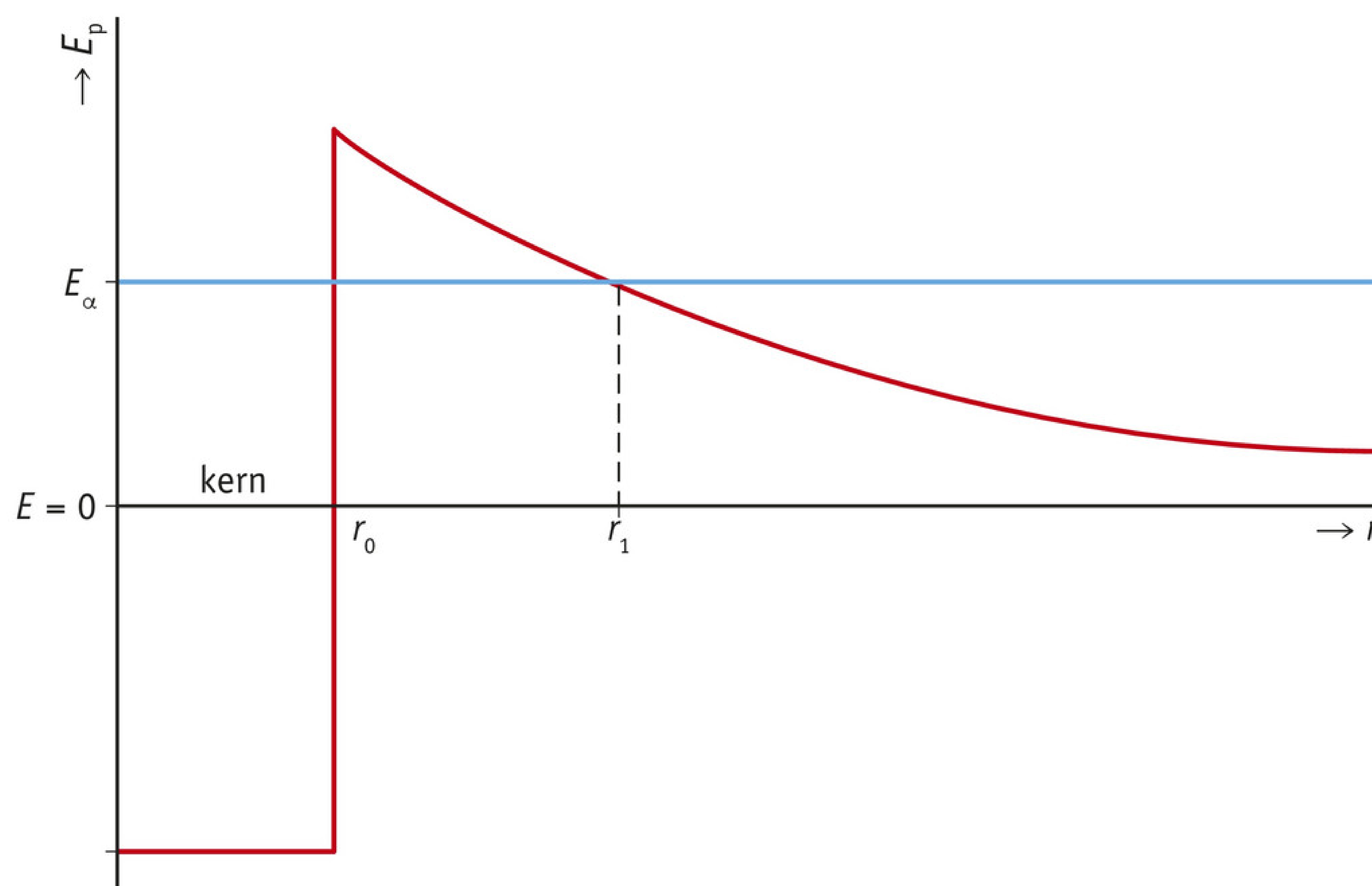



▲ **figuur 40** (a) de potentiële energie van de elektronen in het object (links), de naald (rechts) en het vacuüm (daartussenin); (b) schematische weergave van de golffunctie

Als je naar de golffunctie in figuur 40b kijkt, dan zie je dat de amplitude in de barrière (het vacuüm) weliswaar afneemt, maar dat er aan de andere kant, in de naald, nog wat overblijft. Er is dus een kans dat een elektron van het object via de barrière naar de naald tunnelt. Dit veroorzaakt de tunnelstroom. Overigens is er ook een kans dat er elektronen de andere kant op tunnelen: van naald naar object. Maar door de aangelegde spanning is die kans kleiner, zodat er netto een stroom in één richting loopt.

## Alfaverval

Bij alfaverval zendt de atoomkern een heliumkern uit met een bepaalde energie. De halveringstijden van radioactieve isotopen die vervallen via alfaverval, lopen zeer uiteen: van $10^{-6}$ s tot $10^9$ y. Op basis van experimentele meetgegevens blijkt de halveringstijd af te hangen van de energie van het alfadeeltje en het atoomnummer van de moederkern. In 1928 lukte het de Sovjet-fysicus George Gamow (1904–1968) een model op te stellen dat dit verband kon verklaren. Zijn model maakt gebruik van tunneling.
Gamow stelde zich een alfadeeltje voor dat in de moederkern heen en weer beweegt met een energie gelijk aan de kinetische energie van het uitgezonden alfadeeltje. In de kern beweegt het alfadeeltje min of meer vrij, maar het is via de sterke kernkracht gebonden aan de kern. Het is daardoor te zien als een quantumdeeltje in een eendimensionaal doosje (links in figuur 41). De sterke kernkracht werkt alleen op korte afstand. Als het alfadeeltje voldoende ver van de kern is, dan werkt de sterke kernkracht niet meer en ondervindt het alleen de afstotende coulombkracht (rechts in figuur 41).




▲ **figuur 41** schematische weergave van de potentiële energie voor een alfadeeltje als functie van de afstand tot de kern

Klassiek gezien heeft het alfadeeltje onvoldoende energie om de barrière te passeren. Maar volgens de quantumtheorie is er een kans dat het alfadeeltje naar de andere kant tunnelt. Die kans wordt groter naarmate het energietekort minder groot is. Dat is het geval voor een alfadeeltje met een hogere energie. Dit voorspelt dat de halveringstijd van isotopen korter wordt naarmate de energie van het alfadeeltje groter is. De barrière en dus het energietekort wordt lager voor elementen met een lager atoomnummer. Daar zitten minder protonen in en dus is de coulombafstoting minder. Het model voorspelt dat de halveringstijd daardoor korter wordt voor elementen met een lager atoomnummer.
Het omgekeerde effect, waarbij er een deeltje de kern in tunnelt, vindt plaats bij kernfusie. In de zon fuseren zo protonen tot er uiteindelijk helium ontstaat. Protonen zijn positief geladen deeltjes die elkaar afstoten. Alleen bij heel hoge temperaturen, die in de zon niet voorkomen, is de snelheid van protonen groot genoeg om deze afstoting te overwinnen. Alleen met het effect van tunneling is te verklaren dat protonen toch bij de lagere temperaturen in de zon fuseren.

## Onthoud!

- Een klassiek deeltje kan zich alleen op plaatsen bevinden waar de energie van het deeltje groter dan of gelijk aan de potentiële energie is. De resterende energie is dan kinetische energie. Het deeltje stopt of keert om waar de kinetische energie nul is.
- Een quantumdeeltje kan worden aangetroffen in klassiek verboden gebied. Daardoor kan het een barrière overbruggen. Dit verschijnsel heet tunneling.
- Een scanning-tunnelingmicroscoop (STM) maakt gebruik van tunneling door heel nauwkeurig de afstand tussen naald en object te meten waarbij de tunnelstroom constant is.
- De halveringstijden van isotopen die via alfaverval vervallen, is te verklaren met een model dat gebruikmaakt van tunneling.
- De kans om te tunnelen wordt groter naarmate de massa van het deeltje kleiner is, het energietekort bij de barrière kleiner wordt en de energiebarrière smaller wordt.

## Opdrachten

**51** Halfpipe
In figuur 37 kan een klassiek deeltje zich niet buiten de punten $x_{min}$ en $x_{max}$ bevinden.
**a** Hoe heet het gebied buiten die punten?
**b** Leg op basis van energiebehoud uit waarom het deeltje zich daar niet kan bevinden.

**52** Beperking van tunnelen
Tunneling is een vreemd verschijnsel dat op menselijke schaal onmogelijk is. Ook quantumdeeltjes kunnen niet altijd zomaar tunnelen.
**a** Noem de drie factoren waar de kans op tunnelen van afhangt.

Leg voor de volgende situaties uit waarom er geen tunneling optreedt.
**b** Een elektron gebonden in een waterstofatoom tunnelt niet vrij van het proton.
**c** Een mens in een kamer tunnelt niet door een muur heen.
**d** Een elektron aan de minpool van een batterij tunnelt niet naar de pluspool.

**53** Chemische binding
Chemische bindingen zijn te beschrijven door de wet van Hooke voor een veer: de kracht tussen gebonden atomen is evenredig met hun uitwijking ten opzichte van de evenwichtsstand. De potentiële energie van een veer is evenredig met het kwadraat van de uitwijking, zoals in figuur 37.
**a** Leg uit dat een chemische binding die voldoet aan figuur 37 niet kan worden verbroken.

In werkelijkheid heeft de potentiële energie voor een molecuul eerder de vorm zoals in figuur 42.
**b** Leg uit dat voor lage energieën de benadering van een massa aan een veer een goede is.
**c** Beredeneer op basis van figuur 42 dat de binding *wel* kan worden verbroken.

Hannah meent dat het molecuul in de grondtoestand een afmeting heeft van $0{,}75 \cdot 10^{-10}$ m.
**d** Leg met behulp van figuur 42 uit hoe zij tot deze waarde is gekomen. Geef ook een reden waarom zij niet helemaal juist zit.

**54** STM
Een STM maakt gebruik van tunneling om de atomaire hoogteverschillen in een stof nauwkeurig in beeld te brengen. Je zou kunnen denken dat dat ook klassiek kan door te meten of er wel of geen contact wordt gemaakt.
**a** Leg uit waarom dit niet mogelijk is.




▲ **figuur 42** de potentiële energie tussen twee waterstofatomen in een $H_2$-molecuul als functie van hun onderlinge afstand *r*

Neem de grafiek voor de potentiële energie uit figuur 40b over in je schrift.

**b** Teken in een andere kleur de grafiek voor de potentiële energie als de *spanning* over naald en object groter wordt.

**c** Teken in weer een andere kleur de grafiek voor de potentiële energie als de *afstand* tussen naald en object groter wordt.

**d** Welke vier grootheden moeten worden gemeten om met een STM figuur 34 te kunnen maken?

**55** Alfaverval

Alfaverval is te verklaren met een model op basis van tunneling. De halveringstijd hangt af van het atoomnummer en van de energie van het alfadeeltje.

**a** Beschrijf voor elk van de genoemde grootheden welk kwalitatief verband er is met de halveringstijd.

**b** Controleer het verband tussen halveringstijd en atoomnummer door verschillende alfastralers in Binas tabel 25 te zoeken waarvan het alfadeeltje (ongeveer) dezelfde energie heeft.

**c** Controleer met behulp van Binas tabel 25 het verband tussen halveringstijd en energie van het alfadeeltje. Welke grootheid moet je hierbij constant houden?

Marie Curie vroeg zich af of alfaverval ook afhankelijk is van de temperatuur. Temperatuur is een maat voor de gemiddelde kinetische energie van de deeltjes in een stof. Ze voerde in 1911 een experiment uit in het koudelaboratorium van Heike Kamerlingh Onnes in Leiden. Daar bleek dat de halveringstijd niet van de temperatuur afhangt.

**d** Beschrijf het experiment dat Curie zou kunnen hebben uitgevoerd.

**e** Leg uit dat op basis van het model van alfaverval op basis van tunneling niet te verwachten is dat er een verband is tussen halveringstijd en temperatuur.

**56** Kernfusie

In de zon vindt kernfusie voor een belangrijk deel plaats dankzij tunneling. Een van de stappen daarbij is dat twee protonen fuseren tot $^{2}H$.

**a** Bepaal welk ander deeltje hierbij vrijkomt door de reactievergelijking op te stellen.

**b** Noem de kracht die de twee protonen moeten overwinnen.

**c** Leg uit dat dit proces lijkt op alfaverval, maar dat het hier om het omgekeerde proces gaat.

Het in de zon gevormde $^2$H fuseert vervolgens met een proton.

**d** Leg uit of dit proces gemakkelijker of moeilijker verloopt dan de fusie van twee protonen tot $^2$H.

**+57** Tunnelkans

Je kunt tunneling vergelijken met de halveringsdikte bij gammastraling: hoe dikker de barrière, hoe kleiner de kans op tunneling. Ook bij tunneling kun je een soort halveringsdikte $d_{½}$ definiëren. Voor de tunnelkans $P$ geldt dan: $P \sim \exp\left(-\dfrac{d}{d_{½}}\right)$, met $d$ de breedte van de barrière.

**a** Leg op basis van de theorie uit dat de halveringsdikte $d_{½}$ afhangt van de massa van het deeltje, het energietekort bij de barrière en de constante van Planck.

**b** Leid met behulp van een analyse van eenheden een uitdrukking voor $d_{½}$ af. Gebruik voor het energietekort bij de barrière $(E_p - E)$, met $E_p$ de hoogte van de barrière en $E$ de energie van het deeltje. Hint: je kunt de energie omschrijven naar een grootheid met de eenheid impuls en je kunt vervolgens de debroglie-relatie gebruiken om die grootheid om te schrijven naar een grootheid met eenheid lengte.

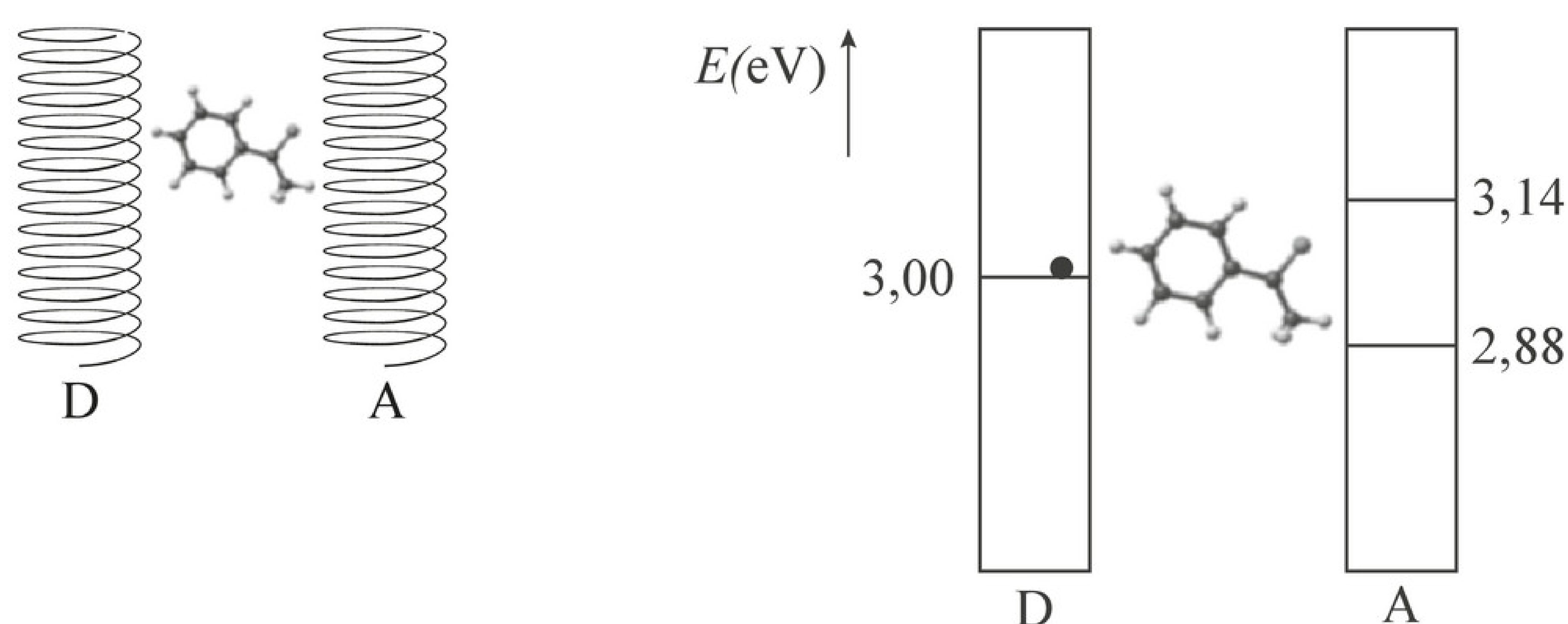
**c** Controleer dat het zo gevonden verband voor de tunnelkans overeenkomt met wat in de theorie staat.

## Eindopdracht

**58** Quantumneus

Als een mens iets ruikt, betekent dit dat een geurmolecuul in de neus wordt gedetecteerd door een geurreceptor. Ieder mens heeft ongeveer 350 verschillende geurreceptoren en kan ongeveer 10 000 verschillende geuren onderscheiden. Om de werking te verklaren zijn twee modellen in omloop: het sleutel-slotmodel en het turinmodel.

Het sleutel-slotmodel kan niet verklaren waarom sommige gelijkvormige moleculen verschillend ruiken en, omgekeerd, sommige moleculen met een heel andere vorm hetzelfde ruiken. Daarom kwam de Franse onderzoeker Luca Turin in 1996 met een nieuw model. Daarin bestaat een geurreceptor uit twee delen: de donor D en de acceptor A (figuur 43).




▲ **figuur 43** (a) schematische weergave van een geurreceptor; (b) energieniveaus van geurreceptor in donor en acceptor

Als een elektron van donor D via een geurmolecuul naar acceptor A beweegt, wordt er bij A een signaal afgegeven dat naar de hersenen gaat, waardoor het geurmolecuul wordt waargenomen. Het model van Turin is een combinatie van quantum-tunneling en energieoverdracht. In figuur 43b bevindt zich een elektron in donor D in het aangegeven energieniveau. Van acceptor A zijn twee energieniveaus weergegeven. Zonder geurmolecuul kan het elektron niet van D naar A gaan, omdat het energieniveau in D niet overeenkomt met

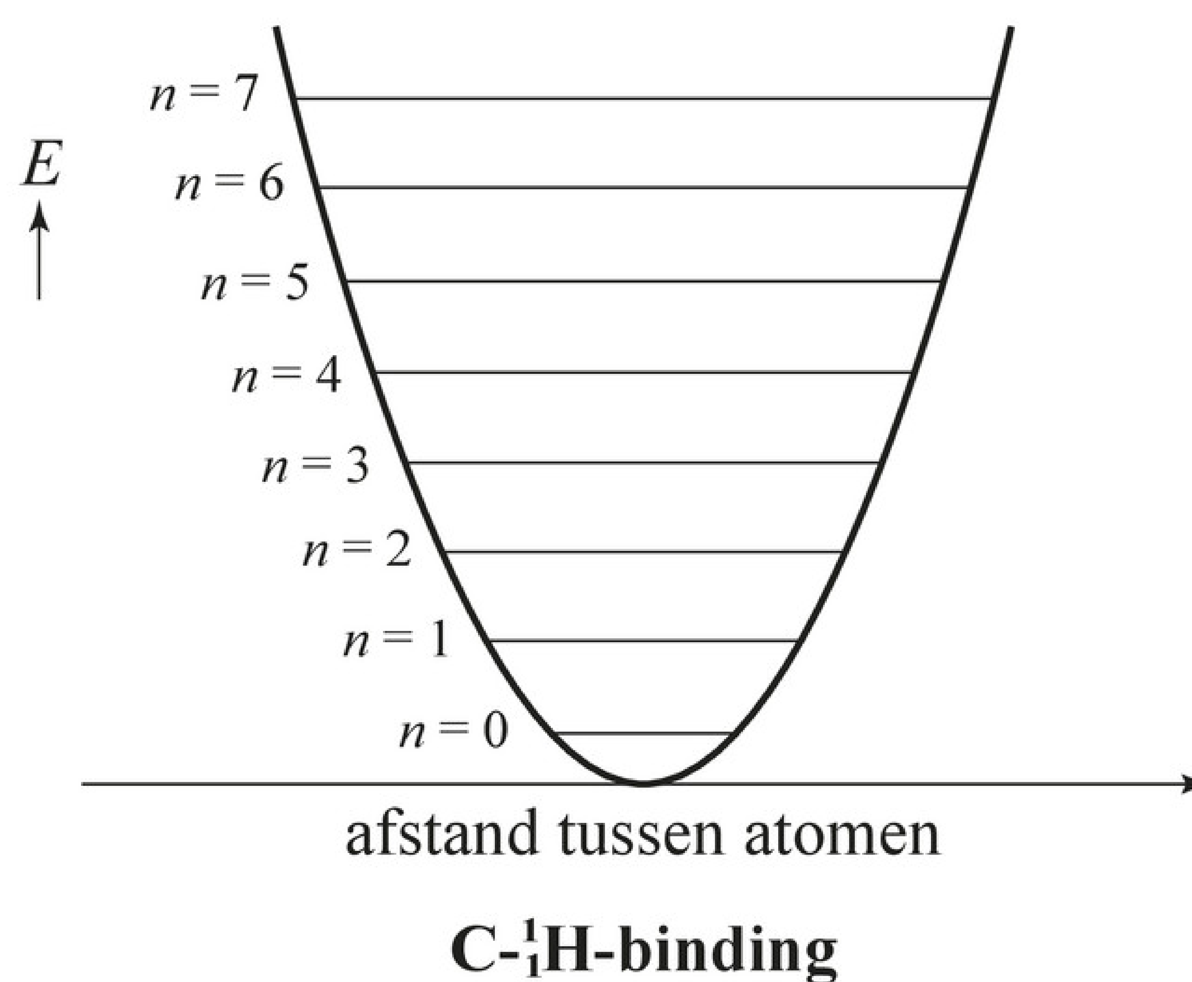
de energieniveaus in A. Het elektron komt óf energie tekort óf heeft een teveel aan energie. Als een geurmolecuul dat past bij de receptor tussen D en A zit, kan dit geurmolecuul energie opnemen van het elektron zodat het elektron wel van D naar A kan komen.

**a** Leg uit in welke van de twee energieniveaus van A het elektron dan komt.

Twee leerlingen bespreken het model van Turin. Een van de leerlingen merkt op dat het elektron prima zonder geurmolecuul van het energieniveau in D naar het laagste energieniveau in A kan komen doordat het bij tunneling energie verliest.

**b** Geef twee redenen waarom tunneling zonder geurmolecuul van D naar A niet mogelijk is.

Een voorbeeld van een geurmolecuul is acetofenon. De energie-uitwisseling met het geurmolecuul kan in een vereenvoudigd model worden beschreven. Elke C–H-binding van het geurmolecuul wordt daarin beschouwd als een quantumfysisch massa-veersysteem. Zie figuur 44 voor de energieput met de discrete energieniveaus van dit massa-veersysteem voor een van de C–H-bindingen van acetofenon.




▲ **figuur 44** energieniveaus van een C–H-binding

Voor de energieniveaus geldt:

$$E_n = h \cdot f \cdot (n + ½)$$

Hierin is:

- $E_n$ de energie van niveau $n$;
- $h$ de constante van Planck;
- $f$ de frequentie van het massa-veersysteem.

Als het elektron in figuur 43b van D naar A gaat, neemt de C–H-binding van het geurmolecuul precies zoveel energie van het elektron op dat het massa-veersysteem één energieniveau omhooggaat.

**c** Bepaal met behulp van figuur 43b en 44 de waarde van $f$.

Om te onderzoeken of het model van Turin klopt, heeft een onderzoeker een experiment met fruitvliegjes gedaan. Hij bood twee verschillende geuren aan, waarvan één acetofenon was. De fruitvliegjes hadden een duidelijke voorkeur voor acetofenon. Daarna herhaalde hij het experiment, waarbij hij in acetofenon 'gewone' waterstofatomen ($^1_1$H) verving door deuteriumatomen ($^2_1$H).
Voor dit aangepaste acetofenon hadden de fruitvliegjes *geen* voorkeur. De fruitvliegjes konden dus het verschil ruiken tussen acetofenon met gewone waterstofatomen en acetofenon met deuteriumatomen.

Neem aan dat de massa in het massa-veersysteem de massa is van het waterstofatoom en dat de vervanging van gewone waterstof door deuterium alleen effect heeft op de massa van het massa-veersysteem en niet op de veerconstante.

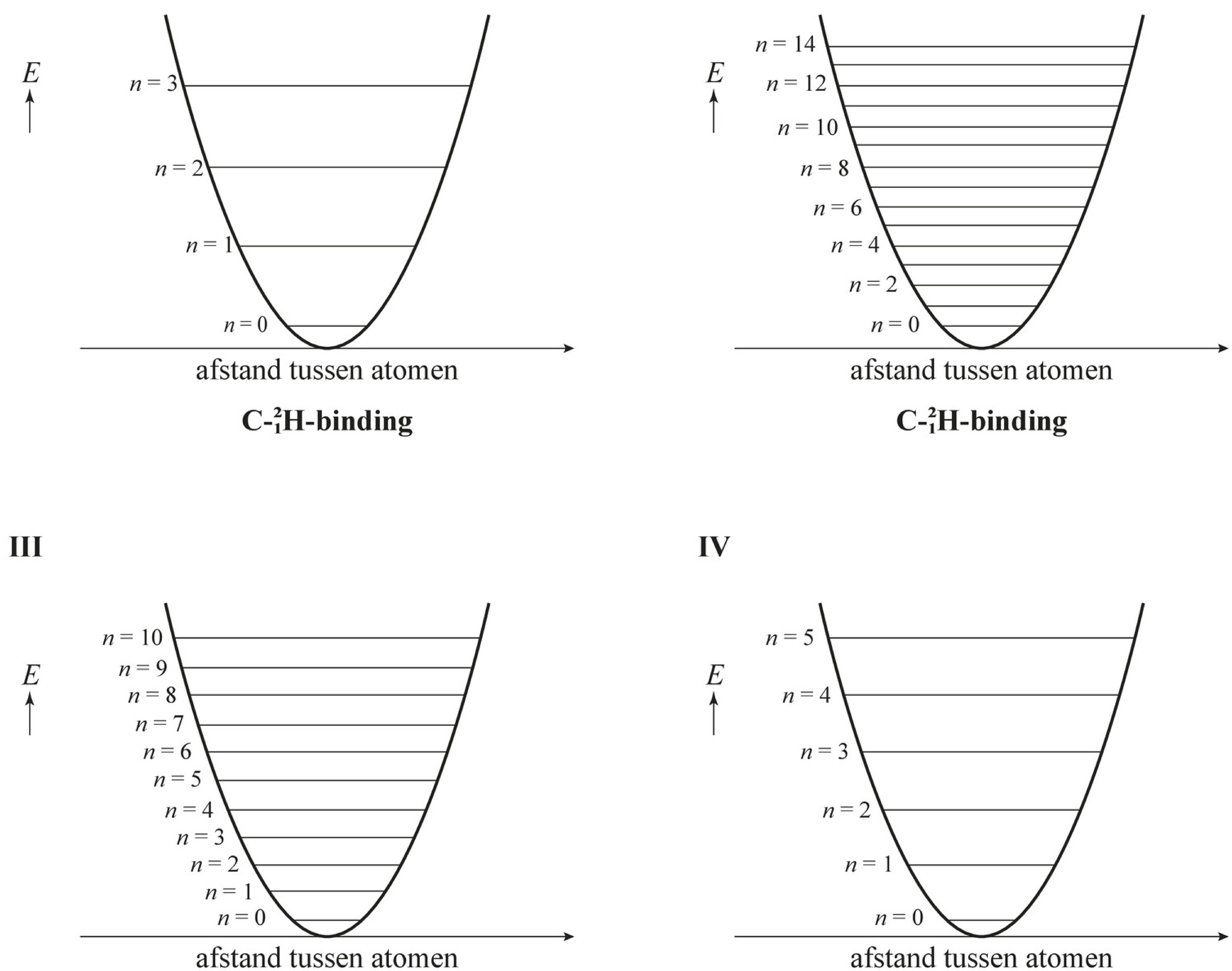
**d** Leg uit dat de uitkomst van het experiment een ondersteuning is voor het model van Turin.

**e** Leg uit of de tunnelkans tussen D en het geurmolecuul voor het elektron in dit experiment verandert.

Het elektron tunnelt van D naar het geurmolecuul in een tijd $t_1$ en van het geurmolecuul naar A in een tijd $t_2$.

**f** Leg uit of voor het model van Turin moet gelden dat $t_1 \ll t_2$ of andersom $t_2 \ll t_1$.

In figuur 45 zijn op dezelfde schaal als figuur 44 nog vier energieputten met energieniveaus weergegeven (I tot en met IV) van dezelfde C–H-binding, waarin nu het gewone waterstof vervangen is door deuterium.




▲ **figuur 45** vier mogelijke energieniveauschema's van een C–$^2_1$H-binding

**g** Voer de volgende opdrachten uit.

- Leid af dat geldt: $\dfrac{f_{\text{deuterium}}}{f_{\text{waterstof}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- Leg daarmee uit welke energieput met energieniveaus uit figuur 45 past bij de C–H-binding van het aangepaste acetofenonmolecuul.

In de parfumindustrie worden geurmoleculen die erg duur zijn vervangen door andere moleculen die hetzelfde ruiken. Bij de zoektocht naar vervangende moleculen worden de energieniveaus van het oorspronkelijke molecuul vergeleken met de energieniveaus van het vervangende molecuul.

**h** Leg uit aan welke eis de energieniveaus van het vervangende molecuul moeten voldoen.

De geurreceptor bestaat uit een eiwit dat reageert op de opname van een elektron door A. De structuur van dit eiwit kan worden bepaald met eiwitkristallografie. Hiervoor moet van het eiwit eerst een kristal worden gevormd. Een kristal heeft een heel regelmatige structuur. Door het kristal met elektromagnetische straling te bestralen, ontstaat er een kenmerkend patroon van maxima en minima waaruit de structuur van het eiwit kan worden bepaald.

**i** Leg uit welk type elektromagnetische straling geschikt is voor eiwitkristallografie.

Om te bepalen of er een zuiver kristal is gevormd, wordt een SEM-opname gemaakt.

**j** Beschrijf kort de werking van een SEM en leg daarmee uit waarom deze techniek wel geschikt is om de structuur van het kristal te bekijken, maar niet die van de eiwitten in het kristal.

# 8 Practicum

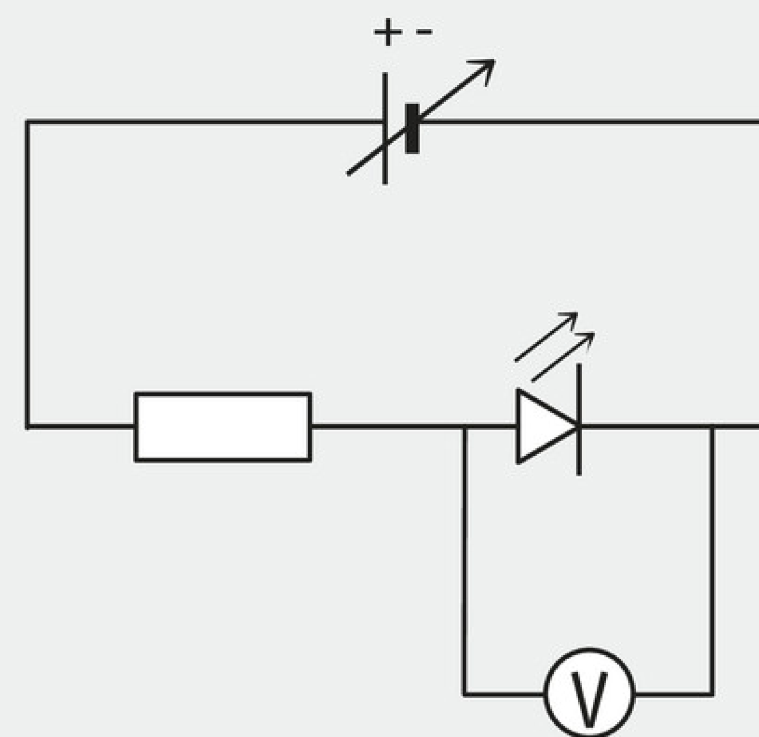
## EXPERIMENT 1 De constante van Planck bepalen (onderzoekspracticum)

**Inleiding**
De constante van Planck, $h$, is dé natuurconstante van de quantumwereld. Door de kleine waarde ervan ervaar je op menselijke schaal alleen indirect quantumeffecten.
Er zijn verschillende experimenten om de waarde van $h$ vast te stellen. In dit experiment gebruik je ledjes van verschillende kleuren.
Een led heeft een minimale spanning waarboven deze licht gaat geven: de kniespanning, ofwel doorlaatspanning. De elektrische energie die een elektron in het ledje dan krijgt, wordt uitgezonden in de vorm van een foton. Een andere kleur led heeft een andere kniespanning.

**Onderzoeksvraag**
Welke waarde van de constante van Planck volgt uit een bepaling op basis van verschillende kleuren leds?

**Benodigdheden**
minimaal drie leds van verschillende kleuren (zonder voorschakelweerstand); ohmse weerstand (ongeveer 1 kΩ); variabele spanningsbron; aansluitdraden; krokodillenklemmen; spanningsmeter of multimeter

**Uitvoering**
- Bouw de schakeling van figuur 46. Gebruik krokodillenklemmen om de led aan te sluiten en zorg dat je deze gemakkelijk kunt vervangen door een andere led. Sluit de spanningsmeter eerst aan op de weerstand.
- Voer de spanning van de bron langzaam op tot de led licht gaat geven (houd je hand over de led, het licht is zwak). Dit punt is ook te bepalen door te kijken wanneer de spanning over de weerstand begint op te lopen. Op dat moment begint de led te geleiden, loopt er een stroom en komt er over de weerstand een spanning te staan. Meet vervolgens bij deze instelling de spanning over de led: dit is de kniespanning. Noteer de kleur led en de bijbehorende kniespanning overzichtelijk in een tabel. Herhaal deze stap voor alle beschikbare leds.
- Bepaal met een spectroscoop de golflengte van het licht van de gebruikte leds. Eventueel kun je deze waarden vinden in de specificaties van de leds.




▲ **figuur 46** schakelschema met led

**Verwerking**

1 Hoe groot is de stroom door de schakeling als de spanning van de bron lager is dan de kniespanning? Hoe groot is dan de spanning die over de serieweerstand staat? Leg uit dat de led dan een zeer grote weerstand heeft. Leg uit hoe groot dan de spanning is over de led.
2 Bij een spanning hoger dan de kniespanning geeft de led nog steeds eenzelfde kleur licht. Wat gebeurt er met de extra energie die je dan in de led stopt?
3 Maak extra kolommen in je tabel: voor de frequentie $f$ (in Hz) van het licht van de led en de elektrische energie $E$ (in J) die de elektronen afgeven aan de led. Reken de golflengten van de leds om naar frequenties. Reken de gemeten kniespanning om naar de elektrische energie per elektron.
4 Maak een $(E,f)$-diagram. Geef het verband tussen $E$, $f$ en $h$. Teken de grafiek door de meetpunten die bij dit verband hoort.
5 Bepaal uit je grafiek de constante van Planck.

**Conclusie**
6 Beantwoord de onderzoeksvraag. Vergelijk je antwoord met de literatuurwaarde en ga systematisch na waar een eventuele afwijking door kan zijn veroorzaakt.

## EXPERIMENT 2 Dubbelspleet-experiment (begripspracticum)

**Inleiding**
In dit experiment onderzoek je de eigenschappen van het interferentiepatroon bij het dubbelspleet-experiment voor watergolven en licht.

**Onderzoeksvragen**
Hoe hangt het interferentiepatroon in het dubbelspleet-experiment af van de eigenschappen van de bron en de openingen in de barrière bij:
**1** water?
**2** licht?

**Benodigdheden**
golfbak (water); verschillende brekingslichamen; vibratiegenerator; meetlat; rode laser; groene laser; dubbelspleten met verschillende afstanden; enkele spleet waarvan de breedte kan worden gevarieerd; scherm (bijvoorbeeld een witte muur); statief en houders voor tralies en lasers

**Veiligheid**
Kijk **nooit** in een laserstraal, speel **nooit** met een laser en schijn **nooit** met een laser op andere mensen.
Er kan onherstelbare beschadiging van de ogen optreden.

**Uitvoering**
*Watergolven*
- Bouw met behulp van de golfbak de opstelling zoals in figuur 4 (paragraaf 2).
- Plaats twee brekingslichamen parallel aan de bron zodat ertussen een opening ontstaat (vergelijk met figuur 5 in paragraaf 2).
- Varieer de grootte van de opening en ga na wanneer er nog net buiging optreedt. Noteer de bijbehorende afstand. Bepaal in deze situatie ook de golflengte van de watergolven.
- Varieer nu de frequentie van de bron zodat de golflengte korter wordt. Neem waar wat er gebeurt met de golflengte en met de mate van buiging. Maak schetsen van wat je waarneemt.
- Plaats nu de brekingslichamen zodanig parallel aan de bron, dat er een dubbelspleet ontstaat.
- Stel de frequentie van de bron zodanig in dat er volledige buiging optreedt.
- Meet de afstand tussen de minima langs de rand tegenover de dubbelspleet.
- Varieer de golflengte en meet steeds de afstand tussen de minima.
- Varieer de afstand tussen de spleten en meet steeds de afstand tussen de minima.

*Licht*
- Bouw de opstelling zoals in figuur 4 (paragraaf 2).
- Voer de analoge experimenten uit met licht die je met water ook hebt uitgevoerd. Maak weer schetsen van wat je waarneemt en meet in verschillende situaties de afstand tussen de eerste twee minima op het scherm.

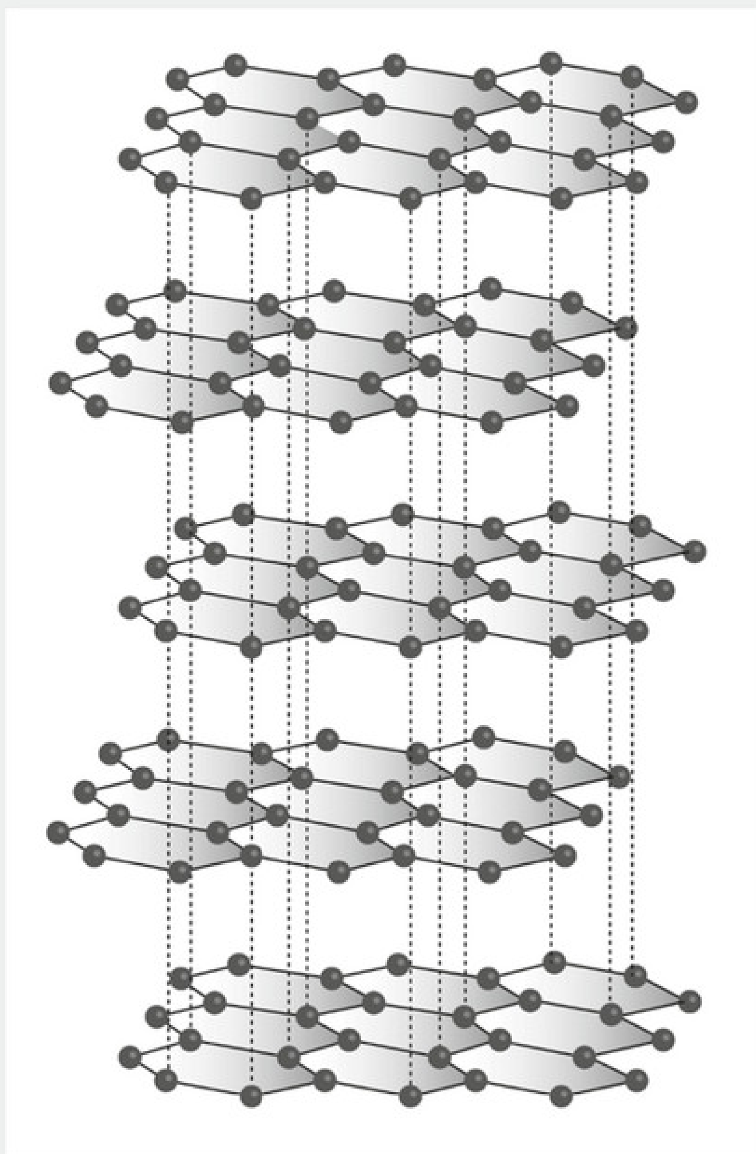
### Verwerking

**1** Ga met behulp van je waarnemingen na of er inderdaad buiging optreedt indien de opening dezelfde orde van grootte heeft als de golflengte.
**2** Welke eigenschappen van het patroon bij water zijn constant, welke veranderen in de tijd?
**3** Welk kwalitatief verband is er voor watergolven tussen de golflengte en de afstand tussen de twee minima?
**4** Welk kwalitatief verband is er tussen de afstand tussen de spleten en de afstand tussen de twee minima?
**5** Beantwoord vraag 3 en 4, maar nu voor licht. Vergelijk de uitkomsten met elkaar.

**Conclusie**
**6** Beantwoord de onderzoeksvragen.

## EXPERIMENT 3 Elektronendiffractie aan grafiet (demonstratie-, begripspracticum)

**Inleiding**
Grafiet wordt vrijwel dagelijks gebruikt in de vorm van potloodstiften. Grafiet bestaat uit laagjes, elk gevormd door een rooster van regelmatig geplaatste koolstofatomen (figuur 47). Elk van die laagjes is wat gedraaid ten opzichte van de andere lagen. Er zijn twee kenmerkende afstanden tussen de koolstofatomen. Daardoor zijn er veel openingen op een regelmatige afstand van elkaar. Als daar golven doorheen worden gestuurd, dan worden deze alleen in een bepaalde richting versterkt, net zoals bij het dubbelspleet-experiment.
In dit experiment bekijk je wat er met elektronen gebeurt die met verschillende snelheid en impuls op het grafiet worden afgevuurd.



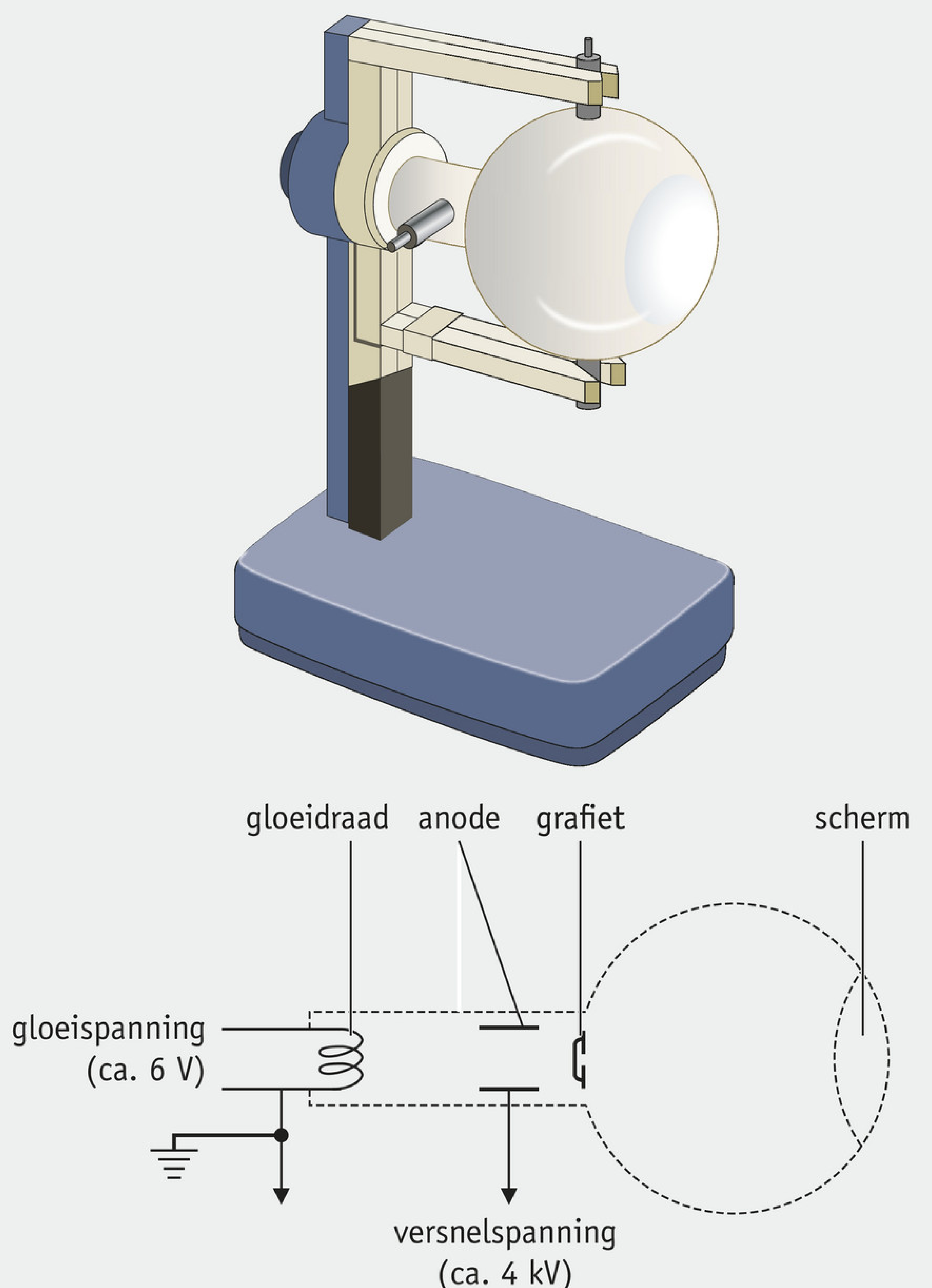
▲ **figuur 47** de regelmatige structuur in grafiet

**Onderzoeksvraag**
Hoe hangt de golflengte van elektronen af van hun impuls?

**Benodigdheden**
variabele hoogspanningsbron; vacuüm versnelbuis met grafiet; verschillende tralies met dezelfde tralieconstante; rode laser; meetlat

**Veiligheid**
- Je gebruikt een hoogspanningsbron. Let erop dat je hiervoor geschikte aansluitdraden gebruikt zodat je niet onder spanning komt te staan. Let ook op dat je de hoogspanning juist aansluit. (Dus niet op de gloeidraad.)
- Kijk **nooit** in een laserstraal, speel **nooit** met een laser en schijn **nooit** met een laser op andere mensen. Er kan onherstelbare beschadiging van de ogen optreden.

**Uitvoering**
- Sluit de vacuüm versnelbuis (figuur 48) aan op de hoogspanningsbron en op de gloeispanning.
- Zet de gloeispanning aan.
- Stel de hoogspanning laag in. Neem waar wat er gebeurt.
- Voer de versnelspanning op en neem waar hoe de ringen veranderen.
- Meet bij verschillende versnelspanningen de diameter van de binnenste ring.
- Je kunt het experiment simuleren met een laser en verschillende tralies. Laat een laser op een enkele tralie vallen. Neem waar wat er gebeurt.
- Plaats over de tralie andere tralies, maar steeds onder een andere hoek. Welk patroon ontstaat er?




▲ **figuur 48** een versnelbuis

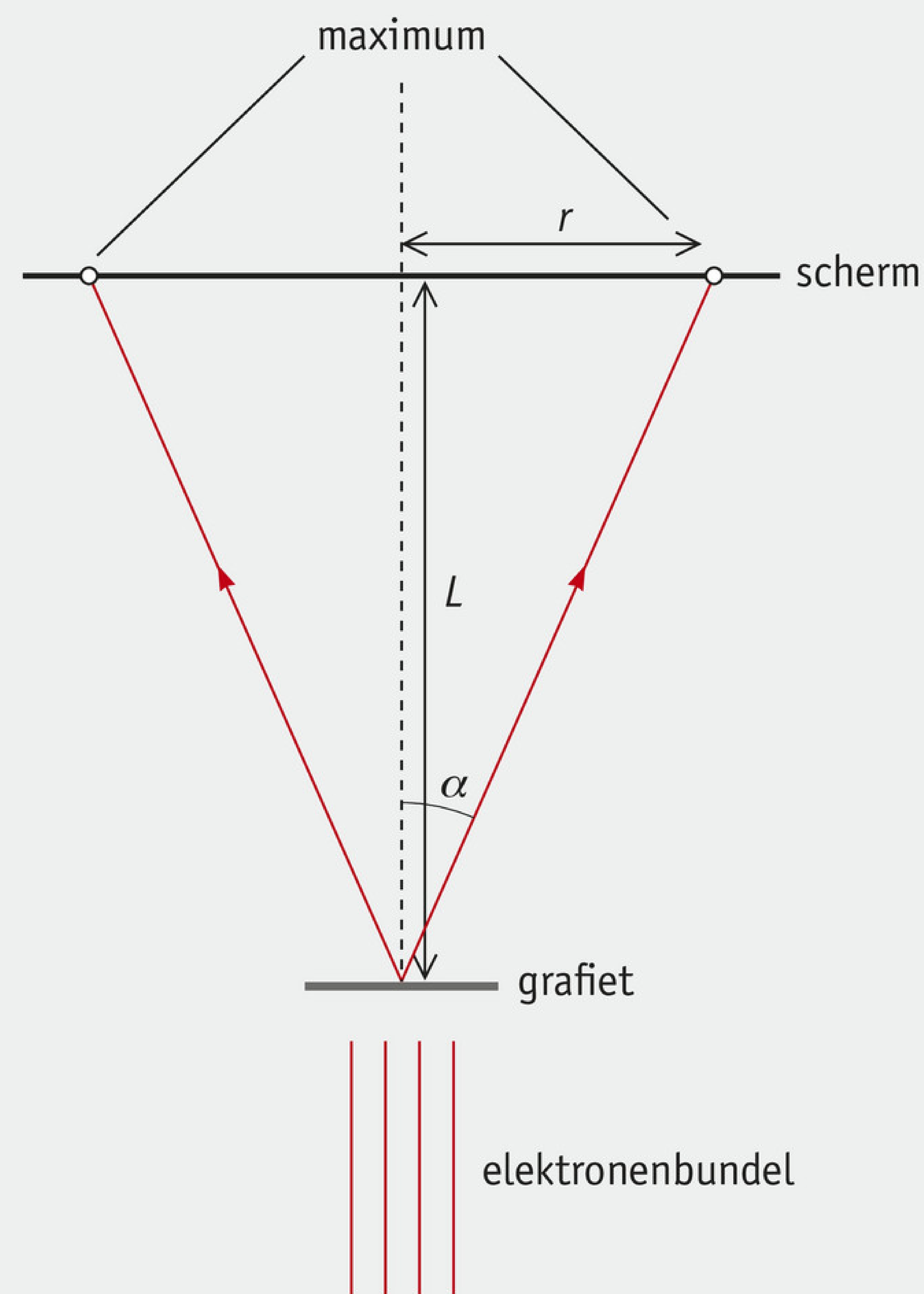
### Verwerking

1. Leg uit dat het patroon dat je waarneemt in de versnelbuis een interferentiepatroon is.
2. Welk kwalitatief verband is er tussen de versnelspanning en de diameter van de ringen?

3 Gebruik je meetgegevens om uit de ingestelde versnelspanning de impuls van de elektronen te berekenen.
4 De ringen ontstaan ook wanneer een bundel licht op een regelmatig rooster valt. Leg uit of de afstanden in het rooster dan kleiner of juist groter moeten zijn dan bij grafiet.
5 Voor licht geldt het volgende verband tussen de golflengte en de halve openingshoek waaronder de eerste-ordemaxima te zien zijn: $\lambda \sim \sin \alpha$. De hoek $\alpha$ is gemeten zoals in figuur 49. Als de hoeken klein zijn (en in radialen uitgedrukt), dan geldt bij benadering: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$. Leg uit dat zo volgt dat $\lambda \sim r$, waarbij $r$ de diameter is van de ring (figuur 49).
6 Gebruik het verband van vraag 5 om een verband te vinden tussen de impuls $p$ en de golflengte $\lambda$ van de elektronen.
7 Welke eenheid heeft de evenredigheidsconstante tussen $\lambda$ en $p$?
8 Leg met behulp van het experiment met de laser en de tralies uit hoe de ringen tot stand komen.

**Conclusie**

9 Beantwoord de onderzoeksvraag.




▲ **figuur 49** halve openingshoek $\alpha$, straal $r$ van de ring en afstand $L$ tussen grafiet en scherm

## EXPERIMENT 4 De onbepaaldheidsrelatie ‘horen’ (begripspracticum)

**Inleiding**

De onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg speelt ook in andere gebieden van de natuurkunde een rol, bijvoorbeeld bij geluid.
In dit experiment ervaar je wat de betekenis is van de onbepaaldheidsrelatie door middel van een analogie met geluid.

**Onderzoeksvraag**

Welk verband is er tussen de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg en een onbepaaldheidsrelatie voor geluid?

**Benodigdheden**

verschillende knikkers en stuiterballen; meetcomputer met microfoon

**Uitvoering**

- Laat achtereenvolgens verschillende knikkers en stuiterballen op verschillende soorten oppervlakten vallen en neem de tik met de meetcomputer op.
- Omschrijf de klank van het geluid dat je waarneemt.
- Bepaal met de meetcomputer de duur van de tik.
- Bepaal met een frequentieanalyse met de meetcomputer uit welke frequenties de tik bestaat.
- Noteer je meetresultaten in een tabel.

**Verwerking**

1 Er bestaat een onbepaaldheidsrelatie voor geluid: de duur van een geluid en de frequentie van het geluid zijn niet beide welbepaald. De tik duurt erg kort. Welke grootheid is dan bepaald? Welke grootheid is dan niet goed bepaald?
2 Controleer of je dit terugziet in je meetgegevens.
3 Welke grootheid bij dit experiment komt overeen met welke grootheid in de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg?

**Conclusie**

4 Beantwoord de onderzoeksvraag.

## ONDERZOEK Quantum eraser

**Inleiding**
Met het dubbelspleet-experiment is het golfkarakter van fotonen en elektronen aan te tonen. Ook wanneer er individuele quantumdeeltjes door de dubbelspleet gaan, ontstaat er een interferentiepatroon. De conclusie is dat de quantumdeeltjes als golf door de dubbelspleet gaan en dat de golven uit de twee afzonderlijke spleten met elkaar interfereren. Als je de quantumdeeltjes toch hardnekkig als klassieke deeltjes wilt beschouwen, dan kun je je afvragen door welke opening de deeltjes nu eigenlijk gaan.
In dit onderzoek bouw je een opstelling zodat je informatie krijgt over de weg die fotonen in het dubbelspleet-experiment hebben afgelegd. Je kijkt vervolgens wat er met het interferentiepatroon gebeurt.

**Onderzoeksvragen**
**1** Wat gebeurt er met het interferentiepatroon in het dubbelspleet-experiment wanneer er informatie is over de weg die de fotonen hebben afgelegd?
**2** Hoe is de uitkomst van dit experiment te begrijpen met de beschrijving van fotonen door een golffunctie?

**Praktisch**
De uitvoering van dit onderzoek vergt enige voorbereiding en voorstudie. Je docent kan je meer informatie geven.

**Veiligheid**
Ook voor dit onderzoek gebruik je weer een laser. Kijk **nooit** in een laserstraal, speel **nooit** met een laser en schijn **nooit** met een laser op andere mensen. Er kan onherstelbare beschadiging van de ogen optreden.

**Conclusie**
Beantwoord de onderzoeksvragen.




HOOFDSTUK 13

# Gravitatie

Door de zwaartekracht kost het veel energie om satellieten in een baan om de aarde te brengen. De aantrekkingskracht van de maan is een stuk kleiner dan die van de aarde. Dat komt doordat de massa van de maan veel kleiner is. Zwaartekracht is een bijzonder geval van de aantrekkingskracht die alle massa's op elkaar uitoefenen: de gravitatiekracht. Dat is de kracht die de banen bepaalt van planeten in ons zonnestelsel, de beweging van sterren in de Melkweg en van sterrenstelsels in het heelal.

## Praktijk



## Theorie



## Maatschappij

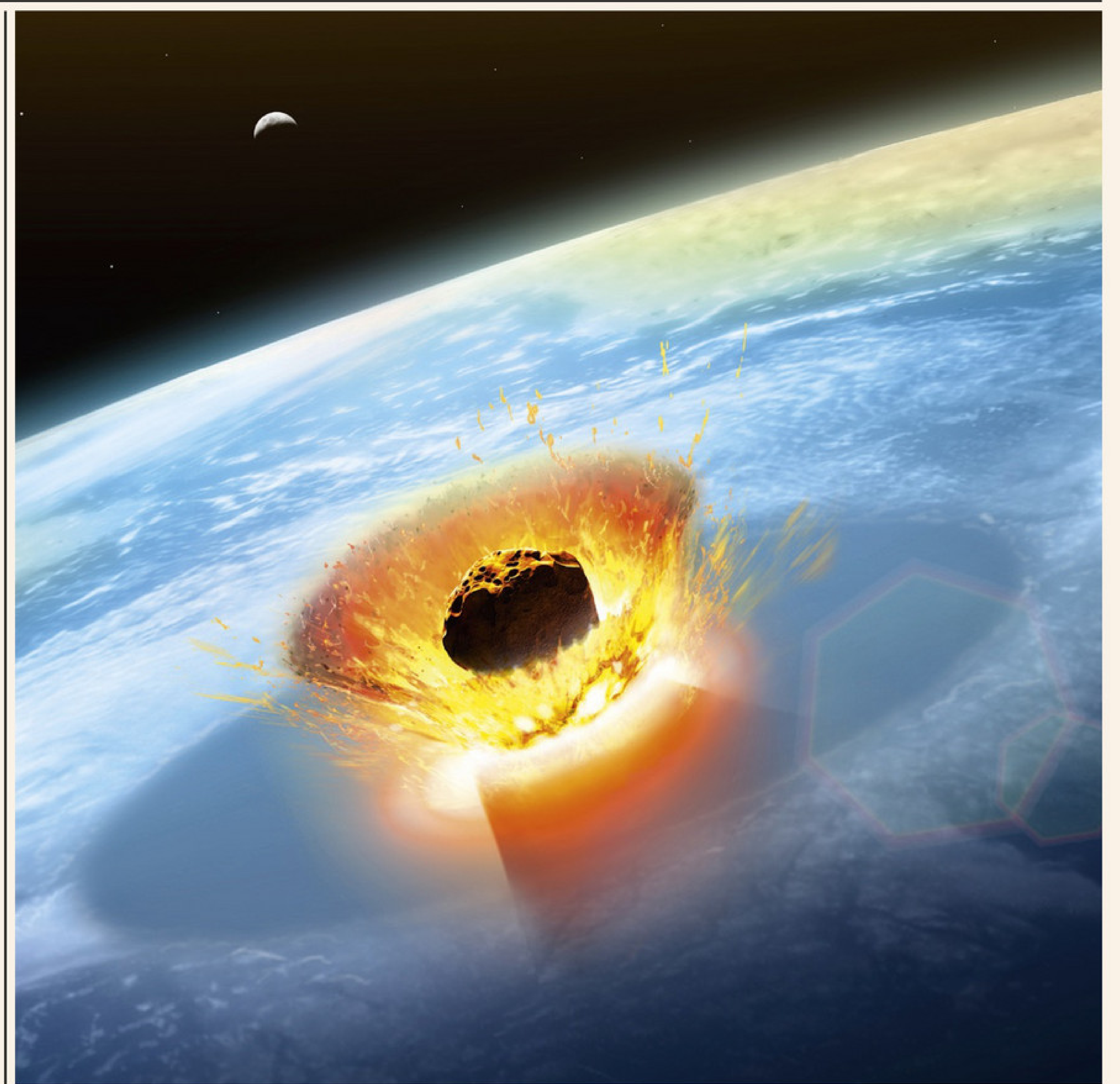
Satellieten: met ESTEC de ruimte in
Ruimtevaart: nut en noodzaak

**Maak de online Voorkennistoets voordat je aan dit hoofdstuk begint.**

Praktijk

# Kosmisch biljart

65 miljoen jaar geleden is de aarde getroffen door een planetoïde of komeet. Het staat vrijwel vast dat daardoor de dinosauriërs zijn uitgestorven. De aarde wordt regelmatig door kleinere en grotere brokstukken geraakt, maar meestal veroorzaken ze geen schade. De samenstelling van deze brokstukken kan ons veel vertellen over de vorming van ons zonnestelsel, de aarde en zelfs over het ontstaan van leven. Misschien kwamen de bouwstenen van het leven op aarde wel mee met deze meteorieten. Veel van dit ruimtepuin bereikt de aarde echter nooit, omdat het verbrandt in de dampkring. Daarom worden er sondes (onbemande ruimtevaartuigen vol meetinstrumenten) naar planetoïden en kometen gestuurd om deze in ongeschonden staat te onderzoeken.

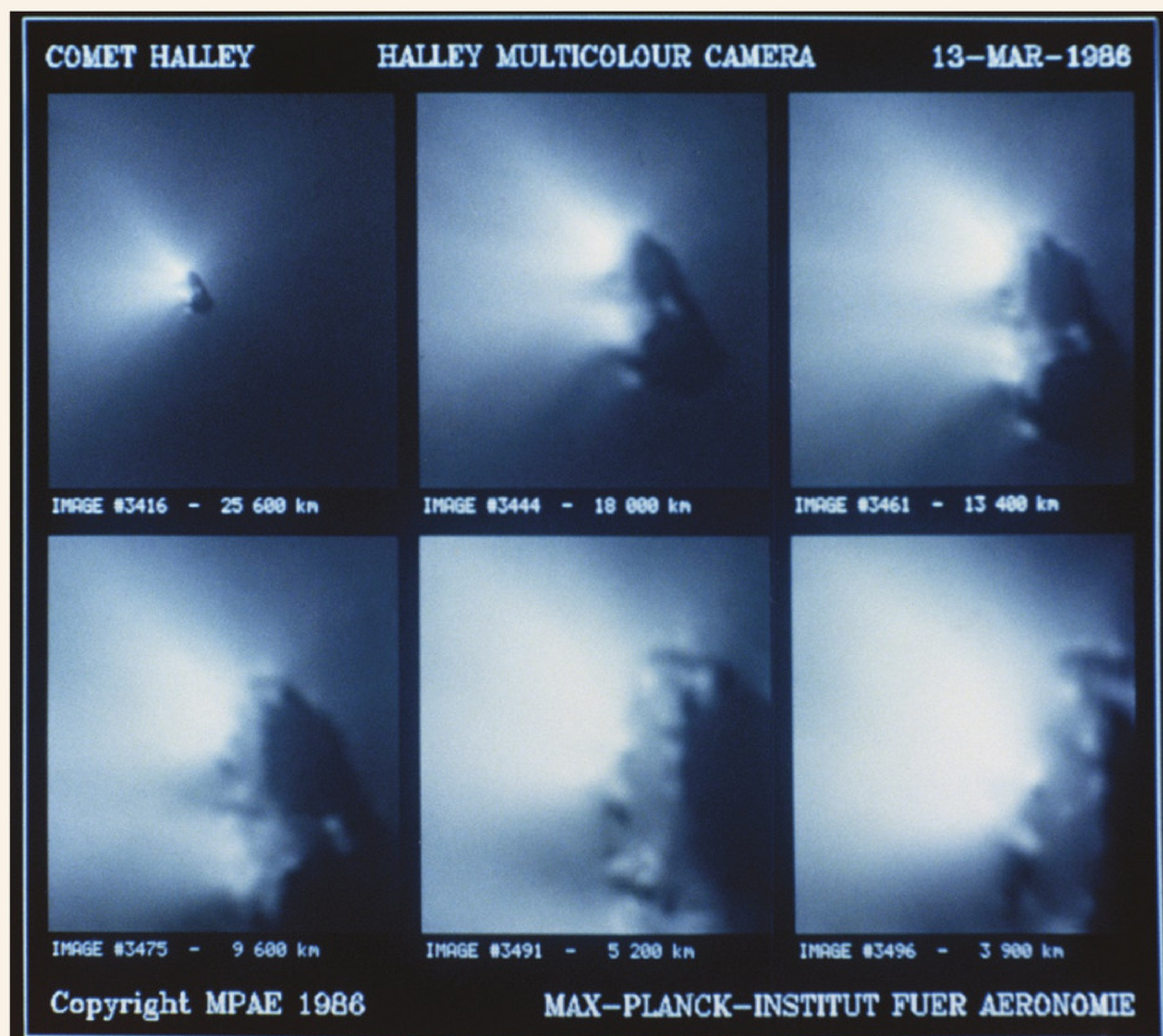


## Schepje planetoïde

Een rover (robotauto) stuitert over het oppervlak en neemt foto's van de planetoïde Ryugu, die slechts een diameter heeft van 1 km. Het klinkt als *sciencefiction*, maar het is precies wat de Hayabusa2-missie van de Japanse ruimtevaartorganisatie JAXA in 2019 voor elkaar heeft gekregen. Ryugu bevindt zich in een baan rond de zon die dicht bij de baan van de aarde ligt. Hayabusa2 bevat drie rovers voor het nemen van foto's en het doen van metingen. Hayabusa2 zelf daalt twee keer af naar de planetoïde voor het nemen van oppervlaktemonsters. Het eerste monster is genomen op 21 februari 2019. Daarna is een kunstmatige krater gecreëerd om materiaal dieper uit de planetoïde vrij te maken. In juli 2019 is Hayabusa2 teruggekeerd naar Ryugu om materiaal mee te nemen uit deze krater. Als de rovers klaar zijn met hun metingen keert Hayabusa2 met de kostbare lading huiswaarts. De verwachting is dat de landing plaatsvindt in december 2020 in Australië, waar de monsters veiliggesteld worden. Bij het schrijven van deze tekst was over die uitkomst nog niets bekend.
Planetoïden als Ryugu, maar ook kometen zijn overblijfselen van het vroege zonnestelsel. Het materiaal waaruit ze bestaan is niet samengeklonterd tot een planeet of maan. Dat is dus ook niet aangetast door biologische of geologische processen. De samenstelling van planetoïden kan daarom een hint bevatten over hoe de aarde is gevormd. Deze objecten bevatten mogelijk ook organische moleculen. Misschien zijn dat zelfs complexere moleculen die van belang kunnen zijn voor de vorming van leven. Als deze bouwstenen na inslagen op aarde terecht zijn gekomen, dan wellicht ook op andere plaatsen in ons zonnestelsel.

## Missies naar kometen

Sinds eind jaren 1970 zijn er verschillende sondes naar kometen gestuurd. Hierdoor is men veel te weten gekomen over de structuur en samenstelling. De meeste kometen bestaan voornamelijk uit ijs, vermengd met verschillende gassen en steen. Dit mengsel vormt de vaste kern. Als de




"Rosetta heeft ons beeld van kometen compleet op z'n kop gezet. Kometen blijken geen stoffige ijsballen; het zijn geologisch complexe werelden."

◀ **figuur 1** opnamen gemaakt door Giotto, op verschillende afstanden van de komeet Halley

komeet dicht bij de zon komt, warmt de kern op. Het gas en de van het steen afkomstige stofdeeltjes komen vrij en het ijs smelt of sublimeert. Dit is goed te zien op de opnamen die de sonde Giotto in 1986 van komeet Halley maakte (figuur 1).

Het gas vormt een soort atmosfeer rond de kern: de coma. Door straling van de zon raakt het gas geïoniseerd en wordt het van de komeet 'afgeblazen'. Dit veroorzaakt de kenmerkende blauwige staart die van de zon afwijst (figuur 2, blauw). Het stof wordt de ruimte in geslingerd en komt in een baan rond de zon terecht. Zo ontstaat een tweede staart (figuur 2, wit).

## 'Oumuamua

De meeste missies hebben met elkaar gemeen dat ze objecten bezoeken met redelijk korte omlooptijden rond de zon. Dat heeft wel als nadeel dat die planetoïden bij elke passage langs de zon zijn aangetast. Soms krijgen astronomen echter interstellaire objecten in het vizier die voor het eerst in de buurt van de zon terechtkomen. In 2017 werd bijvoorbeeld 'Oumuamua ontdekt, Hawaïaans voor verkenner. Dit object is alweer op weg ons zonnestelsel te verlaten. Het heeft veel vragen opgeroepen. Voor het bestuderen van dit soort objecten wil de ESA de *Comet Interceptor*-missie lanceren in 2028. Een sonde wordt in een stabiele baan in de buurt van de aarde gebracht waar het zijn doel afwacht. Als er een nieuwe 'Oumuamua voorbijtrekt, komt de sonde in actie.

## Rosetta-missie

De Rosetta-missie, gelanceerd op 2 maart 2004, overtrof alle voorgaande missies: het doel was om de code van het leven te 'ontcijferen'. Deze missie is vernoemd naar de eeuwenoude Steen van Rosetta, waarop in drie verschillende, antieke schriften dezelfde tekst staat gegraveerd.
In 1822 konden Thomas Young en Jean-François Champollion het hiërogliefenschrift van de Egyptenaren ontcijferen met behulp van de Steen van Rosetta.

Rosetta was de eerste sonde die óp een komeet zou landen. Er werd gekozen voor komeet 67P, ofwel Tsjoerjoemov-Gerasimenko, die in 6,6 jaar in een ellipsvormige baan rond de zon draait. Door slim gebruik te maken van de aantrekkingskracht van planeten, waaronder de aarde zelf, bouwde de sonde extra snelheid op (figuur 3). Elke manoeuvre die Rosetta langs een planeet moest sturen, vergde maanden voorbereidingstijd.

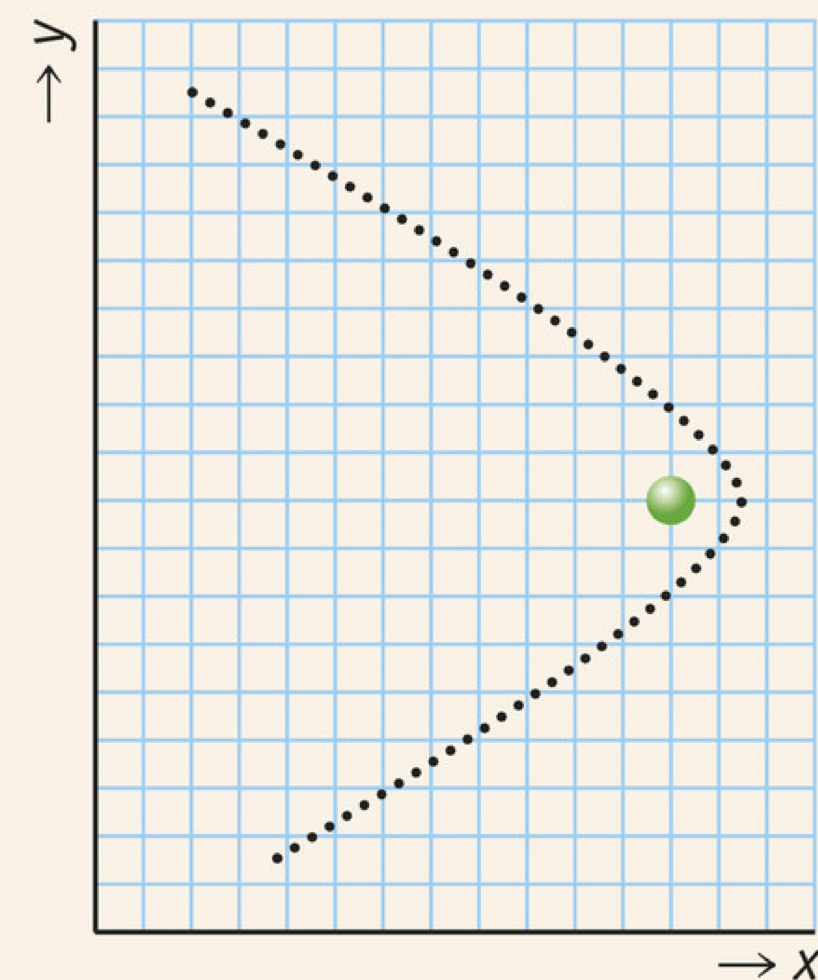
Na ingeplande bezoeken langs twee planetoïden, Šteins in 2008 en Lutetia in 2010, werd Rosetta op 8 juni



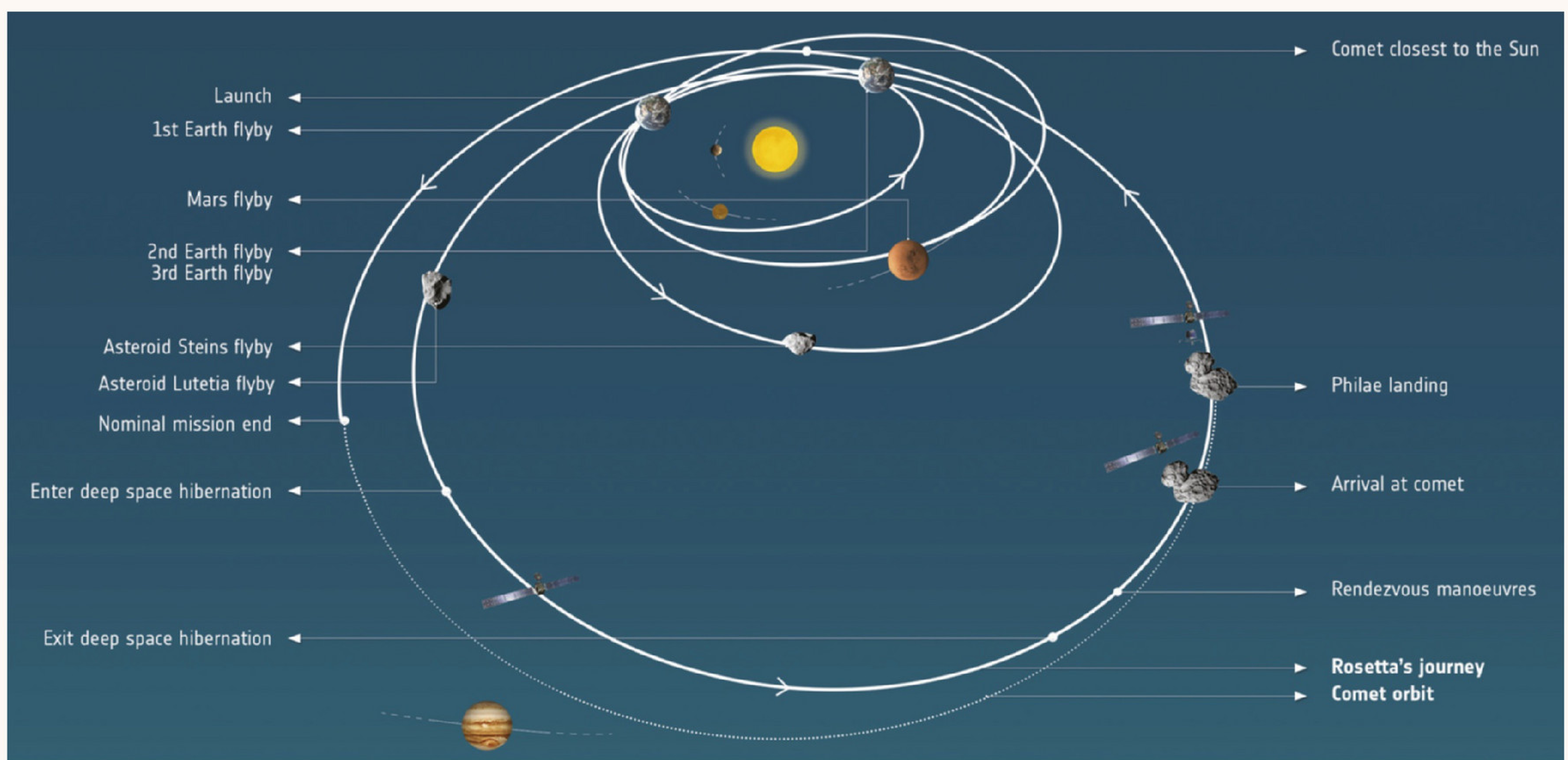
▲ **figuur 2** de komeet Hale-Bopp, waargenomen in 1997 (volgende verschijning in 4377)

2011 in een diepe 'slaap' gebracht om de batterijen te sparen. Bijna drie jaar later, op 20 januari 2014, werd Rosetta weer uit deze slaap gewekt om in een baan te worden gebracht rond Tsjoerjoemow-Gerasimenko. Door de zeer zwakke aantrekkingskracht van de komeet is dat niet gemakkelijk. Met stuurraketten moest Rosetta steeds bijsturen om er niet 'voorbij' te vliegen. Dit was ook het moment om een geschikte landingsplaats te zoeken voor de robotlander Philae.
De landing van Philae werd geplaagd door tegenvallers. De *thrusters* die de lander op de komeet moesten drukken, bleken niet te werken. Ook de harpoenen die de lander hadden moeten verankeren, faalden. Tot overmaat van ramp stuiterde Philae een paar keer op het oppervlak van de komeet en kwam in een schaduwrijke kuil terecht. De zonnecellen van de lander, die een lange missie mogelijk hadden moeten maken, ontvingen daardoor onvoldoende zonlicht om de batterijen op te laden. Philae had toen slechts drie dagen om het wetenschappelijke programma af te werken. Ook toen Tsjoerjoemow-Gerasimenko dichter bij de zon kwam, bleef Philae in de schaduw liggen.

Ondanks deze tegenvaller wordt de Rosetta-missie als een succes gezien. Voor het eerst zijn metingen uitgevoerd vanaf het oppervlak van een komeet. Uit een eerste analyse is gebleken dat er organische moleculen op de komeet zijn. Dat ondersteunt de hypothese dat een deel van de organische moleculen op aarde afkomstig kan zijn van kometen en planetoïden. Dit zijn puzzelstukjes in het ontcijferen van de steen des levens.




▲ **figuur 4** baan van verkenner in model 1




▲ **figuur 3** de lange reis van Rosetta

## Asteroïde, planetoïde en komeet

In ons zonnestelsel draaien verschillende soorten objecten rond de zon die kleiner zijn dan planeten en manen. Het zijn overblijfselen van de begintijd van het zonnestelsel: samengeklonterde stofdeeltjes van waterijs en rotsachtig materiaal. Aan de nachtelijke hemel lijken sommige van deze objecten op sterren, waardoor ze voorheen asteroïde (sterachtig) werden genoemd. Maar het zijn dus eerder planeetachtige objecten: planetoïden. Sommige bevatten zoveel water dat ze een staart vormen als ze dicht bij de zon zijn. Ze werden kometen genoemd, naar het Latijnse woord *coma* voor 'haar'. Omdat het onderscheid tussen planetoïden en kometen niet altijd duidelijk te maken is, heeft de Internationale Astronomische Unie de term 'klein zonnestelselhemellichaam' ingevoerd.

## Opdrachten

Bestudeer eerst de theorie van dit hoofdstuk voor je de volgende opdrachten uitvoert.

**1** Rosetta en Giotto

Rosetta is op 2 maart 2004 vanaf de ESA-basis in Kourou (Frans-Guyana) gelanceerd door een Ariane-5-raket.

**a** Noem twee voordelen van een lanceerbasis in de buurt van de evenaar.

**b** Beredeneer in welke richting een raket bij voorkeur wordt afgeschoten: oost, west, noord of zuid.

Tijdens de lancering van Rosetta bereikte de Ariane-5-raket op een hoogte van 600 km een snelheid van 10 410 m $s^{-1}$. Rosetta werd daarna in een interplanetaire baan gebracht.

**c** Leg uit waarom de behaalde snelheid van de Ariane-5-raket niet zo groot hoeft te zijn als de ontsnappingssnelheid op aarde.

De ruimtesonde Giotto werd eerst in een geostationaire baan gebracht.

**d** Geef de definitie van een geostationaire baan.

**e** Leg uit welk voordeel het heeft om een satelliet juist vanaf Kourou in een geostationaire baan te brengen. Dit is een ander voordeel dan dat van opdracht a.

**f** Bereken op welke hoogte van het aardoppervlak een geostationaire baan ligt. Geef je antwoord in twee significante cijfers.

**2** Zwaartekrachtslinger

Veel interplanetaire sondes maken gebruik van een zogenoemde zwaartekrachtslinger (*gravity assist*) om extra snelheid op te bouwen. Sanne en Christy bestuderen de zwaartekrachtslinger. Daartoe stellen zij drie verschillende modellen op.
In model 1 beweegt de verkenner om een stilstaande planeet (figuur 4 op pagina 68).

Christy beweert dat er uiteindelijk snelheidswinst ontstaat doordat de verkenner naar de planeet toe steeds sneller gaat.

**a** Leg uit waarom Christy geen gelijk heeft.

Om uiteindelijk snelheidswinst te boeken is het noodzakelijk dat de planeet zelf een snelheid heeft. Dit bestuderen ze in model 2. Als eerste berekenen ze dat de snelheid $v_J$ van Jupiter in zijn baan om de zon gelijk is aan $1{,}3 \cdot 10^4$ m $s^{-1}$.

**b** Laat dit zien met een berekening.

In model 2 stellen Sanne en Christy dat Jupiter een snelheid heeft in de negatieve *x*-richting (figuur 4). De snelheid van de verkenner vóór de passage noemen ze $v_{voor}$, de snelheid ná de passage noemen ze $v_{na}$. Model 2 levert eindsnelheden die je kunt berekenen met de volgende formules:

$v_{na,x} = 2v_J - v_{voor,x}$ (1)

$v_{na,y} = v_{voor,y}$ (2)

De verkenner haalt maximale winst aan kinetische energie als hij op de heenweg tegen de bewegingsrichting van de planeet in beweegt.

**c** Leg met behulp van vergelijkingen (1) en (2) uit waarom dit zo is.

De snelheidswinst ontstaat door het overdragen van de kinetische energie van de planeet op de verkenner. De snelheidsverandering van Jupiter daarbij is echter niet merkbaar.

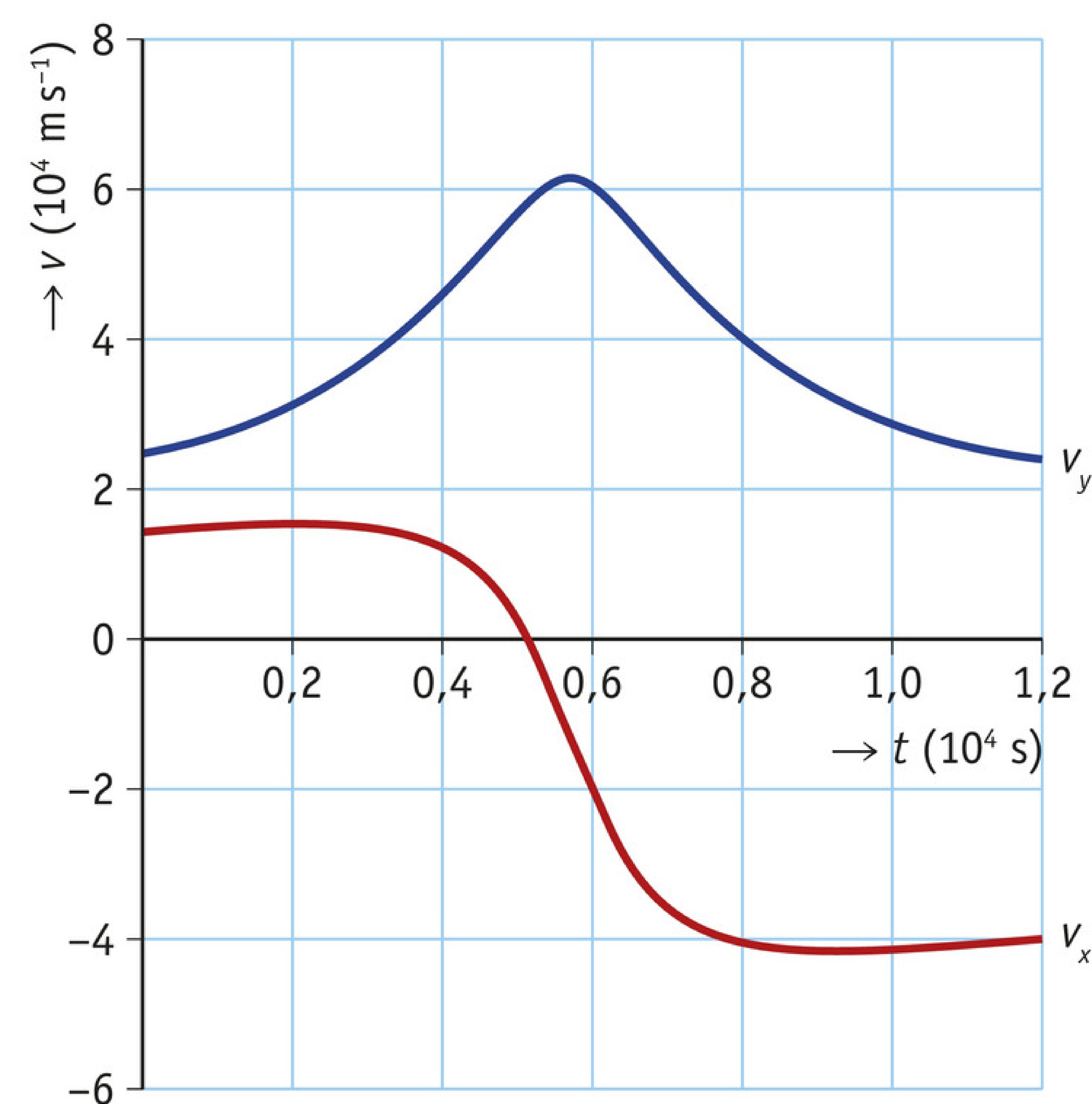
**d** Leg dit uit.

Model 3 is een computermodel. De snelheden die volgen uit dat model staan in figuur 5.

**e** Laat met behulp van een berekening zien dat de uitkomst van het computermodel overeenkomt met vergelijkingen (1) en (2).

**f** Laat met een berekening zien of de eindsnelheid voldoende is om uit het zonnestelsel te ontsnappen. Bepaal daartoe eerst de eindsnelheid $v_{na}$ die uit figuur 5 volgt.

*naar: examen 2016-II*




▲ **figuur 5** snelheid in de *y*- en *x*-richting van de verkenner als functie van de tijd

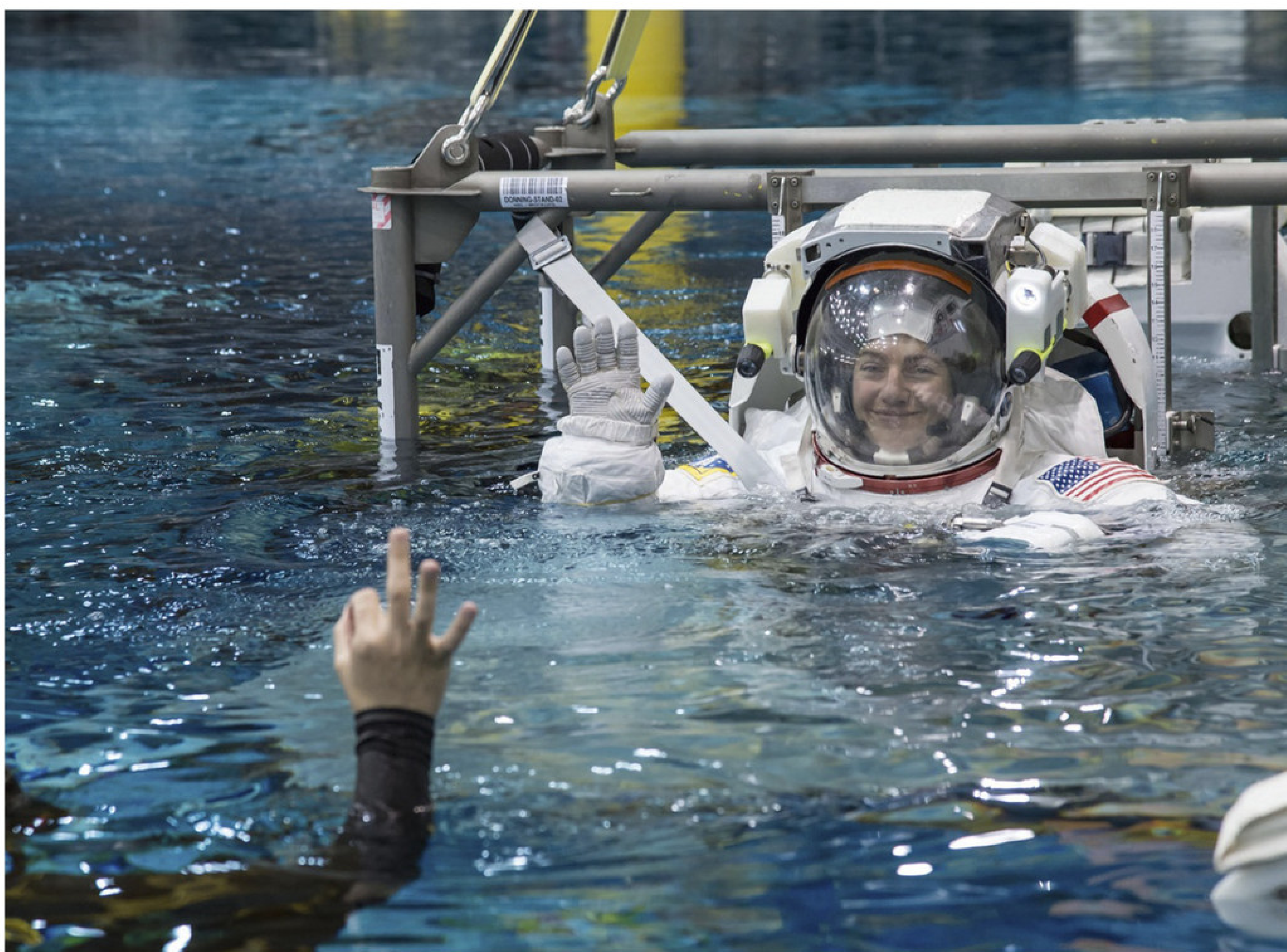
# 1 Gravitatiekracht

In deze paragraaf leer je:
- uitleggen dat elke massa wordt aangetrokken door alle andere massa's in het heelal;
- berekeningen uitvoeren en redeneren met de gravitatiekracht;
- uitleggen hoe de valversnelling aan het planeetoppervlak afhangt van de massa en de straal van de planeet.

De aarde oefent op elke kilogram een zwaartekracht uit van 9,8 N, de maan slechts 1,6 N. Dit is duidelijk te zien op de beeldopnamen van astronauten die zich op de maan voortbewegen. Er is dus een verschil in zwaartekracht op de aarde en op de maan. De 'zwaartekracht' is geen fundamentele kracht, maar een bijzonder geval van de gravitatiekracht: de aantrekkingskracht die massa's op elkaar uitoefenen. De gravitatiekracht is ook de kracht die de maan in een baan om de aarde houdt en de aarde in een baan om de zon.

## Zwaartekracht en gravitatiekracht

Je bent gewend aan de kracht die de aarde op jou en alle andere voorwerpen om je heen uitoefent: de **zwaartekracht**. De grootte van de zwaartekracht hangt af van de massa waarop deze werkt: $F_z = m \cdot g$. Hierbij is $g$ de **zwaartekrachtconstante** of **valversnelling**. De zwaartekrachtconstante is verschillend voor verschillende hemellichamen. Zo geldt gemiddeld in Nederland $g = 9{,}81$ m s$^{-2}$ en op de maan $g = 1{,}62$ m s$^{-2}$. De zwaartekracht op een kilogram is op de maan dus zes keer zo klein als die op aarde. Dit verschil in zwaartekrachtconstante is voor astronauten goed merkbaar (figuur 1).



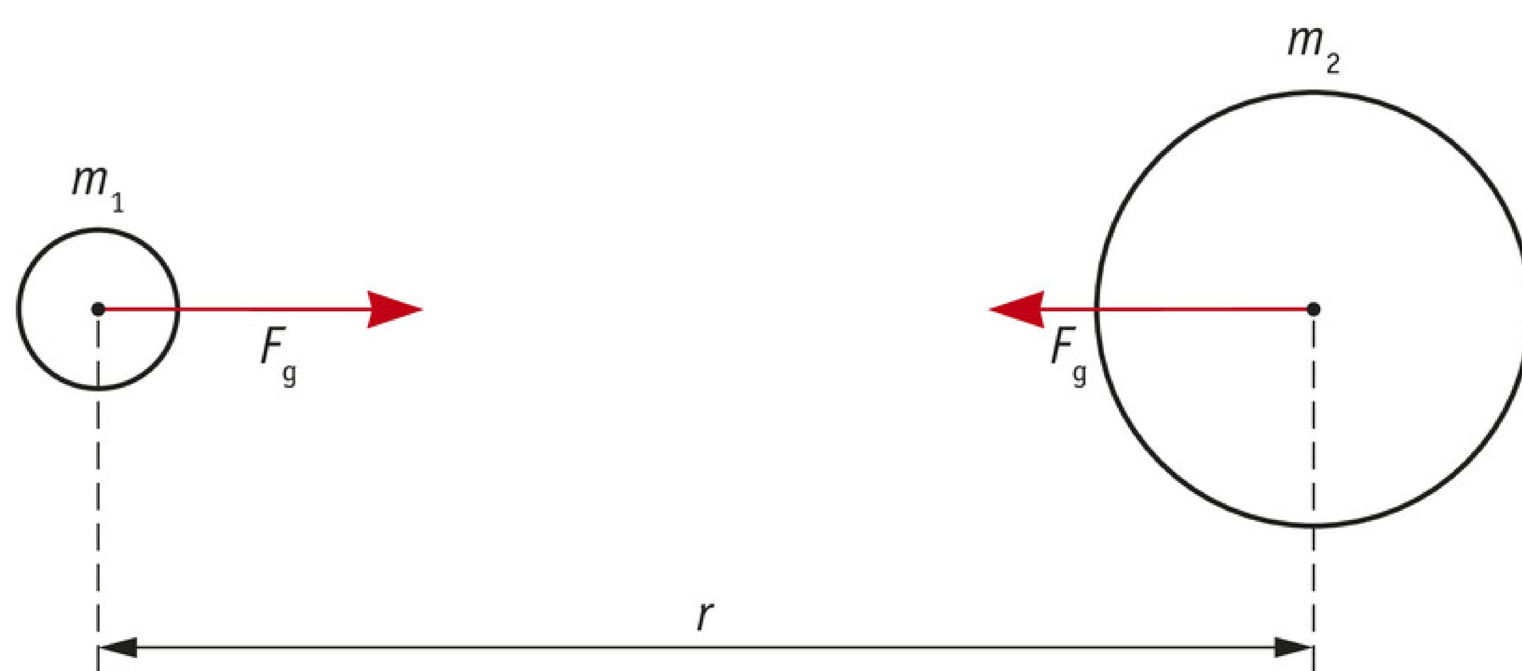
▲ **figuur 1** Jessica Meir, astronaute in opleiding, oefent in een zwembad om gewichtloosheid te simuleren.

Er is niets bijzonders aan de kracht die de aarde op massa's uitoefent: alle massa's trekken elkaar aan. Je merkt daar meestal niets van: twee stoelen in een lokaal trekken elkaar aan, maar die kracht is volkomen te verwaarlozen ten opzichte van de aantrekkingskracht van de aarde op die stoelen. De aantrekkingskracht tussen massa's onderling wordt **gravitatiekracht** genoemd. Zwaartekracht is dus een bijzonder soort gravitatiekracht en wel de kracht tussen een hemellichaam en de massa's die zich op het oppervlak van dat hemellichaam bevinden. De gravitatiekracht tussen twee voorwerpen hangt af van de massa's van die voorwerpen.

Hoe groter de massa, hoe groter de gravitatiekracht. Ook de afstand tussen de massa's is van belang. Dat merk je al aan de maan en de aarde: wij worden niet merkbaar door de maan aangetrokken doordat we er zo ver van verwijderd zijn. Hetzelfde effect ken je van de aantrekking (of afstoting) tussen twee elektrische ladingen (hoofdstuk 8).
De gravitatiekracht tussen twee massa's $m_1$ en $m_2$ wordt gegeven door Newtons gravitatiewet:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Hierin is:
- $F_g$ de gravitatiekracht in newton (N);
- $G$ de gravitatieconstante;
- $m_1$ en $m_2$ de massa in kilogram (kg);
- $r$ de afstand tussen de zwaartepunten van de twee massa's in meter (m).




▲ **figuur 2** de gravitatiekracht tussen twee massa's

Een nauwkeurige waarde voor $G$ vind je in Binas tabel 7. De afstand $r$ in de formule is de afstand tussen de massamiddelpunten van de twee massa's (figuur 2). In Binas wordt de formule voor gravitatiekracht gegeven met het symbool $m$ voor de kleinere en $M$ voor de grotere massa.

## Een zwakke kracht

De gravitatiekracht lijkt een sterke kracht. Op aarde is het de kracht die we dagelijks voelen en dankzij deze kracht draait de aarde om de zon. Toch is het maar een zwakke kracht als je hem vergelijkt met de coulombkracht voor ladingen.

### Voorbeeldopgave 1

Twee protonen bevinden zich op 1,0 m afstand van elkaar.

**a** Bereken de grootte van de elektrische kracht tussen de protonen.

Stel dat twee even grote massa's bestaande uit koolstofatomen zich ook op 1,0 m afstand van elkaar bevinden.

**b** Bereken uit hoeveel koolstofatomen elk van de massa's moet bestaan als de gravitatiekracht even groot is als de elektrische kracht berekend bij opgave a.

**c** Noem een belangrijk verschil tussen de kracht die twee protonen op elkaar uitoefenen en de kracht die de twee massa's op elkaar uitoefenen.

*Uitwerking*

**a** Formule:

$$F_{el} = f \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Gegevens:
$q_1 = q_2 = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

$f = 9{,}0 \cdot 10^9$ N m$^2$ C$^{-2}$
$r = 1{,}0$ m

$$F_{el} = 9{,}0 \cdot 10^9 \times \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{1{,}0^2} = 2{,}3 \cdot 10^{-28} \text{ N}$$

**b** Stel de gravitatiekracht $F_g$ gelijk aan het antwoord bij opgave a.
Formule:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Gegevens:
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m$^2$ kg$^{-2}$
$m_1 = m_2 = m$
$M_C = 12$ g mol$^{-1}$
$r = 1{,}0$ m
$F_g = 2{,}3 \cdot 10^{-28}$ N

$$2{,}3 \cdot 10^{-28} = G \cdot \frac{m^2}{r^2}$$

$$m^2 = 2{,}3 \cdot 10^{-28} \cdot \frac{r^2}{G}$$

$$m^2 = 2{,}3 \cdot 10^{-28} \times \frac{1{,}0^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 3{,}45 \cdot 10^{-18}$$

$$m = \sqrt{3{,}4 \cdot 10^{-18}} = 1{,}86 \cdot 10^{-9} \text{ kg} = 1{,}86 \cdot 10^{-6} \text{ g}$$

$$n = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-6}}{12} = 1{,}55 \cdot 10^{-7} \text{ mol} = 9{,}3 \cdot 10^{16} \text{ (koolstofatomen)}$$

**c** De elektrische kracht tussen de twee protonen is afstotend, de gravitatiekracht tussen de twee massa's is aantrekkend.

Uit voorbeeldopgave 1 blijkt dat je veel massa nodig hebt om iets van de gravitatiekracht te merken. En dat is nu juist het geval in bijvoorbeeld het zonnestelsel: zon, aarde, maan en planeten hebben een flinke massa vergeleken met die van een mens. Bovendien is er alleen een *aantrekkende* gravitatiekracht en niet een afstotende, zoals wel het geval is bij de elektrische kracht. Daardoor merk je meestal maar weinig van die laatste kracht: de meeste voorwerpen hebben evenveel positieve als negatieve ladingen in zich en zijn netto ongeladen.

## Valversnelling

Aan het aardoppervlak noem je de kracht van de aarde op een massa zwaartekracht. Omdat de zwaartekracht te zien is als de aantrekking tussen twee massa's (de aarde en het voorwerp), moet er aan het oppervlak gelden: $F_z = F_g$. Hieruit volgt een uitdrukking voor de valversnelling.

**Voorbeeldopgave 2**

**a** Leid een uitdrukking af voor de valversnelling door gebruik te maken van het feit dat $F_z = F_g$.
**b** Gebruik de bij opgave a gevonden uitdrukking om een waarde van $g$ voor de aarde te vinden.

*Uitwerking*

**a** Formules:

$F_z = m \cdot g$

$F_g = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Gegevens:

$r = r_{aarde}$ (straal van de aarde)

$m_1 = m_{aarde}$

$m_2 = m$

$F_z = F_g$

$m \cdot g = G \cdot \dfrac{m \cdot m_{aarde}}{r_{aarde}^2}$

Deel nu links en rechts door *m*:

$g = G \cdot \dfrac{m_{aarde}}{r_{aarde}^2}$

Dit is het gevraagde antwoord.

**b** Formule:

$g = G \cdot \dfrac{m_{aarde}}{r_{aarde}^2}$

Gegevens:

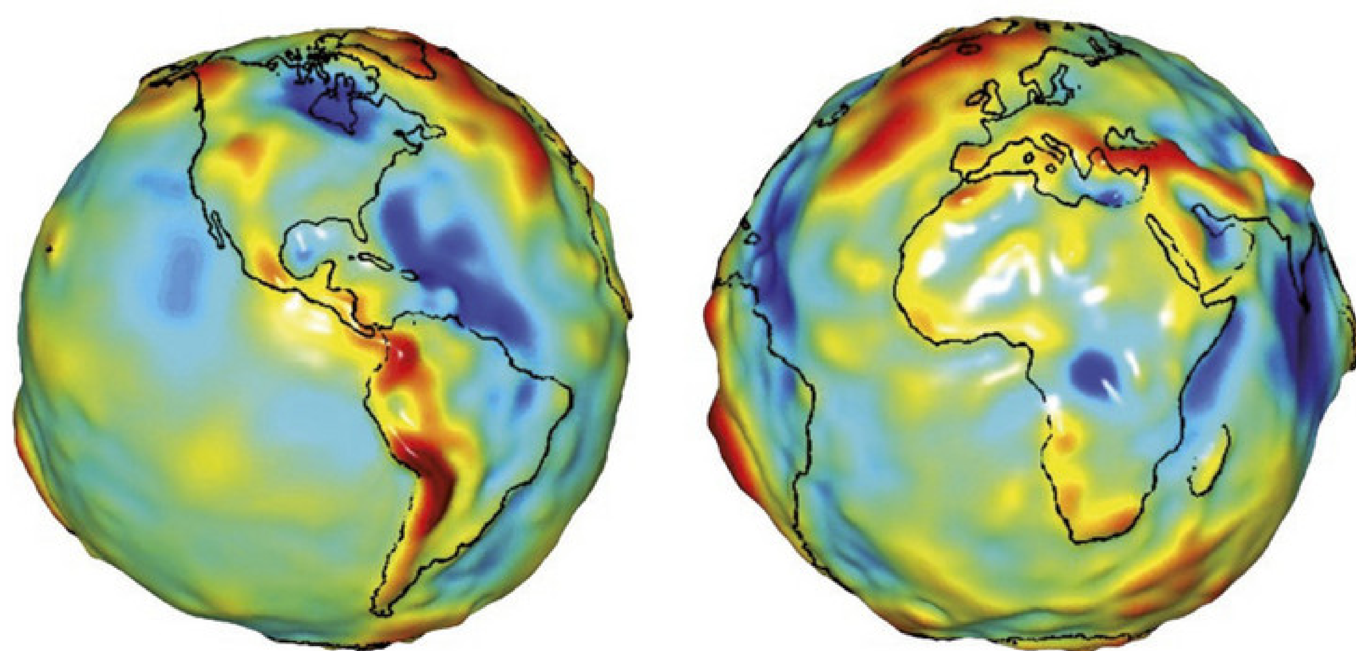
$G = 6{,}673\ 84 \cdot 10^{-11}$ N m$^2$ kg$^{-2}$

$m_{aarde} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg (Binas tabel 31)

$r_{aarde} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m (Binas tabel 31)

$g = 6{,}673\ 84 \cdot 10^{-11} \times \dfrac{5{,}972 \cdot 10^{24}}{(6{,}371 \cdot 10^6)^2} = 9{,}819$ m s$^{-2}$

De berekening in voorbeeldopgave 2 kun je ook toepassen op andere hemellichamen, zoals planeten of manen van planeten.
De waarde voor *g* die je in voorbeeldopgave 2 hebt gevonden, komt heel dicht bij de waarde die in Binas tabel 31 staat. In Binas tabel 30B vind je voor verschillende plaatsen op aarde andere waarden voor *g*. De berekende waarde en de waarden uit Binas wijken van elkaar af doordat in de berekening voor *g* gebruik is gemaakt van de straal van de aarde aan de evenaar en er is geen rekening gehouden met het feit dat de aarde draait.
Door op aarde heel nauwkeurig de valversnelling te meten, kan informatie worden verkregen over de samenstelling van de aarde (figuur 3), bijvoorbeeld of er ergens mogelijk gas in de bodem zit, of juist ijzererts. Hierover heb je meer kunnen lezen in hoofdstuk 6.



▲ **figuur 3** Afwijkingen van de zwaartekracht ten opzichte van de zwaartekracht van een geheel gladde en homogene aarde: rood geeft aan dat de zwaartekracht sterker is en blauw dat hij zwakker is.

## Onthoud!

- Gravitatiekracht is de aantrekkingskracht tussen massa's onderling.
- Zwaartekracht is de gravitatiekracht van een hemellichaam aan het oppervlak van dat hemellichaam. Er geldt dus: $F_z = F_g$, met $r$ de straal van het hemellichaam. Hieruit volgt de valversnelling of zwaartekrachtconstante van het hemellichaam.
- De valversnelling hangt af van de massa en de straal van het hemellichaam.

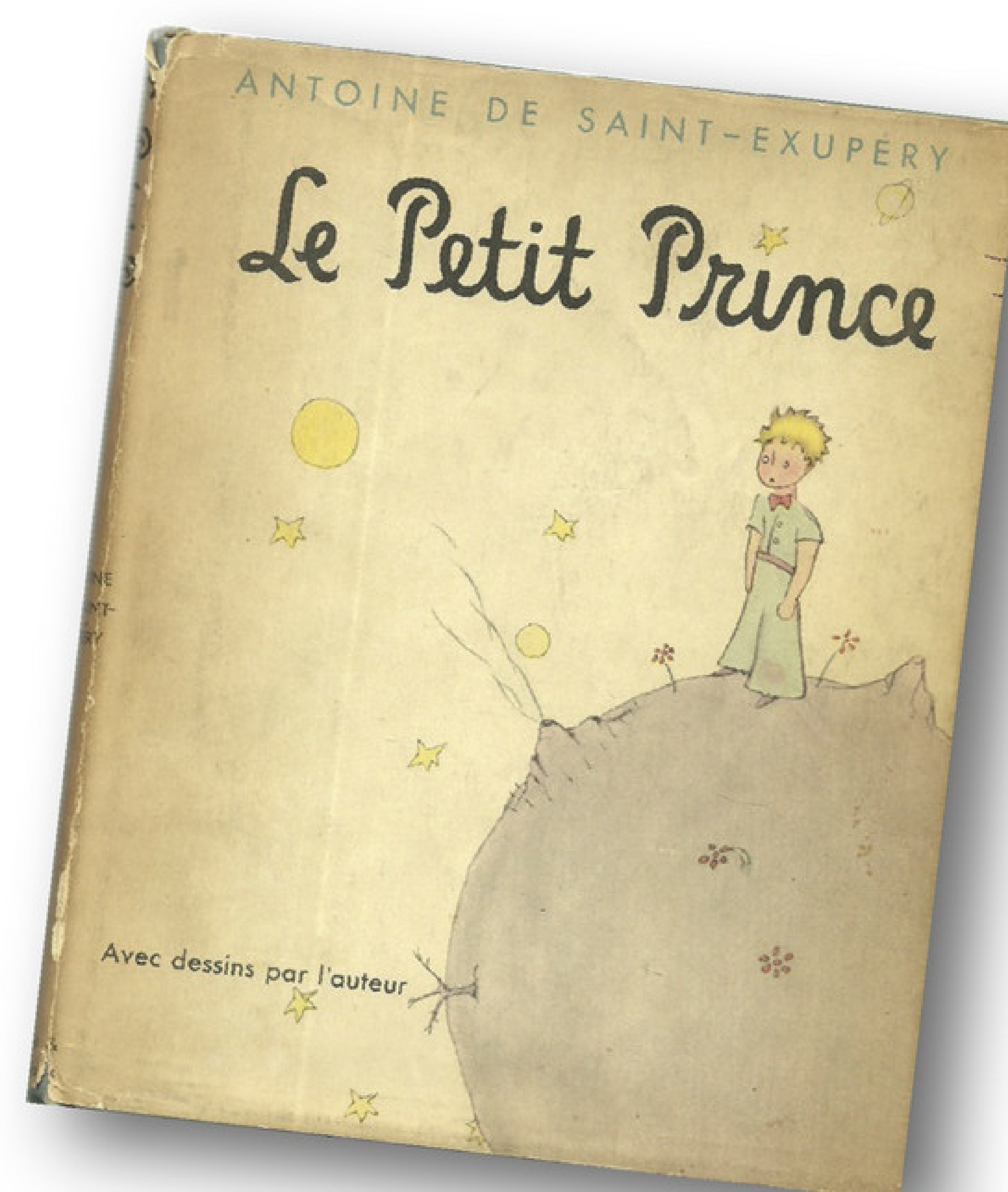
## Opdrachten

**1** Eenheid afleiden
De gravitatieconstante $G$ drukt uit hoe sterk de gravitatiekracht is.
Leid op basis van de formule voor de gravitatiekracht de eenheid van deze gravitatieconstante af. Controleer je antwoord met behulp van Binas.

**2** Gravitatiekracht ordenen
Orden de volgende situaties van kleinste naar grootste gravitatiekracht.
A $m_1 = 1$ kg $m_2 = 1$ kg $r = 1$ m
B $m_1 = 1$ kg $m_2 = 2$ kg $r = 1$ m
C $m_1 = 1$ kg $m_2 = 1$ kg $r = 2$ m
D $m_1 = 1$ kg $m_2 = 2$ kg $r = 2$ m

**3** Gravitatiekracht berekenen
Alle massa's oefenen een gravitatiekracht op elkaar uit.
Bereken voor de volgende situaties de orde van grootte van de gravitatiekracht tussen de twee voorwerpen. Zoek de benodigde gegevens op in Binas.
**a** De zon en de aarde.
**b** De maan en de aarde.
**c** Een astronaut (massa 80 kg) in het International Space Station (ISS) en de aarde; het ISS bevindt zich op een hoogte van 380 km boven het aardoppervlak.
**d** Twee leerlingen (massa 60 kg) die naast elkaar in een klaslokaal zitten op een afstand van 1 m.

**4** *Le Petit Prince*
De Kleine Prins, uit de gelijknamige roman van Antoine de Saint-Exupéry, komt van een kleine 'planeet': de asteroïde B612 (figuur 4). B612 heeft een diameter van slechts 20 m en heeft een dichtheid van $2{,}0 \cdot 10^3$ kg m$^{-3}$.
Bereken de valversnelling aan het oppervlak van B612.




▶ **figuur 4** *Le Petit Prince*

**5** Zwaartekracht of gravitatiekracht?
In eerdere hoofdstukken heb je de formule voor $F_z$ ook gebruikt voor voorwerpen die zich niet op het aardoppervlak bevinden. Die benadering is goed als de hoogte maar niet te groot is.

**a** Leg uit met welke afstand je de hoogte moet vergelijken om te bepalen of de hoogte 'niet te groot' is.

**b** Bereken tot welke hoogte de zwaartekracht minder dan 1% afwijkt van de gravitatiekracht. Gebruik voor de valversnelling de waarde die in voorbeeldopgave 2 is berekend. Geef je antwoord in twee significante cijfers.

**6** Felix Baumgartner

In 2012 vestigde Felix Baumgartner meerdere wereldrecords door vanaf een hoogte van 39,0 km uit de capsule aan een heliumballon te springen (met parachute).

**a** Toon aan dat Baumgartner op die hoogte een versnelling van 9,700 m $s^{-2}$ ondervond.

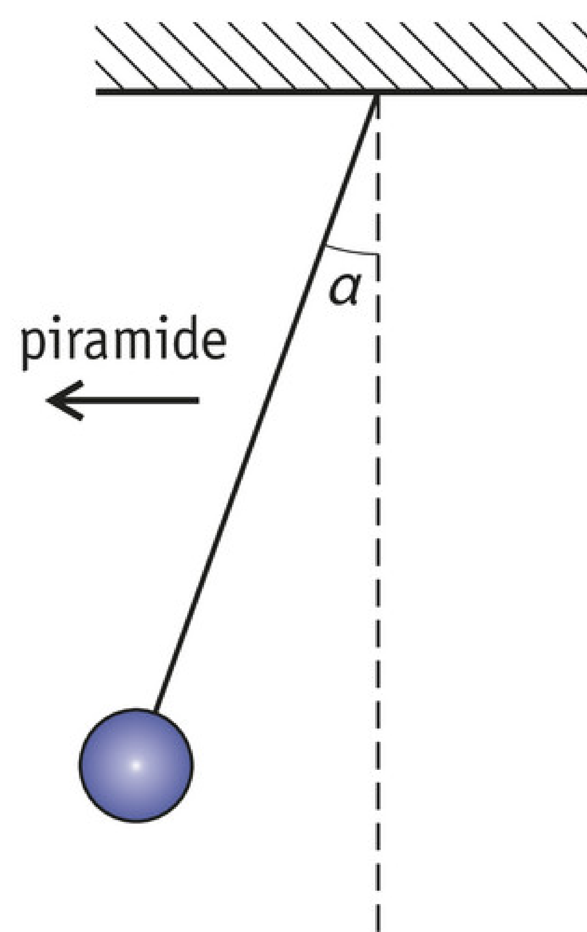
**b** Bereken de hoogte die Baumgartner zou hebben bereikt na 10 s als je de luchtweerstand verwaarloost.

Baumgartner bereikte na een afstand van 36,4 km een maximale snelheid van 1358 km $h^{-1}$. Met een computermodel is deze maximale snelheid te controleren.

**c** Gebruik de modelleercyclus om een computermodel op te stellen van de val van Baumgartner. Controleer met je model de maximale snelheid van Baumgartner. Begin met een model op basis van gravitatiekracht zonder luchtweerstand en voeg later luchtweerstand toe. De dichtheid van de lucht neemt exponentieel af met de hoogte volgens: $\rho = \rho_0 \cdot \exp-\left(\frac{h}{h_0}\right)$, met $\rho_0$ de dichtheid van de lucht op zeeniveau (zie Binas) en $h_0$ = 7,0 km. Neem aan dat Baumgartner (met bepakking) een massa had van 100 kg. Zoek overige gegevens op in Binas of maak daarvoor een schatting.

**7** Gravitatieconstante bepalen

Een toerist die naast de piramide van Cheops staat, wordt een klein beetje door de piramide aangetrokken. Je zou die gravitatiekracht kunnen meten met de opstelling zoals in figuur 5.




▲ **figuur 5** meetopstelling voor de gravitatiekracht

**a** Neem figuur 5 over in je schrift en schets de krachten die op de massa werken.

**b** Toon aan dat voor de hoek $\alpha$ geldt: $\tan \alpha = \frac{G \cdot m}{g \cdot r^2}$, met $m$ de massa van de piramide en $r$ de afstand tot de piramide.

De piramide van Cheops heeft een massa van $6 \cdot 10^9$ kg en de toerist staat op een afstand van 100 m van het massamiddelpunt van de piramide.

**c** Bereken met behulp van het verband bij opdracht b de hoek $\alpha$.

**d** Leg uit of deze meetmethode een nauwkeurige manier is om de gravitatieconstante te bepalen.

**+8** Zwaartekrachtmetingen

Door vanuit een vliegtuig heel nauwkeurig de variatie in de valversnelling te meten, kunnen mineralen in de bodem worden gevonden. De gemeten waarde moet worden teruggerekend naar de waarde die aan het aardoppervlak zou zijn gemeten. De verandering van de valversnelling op een hoogte $h$ ten opzichte van die op zeeniveau $g$ kan worden benaderd door:

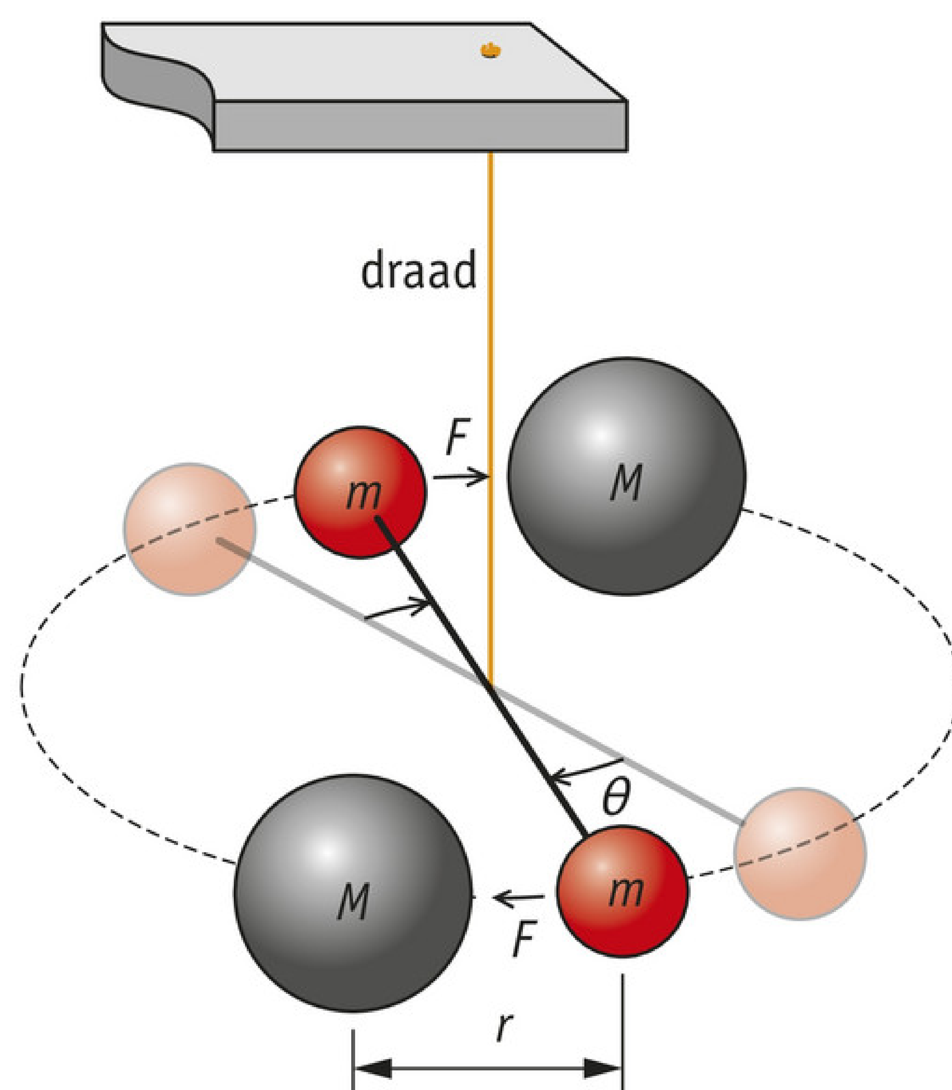
$\delta g_{\text{hoogte}} = -2g \cdot \frac{h}{r}$. Hierin is $r$ de straal van de aarde.

**a** Leg uit dat voor veranderingen van $g$ geldt: $\delta g = g' \cdot h$, waarbij $g'$ de afgeleide is van de uitdrukking voor $g$ uit voorbeeldopgave 2 en $h$ een kleine hoogte is ten opzichte van de straal $r$.

**b** Leid de uitdrukking voor $\delta g_{\text{hoogte}}$ af.

**+9** Henry Cavendish

Eind achttiende eeuw bepaalde Henry Cavendish voor het eerst de sterkte van de gravitatiekracht. Cavendish gebruikte daarvoor de opstelling uit figuur 6, een zogenoemde torsiebalansopstelling. Twee kleine massa's $m$ (0,73 kg) waren aan de uiteinden van een houten balk (1,8 m lang) bevestigd. De houten balk was in het midden opgehangen met een draad. Aan weerszijden van de kleine massa's bevonden zich twee grote, vaste massa's (158 kg). Door de aantrekkingskracht tussen de massa's ging de balans draaien. Er ontstond een terugwerkende kracht in de draad. Door af te lezen hoeveel de balans uit de ruststand werd getrokken, kon Cavendish de sterkte van de gravitatiekracht bepalen.




▲ **figuur 6** torsiebalansopstelling van Cavendish

**a** Leg uit waarom het heel belangrijk is het experiment af te schermen voor luchtstromingen en statische elektriciteit.

Je zou ook de opstelling uit figuur 5 kunnen gebruiken, waarbij een bekende massa aan een koord hangt dat door een andere grote massa uit het lood wordt getrokken.

**b** Leg uit waarom de methode van Cavendish veel gevoeliger is.

De afstand tussen de kleine en de grote massa's bedroeg 23 cm.

**c** Bereken de grootte van de terugwerkende kracht in de draad.

# 2 De derde wet van Newton

In deze paragraaf leer je:
- de derde wet van Newton uitleggen en toepassen;
- de wisselwerking tussen twee massa's analyseren met behulp van de krachten die de voorwerpen op elkaar uitoefenen.

Een ruimtewandeling maken vanuit het ISS is een hachelijke onderneming. Als een astronaut loskomt van het ruimtestation, kan hij niet meer terugkomen: er is niets waar hij zich aan kan vasthouden. Daarom moet de astronaut gezekerd zijn. Satellieten en ruimtesondes kunnen in de ruimte alleen bijsturen met behulp van stuurraketten. Beide effecten hangen samen met de derde wet van Newton.

## Nogmaals de gravitatiekracht

Als je de gravitatiekracht uitrekent die een massa $m_1$ op $m_2$ uitoefent, dan vind je eenzelfde resultaat als wanneer je de gravitatiekracht uitrekent die $m_2$ uitoefent op $m_1$. Deze krachten zijn altijd hetzelfde! Dus de gravitatiekracht van de aarde op de maan is even groot als die van de maan op de aarde. Hetzelfde geldt voor de coulombkracht tussen twee ladingen: de kracht die lading $q_1$ op $q_2$ uitoefent, is altijd even groot als de kracht die $q_2$ op $q_1$ uitoefent. Dit is geen toeval, maar een gevolg van de derde wet van Newton.

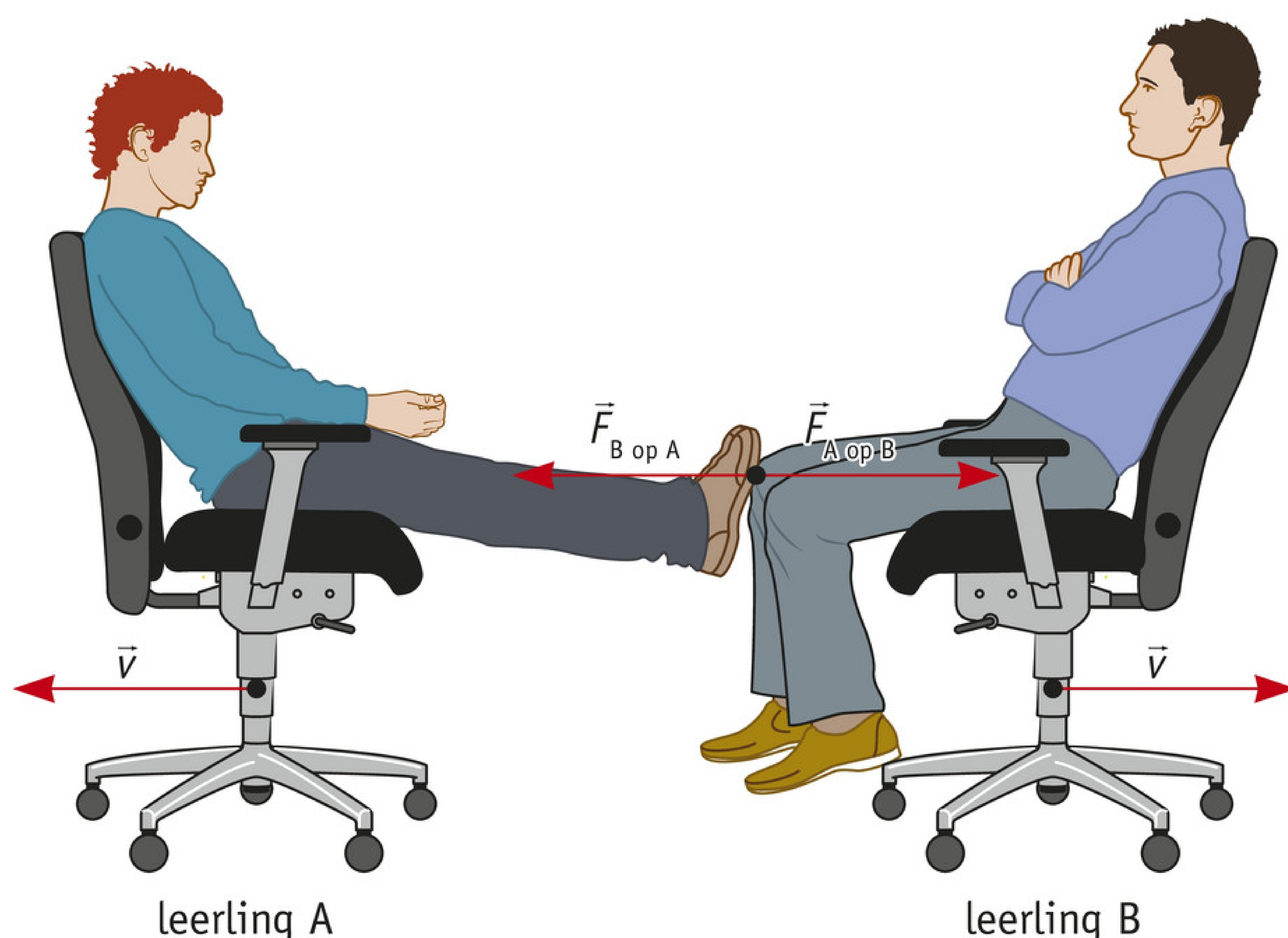
▶ **EXPERIMENT 1** De derde wet van Newton ervaren (begripspracticum)

## Actie en reactie: derde wet van Newton

Je kunt niet met je hand op tafel slaan zonder dat de tafel jou 'terugslaat'. Anders gezegd: je kunt niet een kracht op een voorwerp uitoefenen zonder dat het voorwerp een kracht op jou uitoefent. Dit wordt samengevat in de **derde wet van Newton**:

$$F_{\text{A op B}} = -F_{\text{B op A}}$$

In woorden: de kracht van voorwerp A op voorwerp B is gelijk in grootte, maar tegengesteld gericht aan de kracht van B op A. Dit principe zie je in figuur 7. Hierin duwt leerling A leerling B weg, waardoor hij zelf naar achteren beweegt. De eerste kracht wordt ook wel de **actiekracht** genoemd en het gevolg de **reactiekracht**. Dat is een beetje misleidend: alsof er altijd één kracht een oorzaak is en de andere kracht een gevolg. Als je met je hand op tafel slaat, is dat misschien zo, maar bij gravitatiekracht niet: de maan en de aarde 'trekken' *aan elkaar*.




◀ **figuur 7** de derde wet van Newton

## In de ruimte

Het effect van de derde wet van Newton is in de ruimte goed te zien, omdat daar de gravitatiekracht van de aarde ofwel klein is, ofwel niet merkbaar. Wanneer astronauten die in het ISS 'zweven' iets weggooien, zullen ze zelf de andere kant op bewegen. Dat kan tot problemen leiden wanneer een astronaut dit doet tijdens een ruimtewandeling en zou losraken van het ruimteschip.

**Voorbeeldopgave 3**

Een astronaut (70 kg) bevindt zich in het ISS en oefent gedurende 0,10 s een kracht van 10 N uit op een kist met astronautenvoedsel (10 kg).

**a** Bereken de versnelling van de kist.
**b** Bereken de versnelling van de astronaut.
**c** Bereken de eindsnelheid van zowel de kist als de astronaut.

*Uitwerking*

**a** Formule:
$F_{res} = m \cdot a$
Gegevens:
$F_{res} = 10$ N
$m = 10$ kg

$$a = \frac{F_{res}}{m} = \frac{10}{10} = 1{,}0 \text{ m s}^{-2}$$

**b** Pas eerst de derde wet van Newton toe: de kracht van de kist op de astronaut is gelijk, maar tegengesteld gericht aan de kracht van de astronaut op de kist, dus:

$$a = \frac{F_{res}}{m} = \frac{10}{70} = 0{,}14 \text{ m s}^{-2}$$

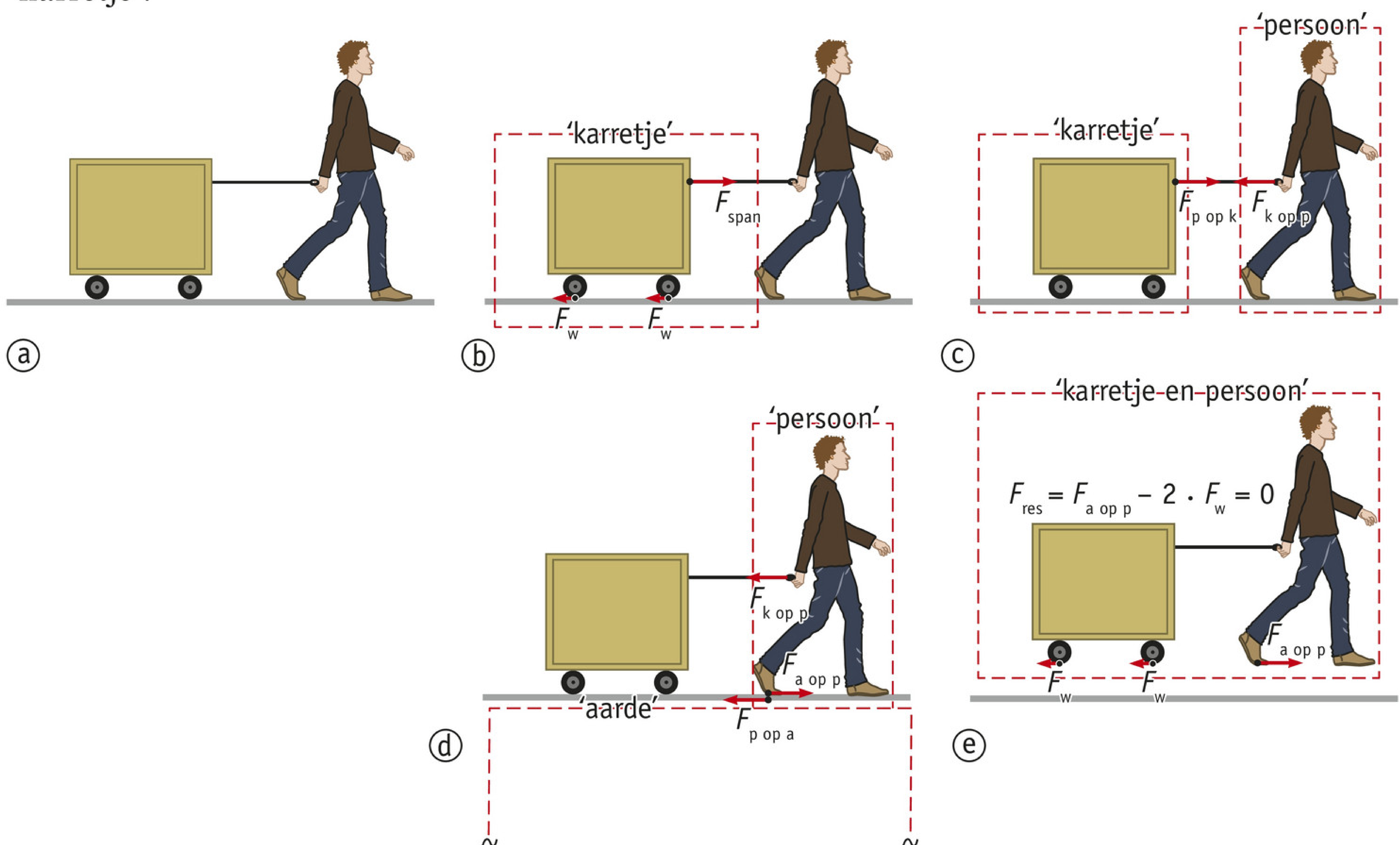
**c** Formule:
$v = \Delta v = a \cdot \Delta t$
Gegevens:
$a_{kist} = 1{,}0$ m s$^{-2}$
$a_{astronaut} = 0{,}14$ m s$^{-2}$
$\Delta t = 0{,}10$ s
$v_{kist} = 1{,}0 \times 0{,}10 = 0{,}10$ m s$^{-1}$
$v_{astronaut} = 0{,}14 \times 0{,}10 = 0{,}014$ m s$^{-1}$

Het effect dat beschreven is in voorbeeldopgave 3, en dus in de derde wet van Newton, wordt gebruikt door raketten en satellieten. De motoren oefenen een kracht uit op een gas, dat hierdoor versnelt. Het gas oefent daardoor ook een kracht uit op de raket of satelliet en die versnelt de andere kant op.

## Systemen en krachtenparen

De eerste en tweede wet van Newton zeggen iets over de krachten op één voorwerp. Als alle krachten op dat ene voorwerp elkaar opheffen, zodat de resulterende kracht gelijk is aan nul, dan is het voorwerp in rust of beweegt het eenparig in een rechte lijn (eerste wet). Het doet er hierbij niet toe waar die krachten vandaan komen.

Bij de derde wet kijk je juist naar de wisselwerking *tussen* twee voorwerpen. In de natuurkunde worden die voorwerpen wat abstracter beschreven als twee systemen. Zo zijn de leerlingen in figuur 7 twee systemen die met elkaar wisselwerken. Je kunt dit ook zien aan de naam van de krachten: $F_{\text{A op B}}$ en $F_{\text{B op A}}$. Deze krachten vormen een **krachtenpaar**: je kunt ze niet samenstellen tot een resulterende kracht, omdat ze niet op een en hetzelfde voorwerp werken.
Bij het toepassen van de derde wet is het van belang te weten welke systeemgrenzen je moet trekken. In figuur 8a zie je een persoon die een karretje met constante snelheid voorttrekt. Omdat de snelheid constant is, is de resulterende kracht op het karretje gelijk aan nul: $2F_{\text{w}} = F_{\text{span}}$ (figuur 8b). Je gebruikt de tweede wet van Newton en je hoeft alleen naar het systeem 'karretje' te kijken. Als je wilt weten hoe groot de kracht is waarmee de persoon aan het touw moet trekken, dan moet je andere systeemgrenzen tekenen (figuur 8c). Nu zijn er twee systemen: 'karretje' en 'persoon'. De spankracht is gelijk aan de spierkracht van de persoon. Het is preciezer om deze kracht $F_{\text{p op k}}$ te noemen: de kracht van systeem 'persoon' op systeem 'karretje'.




▲ **figuur 8** karretje, persoon en aarde gezien als verschillende systemen

Volgens de derde wet van Newton moet er een even grote, maar tegengestelde kracht zijn van het karretje op de persoon: $F_{\text{k op p}}$. Als je nu alleen naar het systeem 'persoon' kijkt, dan kan $F_{\text{k op p}}$ niet de enige kracht op de persoon zijn. Dan zou die namelijk naar links versnellen (of afremmen). Er is ook nog een kracht op de persoon van het systeem aarde (figuur 8d). Die komt weer tot stand doordat de persoon een kracht uitoefent op het systeem aarde.
Tot slot kun je het systeem 'karretje en persoon' bekijken (figuur 8e). De krachten uit figuur 8c zijn dan interne krachten geworden: ze zorgen niet voor een versnelling van het systeem. De enige externe krachten (in horizontale richting) zijn de weerstandskrachten op het karretje en de kracht van de aarde op de persoon. De resulterende kracht op het systeem 'karretje en persoon' is nul en het systeem versnelt niet.

## Gewicht en wegen

In het dagelijks taalgebruik zeg je dat voorwerpen een gewicht hebben, maar je hebt het dan meestal over hun massa in kilogram. In de natuurkunde is het **gewicht** van een voorwerp niet hetzelfde als de massa. Het gewicht is de kracht in newton die het voorwerp uitoefent op zijn ondersteuning of ophanging. Ook hier kun je een krachtenpaar onderscheiden. Als het voorwerp op een ondergrond rust, is er niet alleen het gewicht van het voorwerp op de grond,

maar ook de normaalkracht: de kracht van de ondergrond op het voorwerp. Als het voorwerp aan een touw hangt, dan is er behalve het gewicht van het voorwerp ook de spankracht in het touw: de kracht van het touw op het voorwerp.
Gewicht heeft dus wel met massa te maken, maar je kunt de twee niet zomaar verwisselen. Stel je voor dat je in een lift staat die naar beneden versnelt. Jij versnelt dan ook naar beneden. De resulterende kracht op jou is dan naar beneden gericht en ongelijk aan nul. De zwaartekracht op jou is steeds gelijk; die hangt van je massa af. Dan moet de normaalkracht van de lift op jou wel kleiner zijn dan in een stilstaande lift. Volgens de derde wet oefen jij een even grote kracht op de lift uit. Die is dus ook kleiner en daardoor is je gewicht kleiner in een naar beneden versnellende lift. Omgekeerd is je gewicht groter in een naar boven versnellende lift.

### Onthoud!

- De derde wet van Newton stelt dat de kracht die voorwerp A op voorwerp B uitoefent, even groot, maar tegengesteld gericht is aan de kracht die voorwerp B op voorwerp A uitoefent. De krachten worden ook wel actie- en reactiekracht genoemd en vormen een krachtenpaar.
- De krachten in een krachtenpaar heffen elkaar niet op: je kunt ze niet samenstellen tot een resulterende kracht, omdat ze niet op een en hetzelfde voorwerp werken.
- Bij het toepassen van de derde wet van Newton is het belangrijk twee systemen te onderscheiden die krachten op elkaar uitoefenen.
- Gewicht is de kracht die een voorwerp uitoefent op zijn ondersteuning of ophanging.

### Opdrachten

**10** Terug op aarde
Bestudeer voorbeeldopgave 3.
**a** Beschrijf een situatie op aarde waarbij de berekening vrijwel gelijk is.
**b** Hoe verandert de berekening wanneer de kist op de grond staat en je ertegenaan duwt?

**11** Massa’s wegen
Op aarde is de massa van een voorwerp te bepalen door deze aan een veerunster te hangen.
**a** Noem twee grootheden die bekend moeten zijn en noem welke grootheid je moet meten.
**b** Leg uit waarom deze methode van wegen niet werkt in de ruimte.

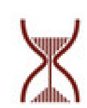
In de ruimte kun je de massa van een voorwerp bepalen met de derde wet van Newton. Hiervoor laat je twee voorwerpen een kracht op elkaar uitoefenen. Dat kan bijvoorbeeld door ze met een elastiek te verbinden, uit elkaar te trekken en ze tegelijk los te laten. Een van de voorwerpen moet een bekende massa hebben.
**c** Leg uit dat de kracht die de massa’s op elkaar uitoefenen gelijk is.
**d** Leg met behulp van de tweede wet van Newton uit welke grootheden je moet meten om de onbekende massa te bepalen.

**12** Springen
Niek springt recht omhoog door gedurende korte tijd een kracht op de aarde uit te oefenen.
**a** Hoe heet de kracht die ervoor zorgt dat Niek van de grond komt?

De aarde zal bij de sprong de andere kant op versnellen.
**b** Leg uit waarom niemand hier iets van merkt.

**13** Tsjoerjoemov-Gerasimenko
In 2004 is de ruimtesonde Rosetta gelanceerd. Deze kwam in 2014 aan bij de komeet Tsjoerjoemov-Gerasimenko. Na aankomst lanceerde Rosetta (massa 2000 kg) de lander Philae (massa 100 kg) die op de komeet onderzoek ging doen. Bij lancering kreeg Philae in 0,50 s een snelheid van 1,0 m $s^{-1}$. Gedurende deze tijd maakten Philae en Rosetta contact.
**a** Bereken de gemiddelde grootte van de kracht die Rosetta op Philae uitoefende.
**b** Leg uit hoe groot de kracht was van Philae op Rosetta.
**c** Bereken de eindsnelheid van Rosetta.
**d** Bereken voor zowel Philae als Rosetta de impulsverandering die optreedt door de lancering. Wat valt op?

**14** Voortstuwing raket
Een raket stijgt op door de verbranding van stoffen.
**a** Leg dit uit met de derde wet van Newton.
**b** Leg uit wat het effect is op de versnelling van de raket als het gas met grotere eindsnelheid de raketmotor zou verlaten.
**c** Leg uit wat het effect is op de versnelling van de raket als er per seconde meer gas de raketmotor zou verlaten.

 **15** Goederentrein
Tijdens de opleiding tot treinmachinist wordt verteld dat het belangrijk is de snelheid vanuit stilstand langzaam te vergroten. Met een te grote versnelling kunnen de spankrachten in de koppelingen zo groot worden dat de kans bestaat dat ze breken.
Een locomotief met een massa van $m_L = 8{,}2 \cdot 10^4$ kg trekt tien identieke wagons, elk met een massa van $m_W = 4{,}1 \cdot 10^4$ kg. De wagons ondervinden tijdens het rijden elk een constante wrijvingskracht $F_W = 0{,}30 \cdot 10^4$ N, terwijl de locomotief zelf een wrijvingskracht $F_L = 0{,}59 \cdot 10^4$ N ondervindt.
**a** Leg uit dat tijdens het optrekken de grootste spankracht in de koppeling tussen locomotief en voorste wagon heerst. Geef daarvoor twee redenen.
**b** Bereken de maximale versnelling van de trein als de maximaal toegestane spankracht in een koppeling $F_{span,max} = 1{,}1 \cdot 10^5$ N is.

**+16** Impulsbehoud
Impulsbehoud is ingebakken in de tweede en derde wet van Newton.
Stel dat twee voorwerpen (massa $m_1$ en $m_2$) een kracht op elkaar uitoefenen die elk daardoor een versnelling $a_1$ en $a_2$ krijgen.
**a** Leid met behulp van de tweede en derde wet een verband af tussen de massa's en versnellingen van de twee voorwerpen.

Als de tijdstap niet te groot is, geldt voor de versnelling: $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

**b** Leg uit dat voor de twee voorwerpen $\Delta t$ gelijk is, maar $\Delta v$ niet.
**c** Toon met behulp van het verband van opdracht a en het gegeven verband voor de versnelling aan dat de impuls behouden is.

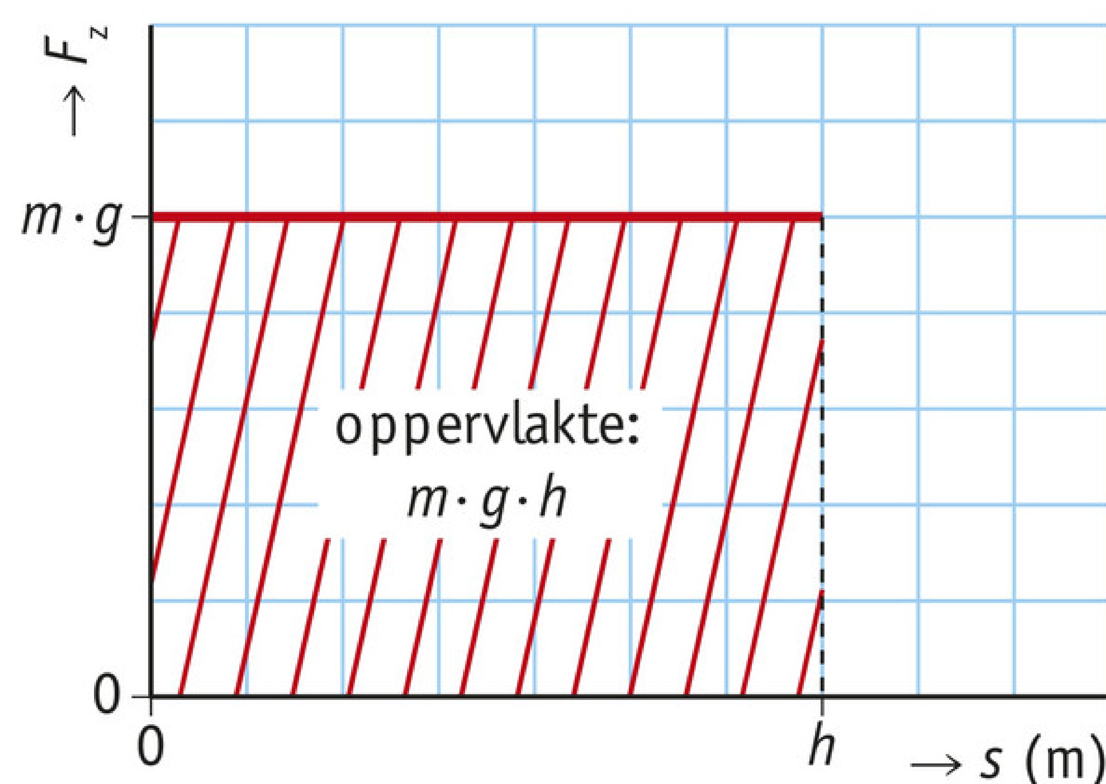
# 3 Gravitatie-energie

In deze paragraaf leer je:
- het verband toepassen tussen ontsnappingssnelheid en de massa en straal van een hemellichaam;
- berekeningen maken met de formule voor gravitatie-energie.

Een satelliet in een baan om de aarde brengen kost veel energie. Dat kun je zien aan het enorme geweld waarmee een lancering gepaard gaat. De astronauten die op de maan landden, moesten ook weer terug kunnen komen naar de aarde. Dat kostte veel minder energie dan nodig was om ze daar te brengen.

## Kracht en energie

In hoofdstuk 3 heb je geleerd dat je arbeid moet verrichten om een massa tegen de zwaartekracht in op te tillen. Deze arbeid zorgt ervoor dat de zwaarte-energie van de massa toeneemt. Voor een constante kracht $F$ die in dezelfde richting als de verplaatsing $s$ wordt verricht, bereken je de arbeid met $W = F \cdot s$. Hieruit volgt dat de toename van zwaarte-energie van een massa $m$ die een hoogte $h$ wordt opgetild, gelijk is aan $E_z = m \cdot g \cdot h$. In een ($F$,$s$)-diagram komt deze arbeid overeen met de oppervlakte onder de grafiek (figuur 9).

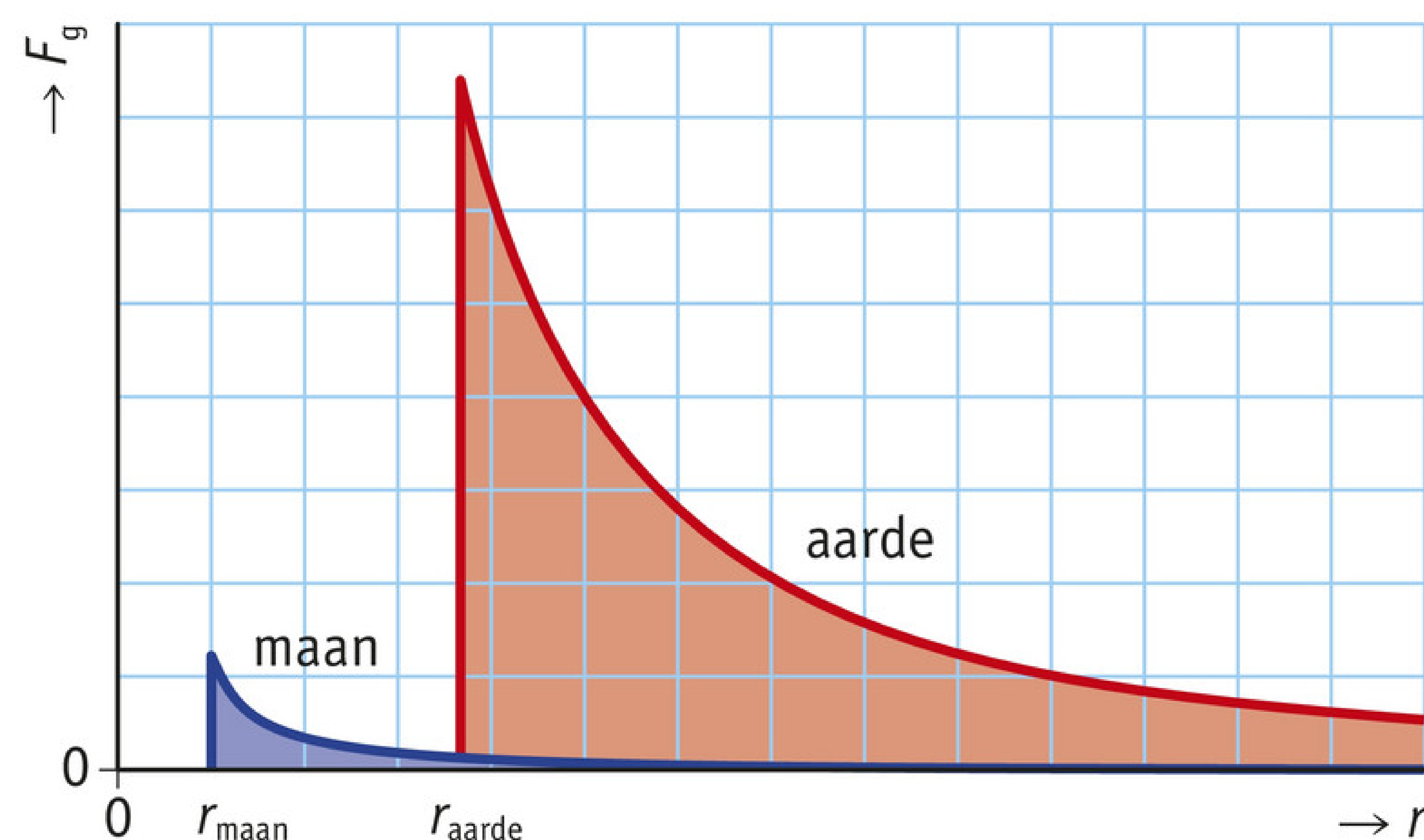



▲ **figuur 9** arbeid om een massa tot een hoogte $h$ op te tillen

Als een massa steeds hoger in de atmosfeer komt, neemt de gravitatiekracht op de massa af en hoeft er steeds minder arbeid te worden verricht om de massa verder omhoog te brengen. De formule voor zwaarte-energie geldt dan niet meer.

## Gravitatie-energie

Net zoals zwaarte-energie hoort bij zwaartekracht, hoort **gravitatie-energie** bij gravitatiekracht. In figuur 10 zie je de grootte van de gravitatie*kracht* als functie van de afstand tot het massamiddelpunt van de aarde (rode grafiek) en de maan (blauwe grafiek). De grafieken begin-




▲ **figuur 10** ($F_g$,$r$)-diagram voor aarde en maan

nen niet bij $r = 0$, omdat je je dan *in* de aarde of maan zou bevinden. De oppervlakte onder de grafieken is gelijk aan de arbeid die je moet verrichten om de massa te laten ontsnappen van de aarde (maan). Je ziet dat hoe verder je van de aarde (maan) bent, hoe minder energie er nodig is om nog verder van de aarde (maan) te komen.

Zwaarte-energie meet je meestal ten opzichte van de grond: de zwaarte-energie is nul voor hoogte nul. Bij gravitatie-energie is de afspraak dat de gravitatie-energie van twee massa's nul is wanneer deze zich op oneindige afstand van elkaar bevinden. Net als bij zwaarte-energie neemt de gravitatie-energie af wanneer de massa's dichter bij elkaar komen. Daardoor is de gravitatie-energie van een voorwerp altijd negatief:

$$E_g = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

Let op het verschil met de formule voor gravitatie*kracht*: er staat een minteken en er wordt gedeeld door $r$ in plaats van $r^2$. De oppervlakte onder de grafiek voor de aarde in figuur 10 komt overeen met het verschil in gravitatie-energie tussen $r = \infty$ en $r = r_{aarde}$.

## Ontsnappingssnelheid

Als je een bal met een bepaalde snelheid omhooggooit, komt deze na verloop van tijd weer terug. Hoe harder je de bal gooit, hoe hoger de bal komt en hoe langer het duurt voordat deze weer terug is. Als je de bal met zeer hoge snelheid zou afschieten, komt deze zo ver van de aarde dat de zwaartekracht op de bal merkbaar afneemt. Je kunt je voorstellen dat op een gegeven moment de bal zo ver weg komt, dat de gravitatiekracht te klein is om de bal tot stilstand te brengen: de bal is ontsnapt aan de gravitatiekracht van de aarde. De minimale lanceersnelheid waarbij dat gebeurt, wordt de **ontsnappingssnelheid** genoemd. Dit is zonder rekening te houden met de luchtweerstandskracht.

**Voorbeeldopgave 4**

Leid een verband af voor de ontsnappingssnelheid $v$ en bereken hiermee de ontsnappingssnelheid voor de aarde (in twee significante cijfers).

*Uitwerking*
Formules:
$E_k = ½ \cdot m \cdot v^2$

$$E_g = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

Gegevens:
$r_1 = r_{aarde} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m (Binas tabel 31)
$r_2 = \infty$
$v_1 = v$
$v_2 = 0$
$m_1 = m$
$m_2 = m_{aarde} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg (Binas tabel 31)

Er zijn twee situaties:
1 als de massa zich op het aardoppervlak bevindt,
2 wanneer deze oneindig ver weg van de aarde is met snelheid nul.

$E_{tot,1} = E_{tot,2}$
$E_{k,1} + E_{g,1} = E_{k,2} + E_{g,2}$

$$\tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + -G \cdot \frac{m \cdot m_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + -G \cdot \frac{m \cdot m_{\text{aarde}}}{\infty}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot v^2 + -G \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}} = \tfrac{1}{2} \cdot 0^2 + -G \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{\infty}$$

Delen door een oneindige waarde levert rechts nul op:

$$\tfrac{1}{2} \cdot v^2 + -G \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}} = 0$$

$$v^2 = 2G \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}}$$

Dus voor de ontsnappingssnelheid geldt:

$$v = \sqrt{\frac{2G \cdot m_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}}}$$

Vul nu de gegevens in:

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}371 \cdot 10^{6}}} = 11 \cdot 10^{3} \text{ m s}^{-1}$$

De ontsnappingssnelheid voor de aarde is flink hoog. Daardoor kost het raketten ook zoveel energie om een satelliet in een baan om de aarde te brengen. Die satellieten zijn dan nog niet eens aan de aarde ‘ontsnapt’. Als je vanaf de aarde een voorwerp zou lanceren met de ontsnappingssnelheid, dan zou het bovendien door de wrijvingskracht uit elkaar spatten. Een raket wordt dus nooit met de ontsnappingssnelheid gelanceerd, maar versnelt gedurende een langer traject tot een snelheid die geschikt is om bijvoorbeeld een satelliet in een baan om de aarde te brengen.

## Onthoud!

- Bij zwaartekracht hoort zwaarte-energie, bij gravitatiekracht hoort gravitatie-energie. De gravitatie-energie in het zwaartekrachtveld van een hemellichaam is nul op oneindige afstand van dat hemellichaam en kleiner dan nul dichter bij het hemellichaam.
- De ontsnappingssnelheid van een hemellichaam is de minimale snelheid die nodig is bij lancering om aan de zwaartekracht van het hemellichaam te ontsnappen.

## Opdrachten

**17** Ontsnappingssnelheid
Noem de twee eigenschappen van een planeet die van invloed zijn op de ontsnappingssnelheid.

**18** Luchtweerstandskracht
In 2021 moet de eerste vlucht plaatsvinden van de nieuwe Ariane-6-raket. De raket heeft een diameter van 5,4 m met daaraan vier boosters, elk met een diameter van 3,0 m. De stuwkracht bij lancering bedraagt ongeveer $15 \cdot 10^6$ N.
Stel dat een dergelijke raket vanaf de aarde met een snelheid gelijk aan de ontsnappingssnelheid wordt gelanceerd.

**a** Maak een beredeneerde schatting van de grootte van de luchtweerstandskracht die de raket dan ondervindt.

**b** Vergelijk je antwoord op opdracht a met de stuwkracht van de raket en leg uit waarom je het begrip ‘ontsnappingssnelheid’ niet te letterlijk moet nemen.

**19** Terug naar de aarde

Een massa wordt ver van de aarde losgelaten. De gravitatiekracht op aarde is net groot genoeg om de massa aan te trekken.

Beredeneer met welke snelheid de massa het aardoppervlak zou raken als er geen atmosfeer zou zijn. Maak in je antwoord gebruik van de begrippen 'gravitatie-energie' en 'ontsnappingssnelheid'.

**20** Zwart gat

De Franse wiskundige en astronoom Pierre-Simon Laplace (1749–1827) toonde in 1796 aan dat de gravitatiekracht van een ster met een diameter van 250 keer die van de zon en een dichtheid gelijk aan die van de aarde zo groot zou zijn dat licht er niet aan kan ontsnappen. Zo voorspelde hij het bestaan van zwarte gaten.

**a** Leg uit dat de ontsnappingssnelheid voor de ster van Laplace groter is dan de lichtsnelheid.

**b** Controleer de uitspraak van Laplace.

**21** Gravitatie-energie

De gravitatie-energie van een planeet in ons zonnestelsel bereken je ten opzichte van de zon. Bij een maan die om een planeet draait, kun je de gravitatie-energie berekenen ten opzichte van de planeet, maar ook ten opzichte van de zon.

**a** Bereken de gravitatie-energie van de maan ten opzichte van de aarde.

**b** Bereken de gravitatie-energie van de maan ten opzichte van de zon.

**c** Leg op basis van je antwoorden bij opdracht a en b uit hoeveel energie het kost om de maan uit het zonnestelsel te slingeren. Houd hierbij geen rekening met de aantrekkingskracht van andere objecten in het zonnestelsel.

**22** Shoemaker-Levy 9

Shoemaker-Levy 9 was een komeet die in 1994 gevangen raakte in het zwaartekrachtveld van Jupiter. Door getijdenkrachten van Jupiter viel de komeet in brokstukken uiteen die vervolgens tussen 16 en 22 juli 1994 met een snelheid van 60 km $s^{-1}$ op Jupiter insloegen. Stel dat de komeet *niet* door Jupiter was ingevangen en met de gegeven snelheid langs Jupiter richting aarde was gevlogen.

Bereken met welke snelheid de komeet op aarde was ingeslagen. Maak gebruik van de gravitatie-energie van de komeet.

**23** Ariane-5-raket

De kometenjager Rosetta is in 2004 door de ESA met een Ariane-5-raket gelanceerd. Deze raket wordt door het uitstoten van verbrandingsgassen voortgestuwd.

**a** Leg deze manier van voortbewegen uit met een natuurkundige wet.

De beweging tijdens de start van de Ariane-5-raket wordt onderzocht aan de hand van een video-opname. Van de eerste honderd seconden is een $(v,t)$-grafiek gemaakt (figuur 11). De totale massa van de Ariane-5-raket bij de start is $7{,}14 \cdot 10^5$ kg.

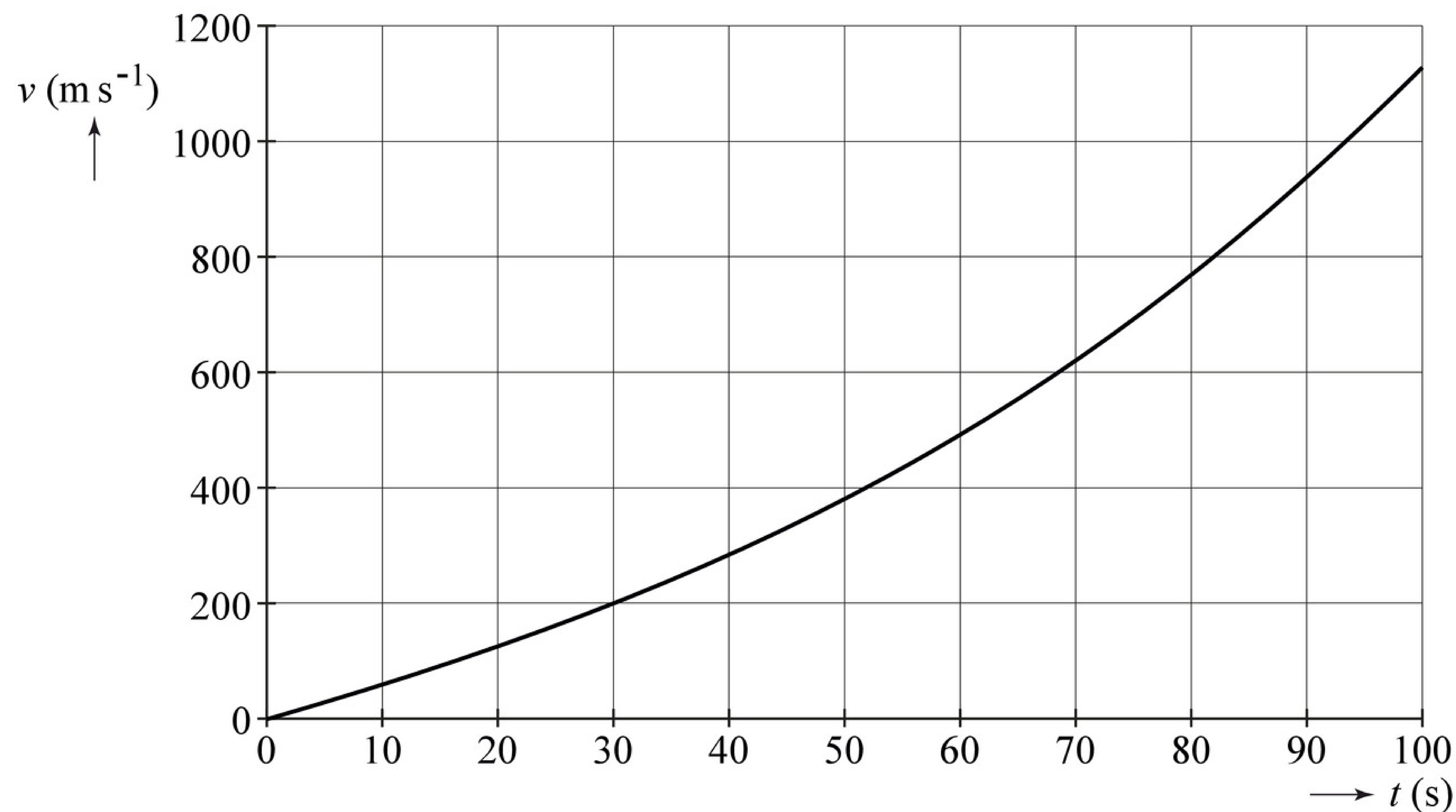
**b** Bepaal aan de hand van figuur 11 de stuwkracht $F_{stuw}$ die de Ariane-5-raket ondervindt op $t = 0$ s.

Elke seconde wordt er $3{,}6 \cdot 10^3$ kg brandstof verbrand. Eenzelfde massa aan verbrandingsgassen wordt uitgestoten met een snelheid $u$ van 3,0 km $s^{-1}$. De ESA gebruikt voor de snelheid $v(t)$ van de raket de formule:

$$v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m(0)}{m(t)}\right) - g \cdot t$$

Hierin is:

- $m(0)$ de totale massa bij de start in kg;
- $m(t)$ de totale massa op tijdstip $t$ in kg;
- $g$ de valversnelling op het aardoppervlak in m $s^{-2}$.




▲ **figuur 11** ($v$,$t$)-diagram van de Ariane-5-raket

**c** Laat aan de hand van een berekening zien dat deze formule een goede benadering geeft van de snelheid op $t = 60$ s.

Voor grotere hoogten geldt voor de gravitatiekracht de formule:

$$F_g = m \cdot g \cdot \frac{R^2}{(R + h)^2}$$

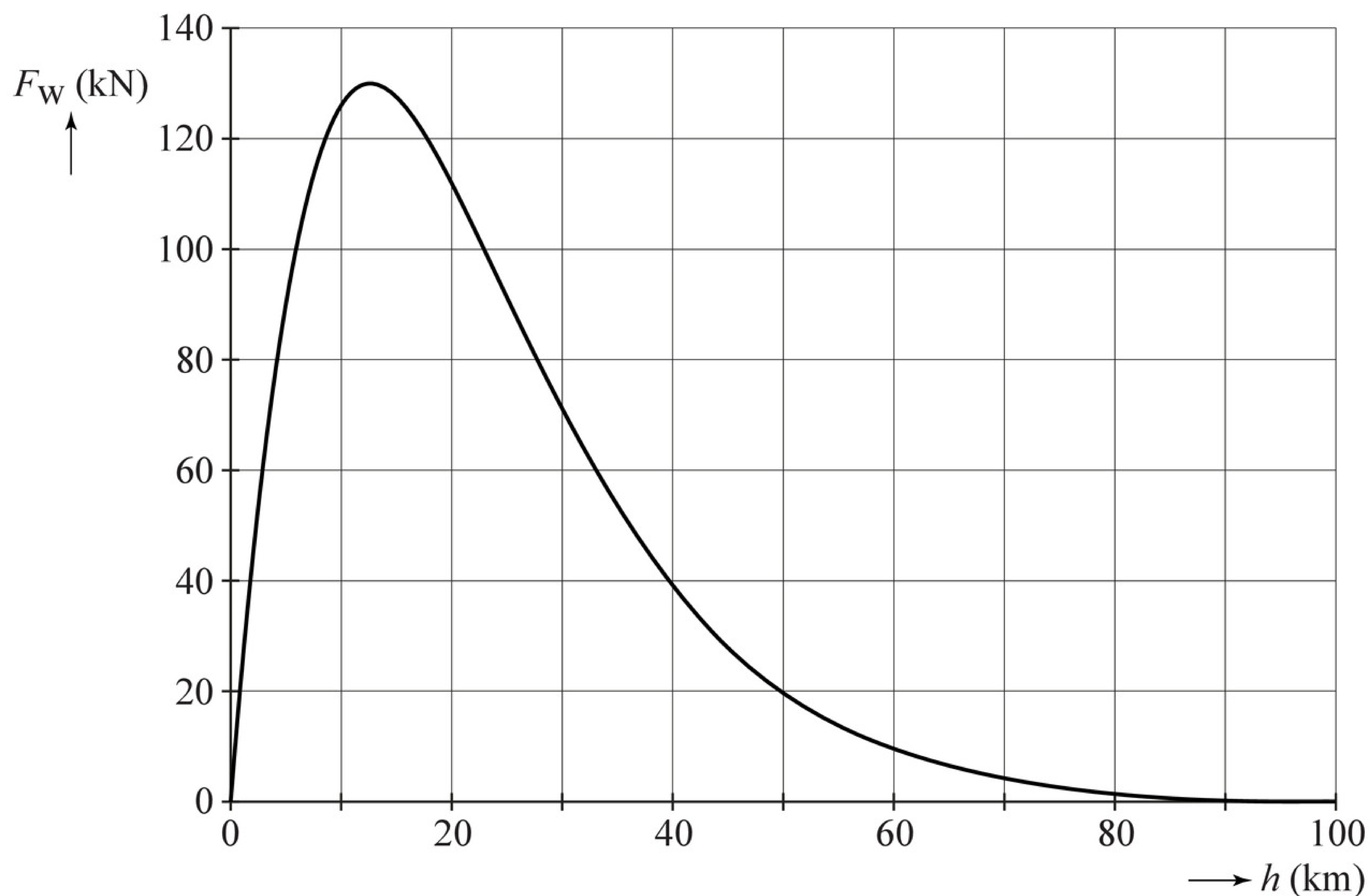
Hierin is:

- $g$ de valversnelling op het aardoppervlak in m $s^{-2}$;
- $R$ de straal van de aarde in m;
- $h$ de hoogte boven de aarde in m.

**d** Leid deze formule af.

Bij de beweging van de Ariane-5-raket speelt, tot een bepaalde hoogte, de wrijvingskracht op de raket een rol. In figuur 12 is het verloop van de wrijvingskracht $F_w$ tegen de hoogte $h$ weergegeven.

**e** Leg uit waarom $F_w$ eerst toeneemt en dan weer afneemt.




▲ **figuur 12** wrijvingskracht op de Ariane-5-raket uitgezet tegen de hoogte

De voortstuwingskracht $F_{stuw}$ die op de Ariane-5-raket werkt, is constant. De versnelling van de Ariane-5-raket blijkt niet constant te zijn. Voor deze versnelling geldt:

$$a = \frac{F_{stuw} - F_g - F_w}{m}$$

**f** Leg uit of de versnelling op 100 km hoogte groter of kleiner is dan op 40 km.
*naar: examen 2009-I*

**+24** Protoster
De zon en ons zonnestelsel zijn ontstaan door het ineenstorten van een grote stofwolk. Bij het ineenstorten is veel energie vrijgekomen.
**a** Leg uit dat deze energie afkomstig is van het afnemen van de gravitatie-energie.

Ons zonnestelsel is waarschijnlijk ontstaan uit een stofwolk met een diameter van ongeveer $10 \cdot 10^3$ AE (astronomische eenheden). De massa van deze stofwolk was vergelijkbaar met de huidige massa van de zon.
**b** Maak een beredeneerde schatting van de orde van grootte van de hoeveelheid energie die bij het ineenstorten van de gaswolk is vrijgekomen. Ga uit van de gemiddelde afstand van de stofwolk tot het middelpunt ervan.

Stel dat al deze energie is omgezet in thermische energie van de zon, die voornamelijk uit waterstof bestaat.
**c** Maak een beredeneerde schatting van de eindtemperatuur van de zon. Maak gebruik van de soortelijke warmte van waterstof (zie Binas).
**d** Vergelijk je antwoord op opdracht c met gegevens uit Binas. Leg uit of het uitgangspunt zinnig was.

# 4 Cirkelbewegingen

In deze paragraaf leer je:
- berekeningen maken aan cirkelbewegingen met constante snelheid;
- een eenparige cirkelbeweging beschrijven;
- beredeneren hoe de middelpuntzoekende kracht afhangt van de omlooptijd, de baanstraal en de massa van een voorwerp in een cirkelbeweging;
- berekeningen maken in situaties waarbij slechts één kracht de middelpuntzoekende kracht veroorzaakt;
- constructies, tekeningen en redeneringen maken in situaties waarbij een of meer krachten de middelpuntzoekende kracht veroorzaken.

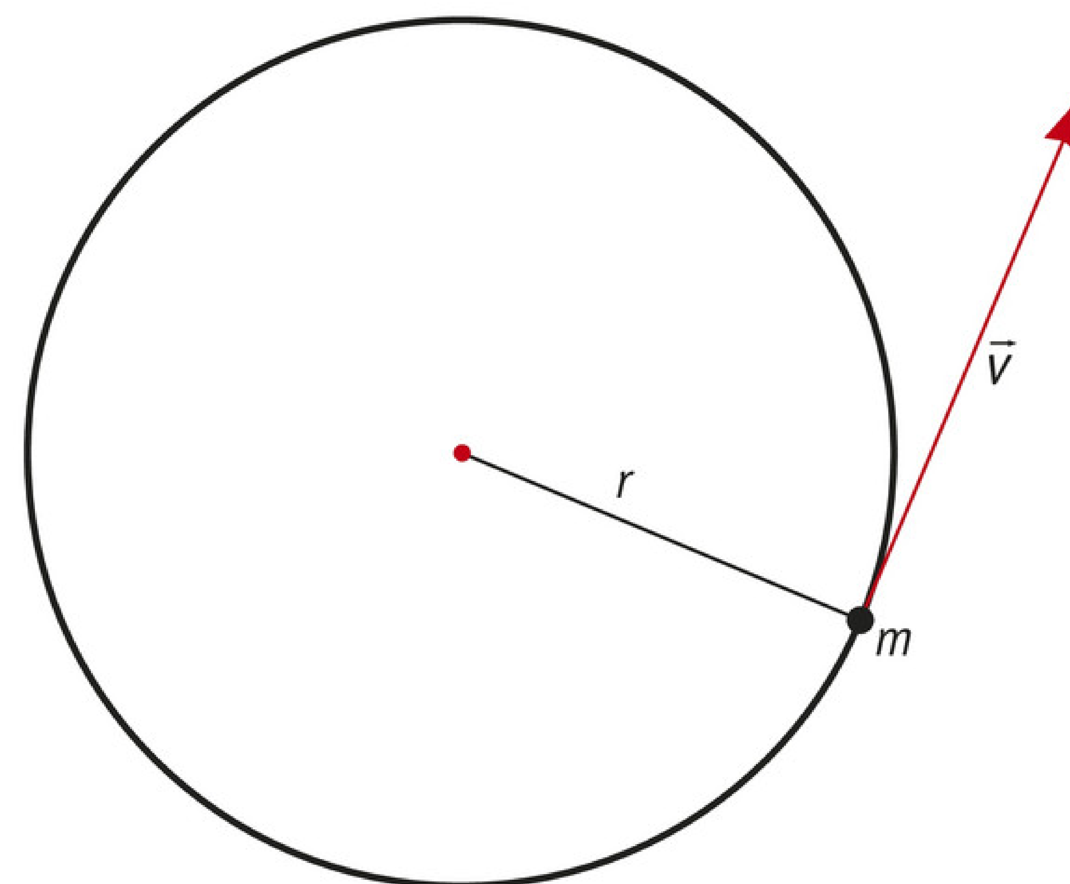
Satellieten worden in cirkelbanen om de aarde gebracht. Afhankelijk van de beoogde toepassing van de satelliet zijn er verschillende banen mogelijk. Voor communicatiesatellieten is het bijvoorbeeld handig dat ze altijd boven dezelfde plaats op het aardoppervlak staan. De satellieten worden door de gravitatiekracht van de aarde in hun baan gehouden. Ook op aarde zijn er voorwerpen die (delen van) cirkelbanen beschrijven. Denk aan een auto die door een bocht rijdt. Dan is het de wrijvingskracht tussen wielen en wegdek die voor de niet-rechtlijnige beweging zorgt.

## Cirkelbeweging

Stel dat je een massa aan een touw in een vrijwel horizontaal vlak rondslingert (figuur 13). De massa beschrijft een cirkel met een straal $r$: de **baanstraal**. De tijd die de massa nodig heeft om één rondje te draaien, wordt de **omlooptijd** $T$ genoemd. De massa legt daarbij een afstand af die gelijk is aan de omtrek van een cirkel: $s = 2\pi \cdot r$. Als je de massa gelijkmatig ronddraait, blijft de grootte van de snelheid constant. Deze is gelijk aan: $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$. Deze snelheid wordt de **baansnelheid** genoemd. In het bovenaanzicht van figuur 14 zie je dat de richting van de snelheidsvector altijd langs de cirkelbaan staat. Alleen de richting van de snelheid verandert. In dit hoofdstuk bekijk je alleen cirkelbewegingen waarbij de grootte van de snelheid van het voorwerp constant blijft. Dit worden **eenparige cirkelbewegingen** genoemd.



▲ **figuur 13** een eenparige cirkelbeweging

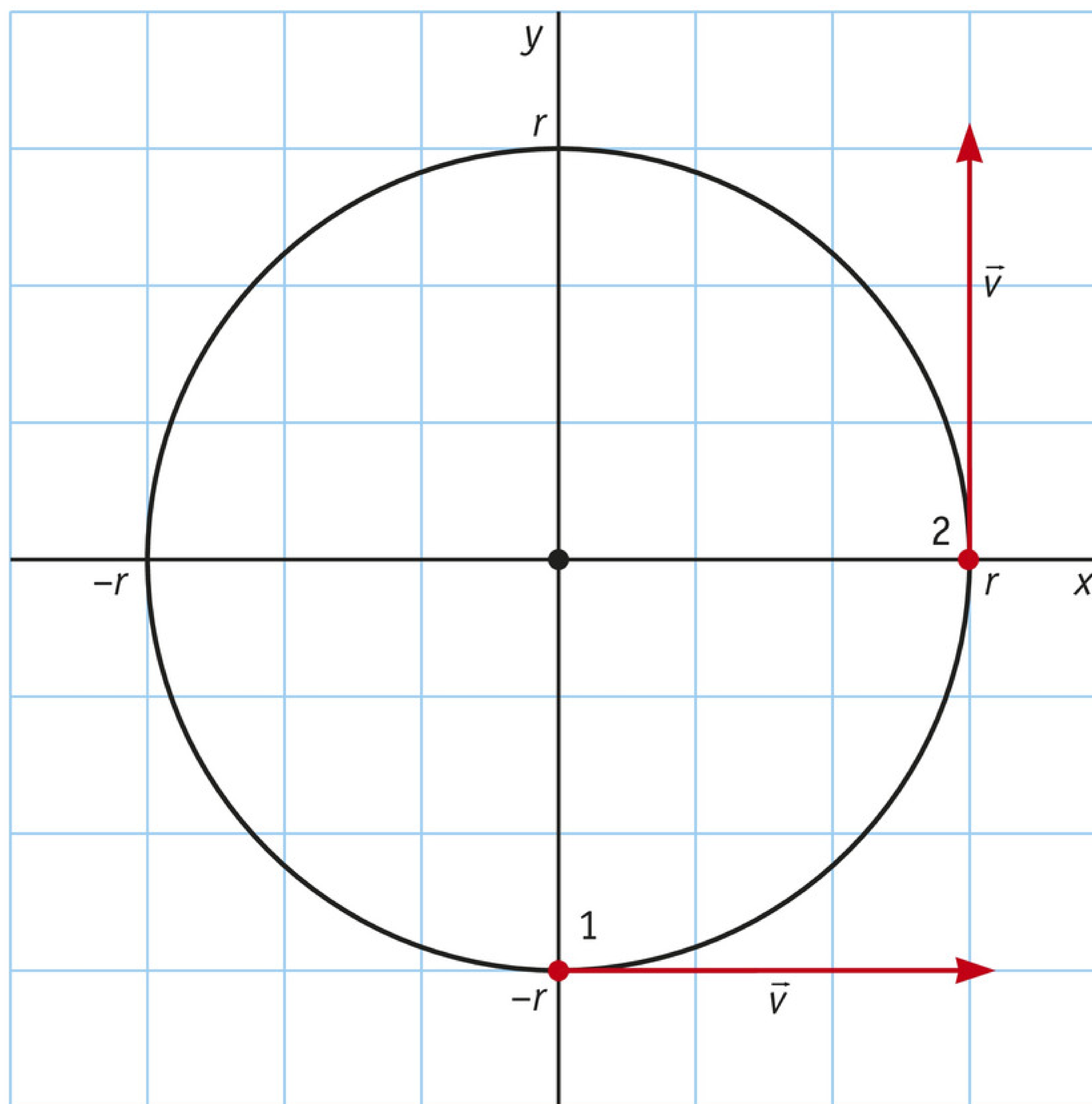



▲ **figuur 14** de snelheidsvector bij een cirkelbeweging

▶ **EXPERIMENT 2** Krachten in een cirkelbaan (onderzoekspracticum)

## Versnelling en kracht

Hoewel de grootte van de snelheid in een eenparige cirkelbeweging constant is, is er toch een versnelling. Die versnelling zorgt voor de verandering van de richting van de snelheidsvector. In figuur 15 zie je hoe dat werkt. De snelheidsvector is op twee momenten getekend. Op het eerste moment wijst de snelheidsvector in de *x*-richting, dus daar geldt: $v_x = v$ en $v_y = 0$. Op het tweede moment wijst de snelheidsvector in de *y*-richting, dus daar geldt: $v_x = 0$ en $v_y = v$. De grootte van de snelheid is hetzelfde, maar de snelheidscomponenten afzonderlijk zijn veranderd, dus is er een versnelling.




▲ **figuur 15** De snelheid verandert van richting tijdens een cirkelbeweging.

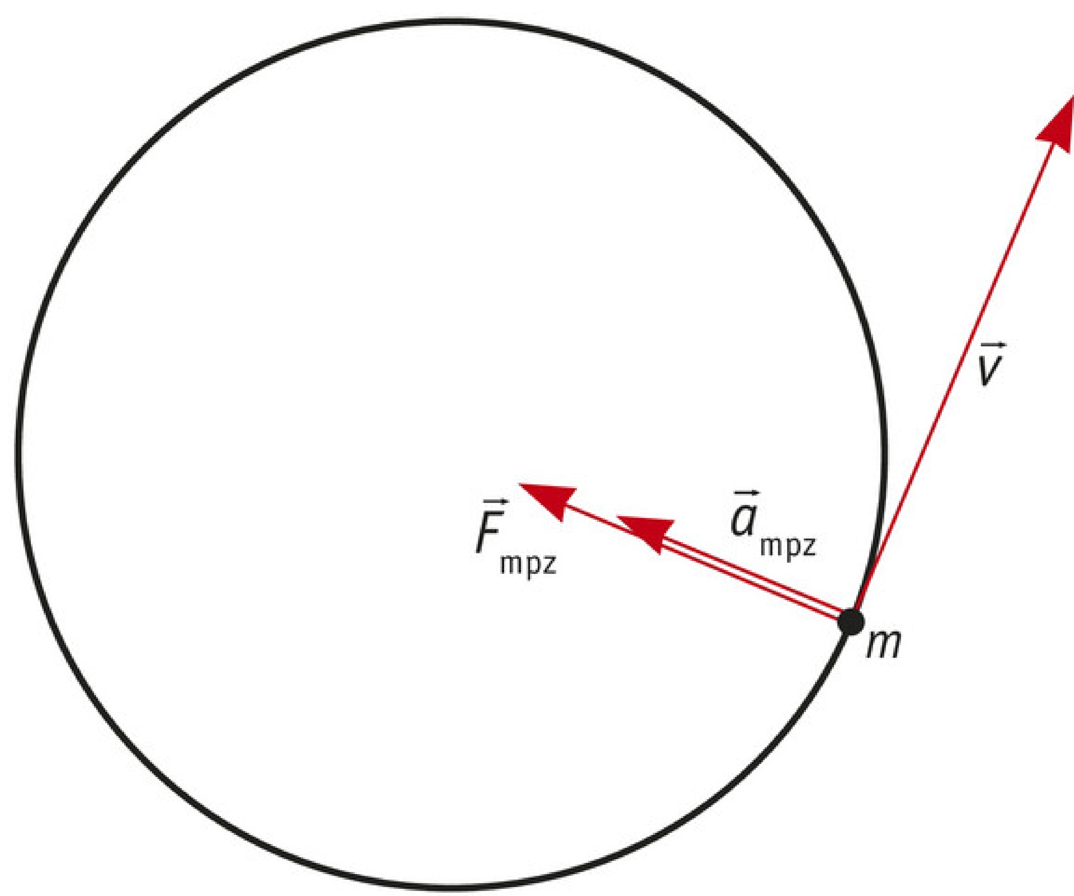
Omdat de grootte van de snelheid constant is, moet de richting van de versnellingsvector altijd loodrecht op de snelheidsvector staan en dus naar het middelpunt van de cirkel zijn gericht. Daarom wordt deze versnelling ook wel een **middelpuntzoekende versnelling** genoemd. Er geldt:

$$a_{mpz} = \frac{v^2}{r}$$

Omdat er bij een cirkelbeweging een versnelling is, moet er volgens de tweede wet van Newton ook een resulterende kracht zijn. Die wordt bij een eenparige cirkelbeweging de **middelpuntzoekende kracht** genoemd en is gelijk aan:

$$F_{res} = F_{mpz} \text{ dus } m \cdot a = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

De middelpuntzoekende kracht is een vector en de richting is gelijk aan de richting van de middelpuntzoekende versnelling: dus naar het middelpunt van de cirkelbaan gericht (figuur 16).




▲ **figuur 16** de richting van de middelpuntzoekende versnelling en kracht

De middelpuntzoekende kracht is altijd een gevolg van andere krachten: als de resultante van die krachten in grootte gelijk is aan de middelpuntzoekende kracht en loodrecht op de bewegingsrichting staat, dan voert het voorwerp een eenparige cirkelbeweging uit. De middelpuntzoekende kracht is dus niet een op zichzelf bestaande kracht, zoals de zwaartekracht dat wel is.

### Voorbeeldopgave 5

Een auto met een massa van 900 kg rijdt met een snelheid van 36 km h$^{-1}$ door een cirkelvormige bocht met een straal van 20 m. De weg is vlak.

**a** Bereken de grootte van de middelpuntzoekende kracht.
**b** Welke kracht veroorzaakt de middelpuntzoekende kracht?
**c** Leg uit wat er met de grootte van de kracht uit opgave a en b gebeurt wanneer de weg naar beneden helt, richting het midden van de cirkelbaan.

*Uitwerking*

**a** Formule: $F_{mpz} = \dfrac{m \cdot v^2}{r}$

Gegevens:
$v = 36$ km h$^{-1}$ = 10 m s$^{-1}$
$m = 900$ kg
$r = 20$ m

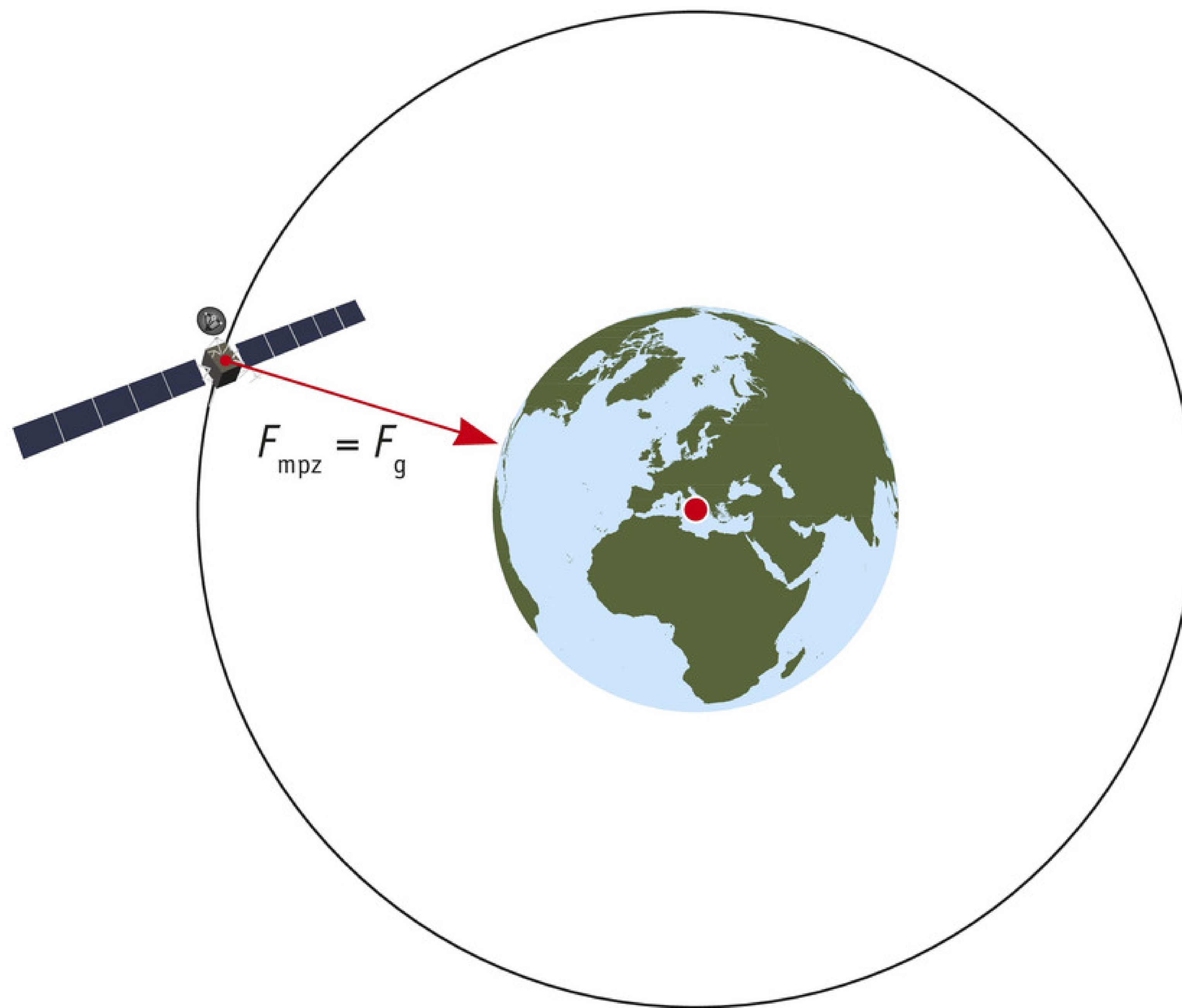
$$F_{mpz} = \frac{900 \cdot 10^2}{20} = 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ N}$$

**b** De middelpuntzoekende kracht wordt in dit geval veroorzaakt door de wrijvingskracht tussen de banden en het wegdek. Er is geen enkele andere kracht die in de richting loodrecht op de bewegingsrichting kan werken.

**c** De weg helt naar het midden van de cirkelbaan. De auto is dus te zien als een massa op een helling. De zwaartekracht is loodrecht naar beneden, maar de normaalkracht is schuin omhoog. De horizontale component daarvan wijst naar het midden van de cirkelbaan. Die neemt dus (een deel van) de middelpuntzoekende kracht voor zijn rekening. Dat betekent dat de wrijvingskracht in opgave a en b kleiner wordt.

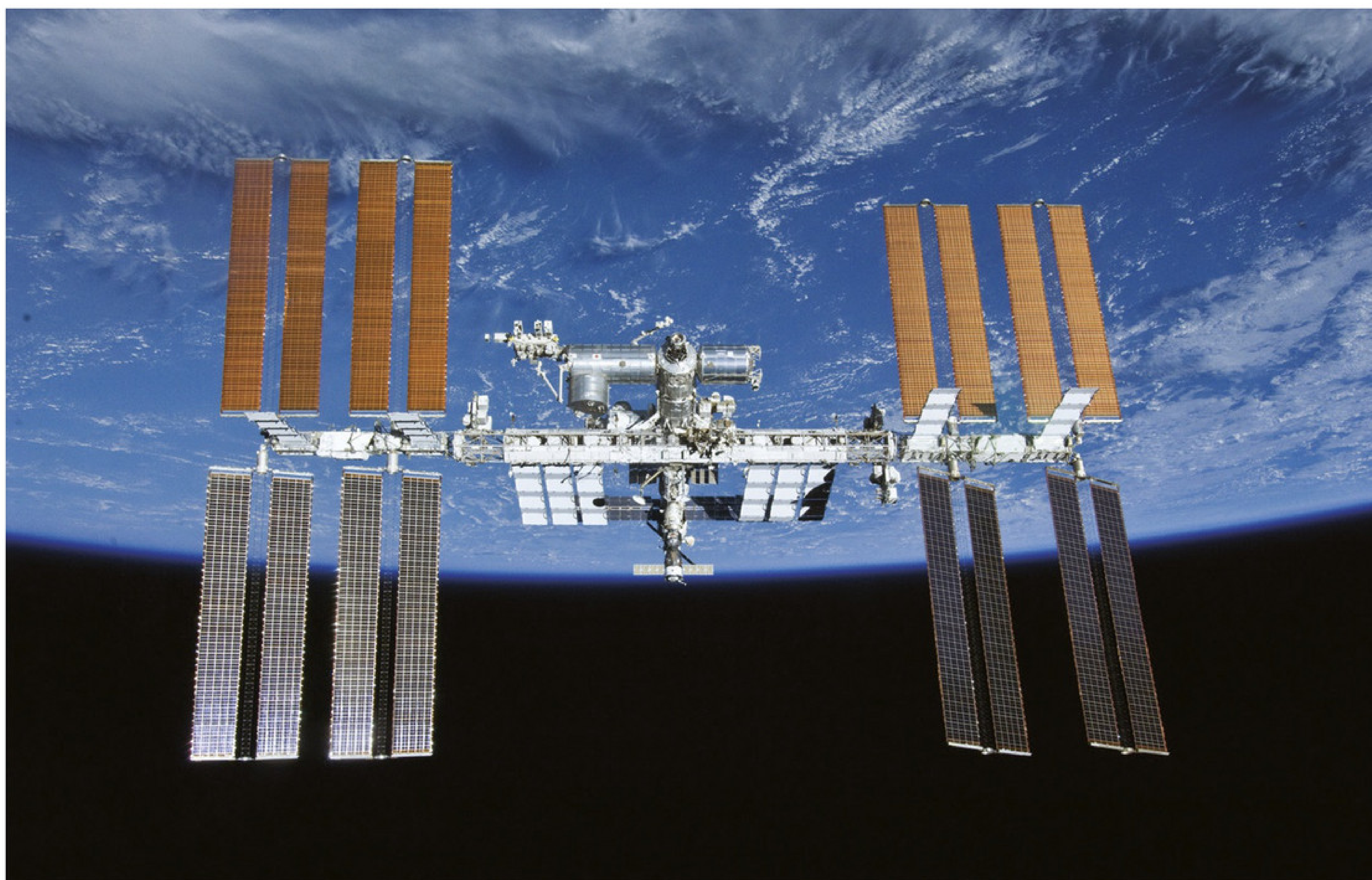
## Satellieten

Satellieten die in een baan om de aarde draaien, voeren (meestal) een eenparige cirkelbeweging uit. Ze worden in hun baan gehouden door de gravitatiekracht tussen de aarde en de satelliet. Omdat de middelpuntzoekende kracht naar het middelpunt van de cirkelbaan moet wijzen, volgt dat het middelpunt van de cirkelbaan samenvalt met het massamiddelpunt van de aarde (figuur 17).




▲ **figuur 17** een satelliet in een baan om de aarde

Je kunt dit ook op een andere manier zien. De satelliet valt in feite steeds naar de aarde toe, maar beweegt tegelijk (heel hard) naar voren, parallel aan het aardoppervlak. Doordat de kromming van de baan van de satelliet gelijk is aan die van de aarde, komt de satelliet nooit dichter bij het aardoppervlak. Met andere woorden: de satelliet is in vrije val. Daardoor zie je de astronauten 'zweven' wanneer ze zich in het ISS bevinden (figuur 18).



▲ **figuur 18** het ruimtestation ISS

Er zijn verschillende soorten satellieten. **Geostationaire satellieten** bevinden zich altijd boven hetzelfde stukje aardoppervlak, bijvoorbeeld communicatiesatellieten. Omdat ze geostationair zijn, doen ze even lang over een rondje om de aarde als de aarde nodig heeft om één keer om haar as te draaien: 24 uur. Bovendien moeten ze boven de evenaar draaien, anders zouden ze niet boven een vaste plaats op aarde blijven staan. Stel bijvoorbeeld dat de baan wat gekanteld is ten opzichte van de evenaar, dan zou de satelliet zich 12 uur boven het noordelijk halfrond en de volgende 12 uur boven het zuidelijk halfrond bevinden. Spionagesatellieten en aardobservatiesatellieten worden juist in banen gebracht waarbij ze, in een bepaalde tijd, het gehele aardoppervlak kunnen waarnemen. Ook ingewikkelder, niet-cirkelvormige banen zijn mogelijk. Daarover lees je meer in de volgende paragraaf.

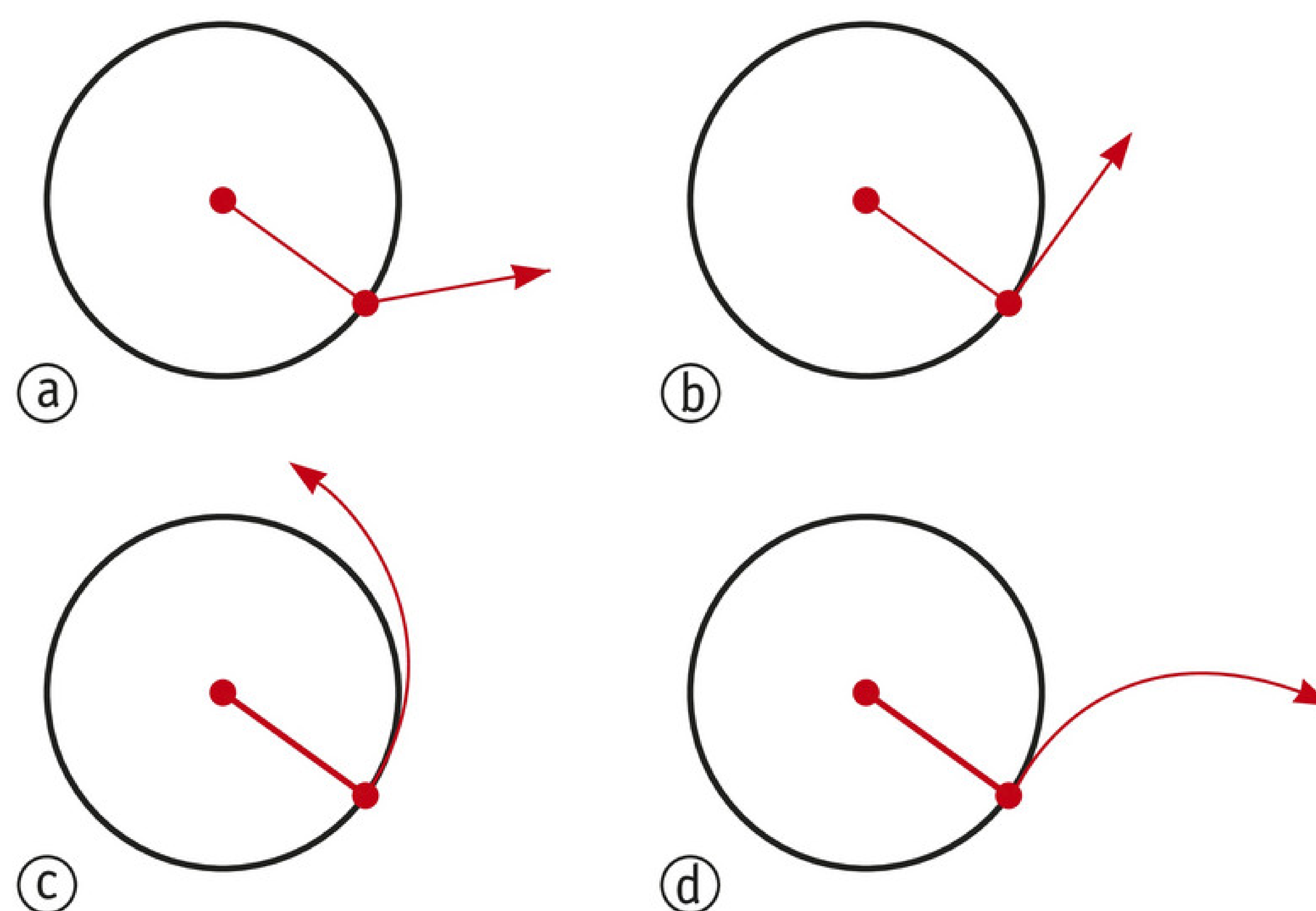
## Onthoud!

- Bij een eenparige cirkelbeweging beweegt een massa met een constante snelheid in een cirkelbaan.
- De middelpuntzoekende kracht is de kracht die nodig is om een massa in een eenparige cirkelbeweging te laten bewegen. De middelpuntzoekende kracht is geen op zichzelf staande kracht: andere krachten vervullen de rol van de middelpuntzoekende kracht.
- Voor satellieten die om de aarde bewegen, manen die om een planeet bewegen en planeten die om de zon bewegen in een eenparige cirkelbaan, geldt: $F_{mpz} = F_g$
- Een satelliet in een geostationaire baan blijft boven hetzelfde punt van het aardoppervlak staan. De omlooptijd is gelijk aan 24 uur en de satelliet draait in het vlak van de evenaar.

## Opdrachten

**25** International Space Station
Astronauten in het International Space Station (ISS) zijn gewichtloos: ze zweven.
**a** Geef de definitie van gewichtloosheid.
**b** Leg uit of er op de astronauten in het ISS wel of geen gravitatiekracht werkt.
**c** Geef een voorbeeld van een situatie op aarde waarbij een voorwerp gewichtloos is.
**d** Leg voor de situatie op aarde (opdracht c) uit of er in dat geval een zwaartekracht op het voorwerp werkt.
**e** Leg uit hoe het komt dat de astronauten gewichtloos zijn.

**26** Massa aan een touw
Een massa aan een touw draait in een horizontaal vlak rondjes. Op een zeker moment breekt het touw.
Welke baan in figuur 19 geeft het best weer hoe de massa zijn weg vervolgt?




▲ **figuur 19** Hoe vervolgt de massa zijn weg?

**27** Langspeelplaat
Een langspeelplaat, ‘vinyl’, heeft een diameter van 10 inch en wordt afgespeeld op 33 toeren per minuut (rpm).
**a** Bereken de straal van een langspeelplaat in meters.
**b** Bereken de omlooptijd van een langspeelplaat in seconden.
**c** Bereken de snelheid van een punt op de buitenrand van de langspeelplaat.

**28** Auto door de bocht
Een auto maakt een scherpe bocht. De weg is glad en de wrijvingskracht met het wegdek is niet groot genoeg om de bocht te maken.

**a** Leg met behulp van het begrip 'middelpuntzoekende kracht' uit dat de auto langzamer moet rijden om de bocht wel te kunnen maken.
**b** Leg uit of de baanstraal groter of kleiner wordt als de snelheid niet wordt aangepast, maar er nog wel in de bocht wordt gestuurd.

**29** Kermisattractie
De kermisattractie in figuur 20 begint als draaimolen in een horizontaal vlak. Nadat deze op snelheid is, kantelt de arm naar boven zodat de molen in een verticaal vlak draait. De gondels bevinden zich op een afstand van 6,0 m van het middelpunt. De molen draait 25 rondjes per minuut.
**a** Bereken de middelpuntzoekende versnelling van de inzittenden wanneer de molen in een horizontaal vlak draait.

In de rest van deze opdracht draait de molen in een verticaal vlak. Een inzittende heeft een massa van 60 kg.
**b** Bereken de normaalkracht die op de inzittende werkt wanneer deze zich *onder* in de baan bevindt.
**c** Bereken de normaalkracht die op de inzittende werkt wanneer deze zich *boven* in de baan bevindt.
**d** Leg met behulp van je antwoorden op opdracht b en c uit wanneer de inzittende zich het zwaarst voelt.



▲ **figuur 20** kermisattractie

**30** Geostationaire satelliet
Een geostationaire satelliet bevindt zich altijd boven hetzelfde stukje aarde.
**a** Geef de omlooptijd $T$ van een geostationaire satelliet.
**b** Noem de kracht waaraan de middelpuntzoekende kracht gelijk moet zijn.
**c** Geef de uitdrukking voor de snelheid $v$ van de satelliet in termen van de baanstraal $r$ en de omlooptijd $T$.

Voor de omlooptijd $T$ van een satelliet in een baan met baanstraal $r$ geldt:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_{\text{aarde}}}{4\pi^2}$$

**d** Leid dit verband af door de kracht uit opdracht b gelijk te stellen aan de middelpuntzoekende kracht en het verband uit opdracht c te gebruiken om de snelheid te elimineren.

**e** Bereken met behulp van het gegeven verband op welke hoogte boven het aardoppervlak een geostationaire satelliet zijn rondjes draait. Rond je antwoord af op twee significante cijfers.

**31** Exoplaneten

Er zijn al veel sterren gevonden waaromheen exoplaneten draaien. De omlooptijd $T$ van een exoplaneet kan worden bepaald door met de dopplermethode te kijken naar schommelingen in de beweging van de ster. Vervolgens kan met de derde wet van Kepler de baanstraal $r$ worden berekend:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_{\text{ster}}}{4\pi^2}$$

Hierin is $m_{\text{ster}}$ de massa van de ster waar de exoplaneet omheen draait. De massa van een hoofdreeksster kan uit de lichtkracht worden bepaald.

**a** Leg uit waarom het interessant is te weten op welke afstand de exoplaneet van zijn ster staat.

Rond Kepler-18 zijn drie exoplaneten gevonden. De tweede planeet heeft een omlooptijd van 7,64 d en een baanstraal van 0,0752 AE, de derde planeet heeft een omlooptijd van 14,9 d.

**b** Bereken de baanstraal van deze derde exoplaneet in astronomische eenheden (AE).

**32** Valversnelling

Aan de evenaar is de valversnelling anders dan aan de polen. Dat komt door twee factoren: de aarde is afgeplat en de aarde draait rond.

**a** Bereken de valversnelling aan de polen op basis van de straal die de aarde daar heeft.

**b** Bereken de valversnelling aan de evenaar op basis van de straal die de aarde daar heeft, zonder rekening te houden met de draaiing van de aarde.

**c** Beredeneer of de valversnelling aan de evenaar groter of juist kleiner wordt wanneer je rekening houdt met de draaiing van de aarde.

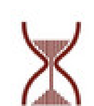
De valversnelling aan de evenaar is met de volgende twee regels te berekenen:

I De normaalkracht die op je werkt is gelijk aan je gewicht.

II De middelpuntzoekende kracht is gelijk aan de resultante van de gravitatiekracht en de normaalkracht.

**d** Leg uit bij welke regel de derde wet van Newton hoort.

**e** Bereken de valversnelling aan de evenaar op basis van deze regels. Vergelijk je antwoord met de literatuurwaarde die in Binas staat.

 **33** Racemotor

De maximale snelheid waarmee een motor een bocht kan nemen, wordt voor een groot deel bepaald door de minimale hoek die de motor met berijder kan maken ten opzichte van het asfalt. Bij een gewone motor is de hoek tussen het asfalt en de lijn door het contactvlak van de band en het gezamenlijk zwaartepunt 55 graden (figuur 21, links). Een MotoGP-racemotor kan die hoek verkleinen tot 35 graden (figuur 21, rechts).

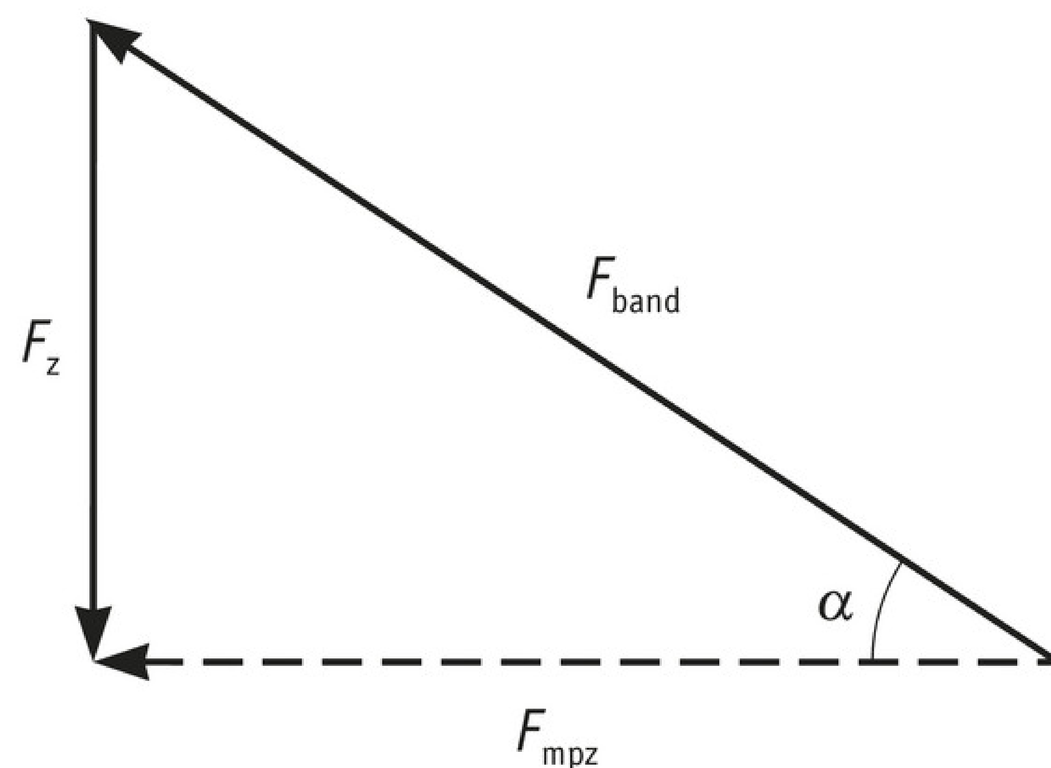
De weg oefent een kracht $F_{\text{band}}$ op de banden van de motor uit. Deze kracht is gericht vanuit het contactvlak tussen band en wegdek richting het gezamenlijke massamiddelpunt van motor met berijder. Samen met de zwaartekracht op het gezamenlijke massamiddelpunt levert dit een middelpuntzoekende kracht: zie figuur 22.







▲ **figuur 21** Motoren nemen een bocht: (a) een gewone motor; (b) een MotoGP.




▲ **figuur 22** krachten op een motor door de bocht

Een bepaalde bocht op een circuit heeft een straal van 77 m.
Hoeveel keer sneller kan de MotoGP-motor deze bocht nemen dan de gewone motor?

A 1,4× zo snel
B 1,6× zo snel
C 1,8× zo snel
D 2,0× zo snel

**+34** Afleiding middelpuntzoekende versnelling
Je kunt de uitdrukking voor de middelpuntzoekende versnelling afleiden met wat je hebt geleerd bij wiskunde. Gebruik bij deze opdracht figuur 15. Hierin beschrijft een massa in een tijd $T$ een cirkel met straal $r$. Op $t = 0$ bevindt de massa zich in positie 2. Voor de hoek $\alpha$ in radialen die de straal met de $x$-as maakt, geldt: $\alpha = 2\pi \dfrac{t}{T}$

**a** Leg dit uit.
**b** Geef een verband voor zowel de $x$- als de $y$-coördinaat van de massa, als functie van de tijd $t$.

De eerste afgeleide van de plaats naar de tijd geeft de snelheid.

**c** Leid een verband af voor de snelheid in zowel de $x$- als de $y$-richting. Controleer of de *grootte* van de snelheid overeenkomt met het verband gegeven in de theorie.

De afgeleide van de snelheid naar de tijd geeft de versnelling.

**d** Leid een verband af voor de versnelling in beide richtingen. Controleer of de *grootte* van de versnelling overeenkomt met het verband gegeven in de theorie.

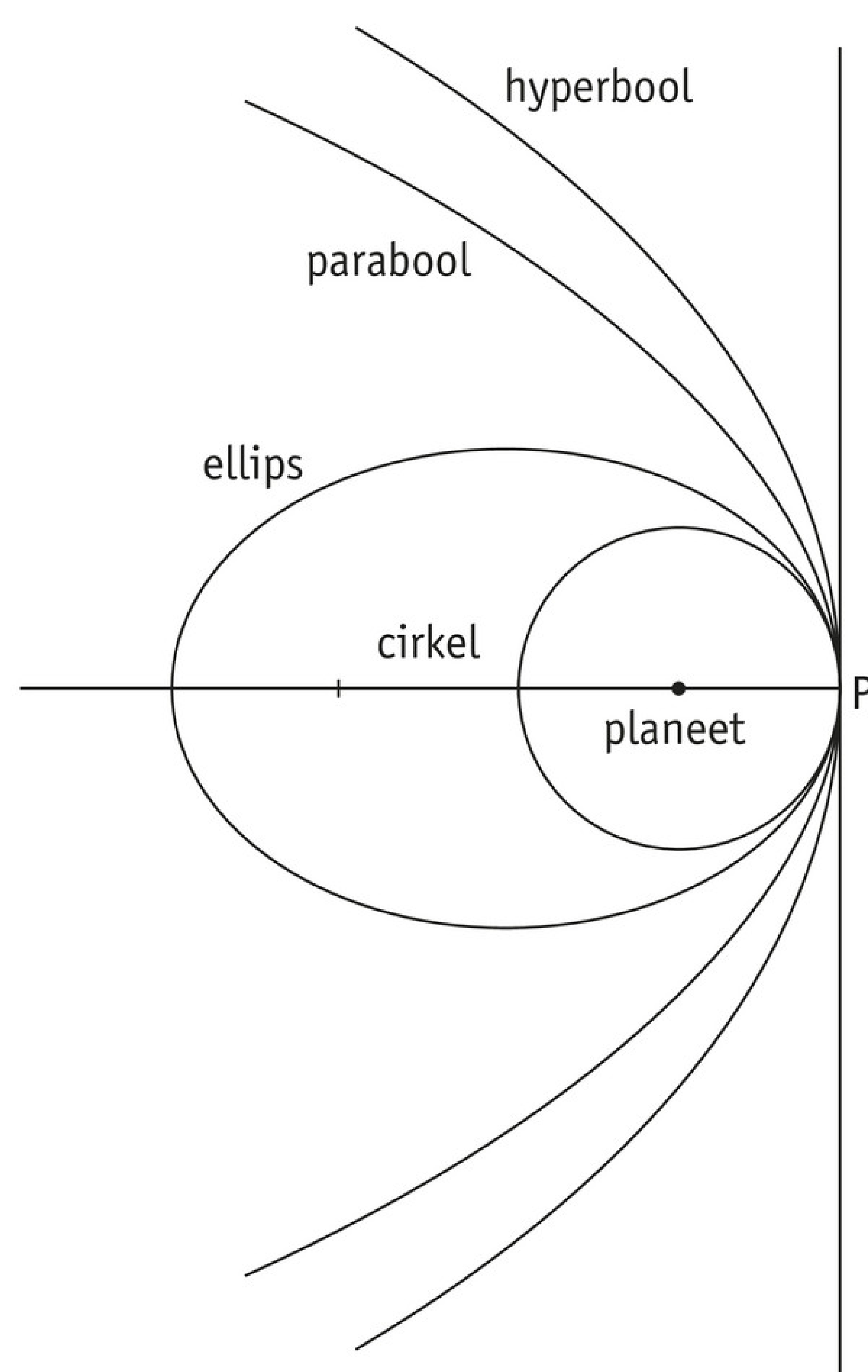
# 5 Ellipsbanen

In deze paragraaf leer je:
- de eigenschappen van een ellipsbaan beschrijven en vergelijken met die van een cirkelbaan;
- hoe de snelheid en versnelling in een ellipsbaan veranderen als gevolg van zowel krachten als energie;
- aan de hand van een numeriek model de bewegingen van planeten, kometen en andere hemellichamen analyseren.

Tot in de zestiende eeuw gingen natuurkundigen uit van perfecte cirkelbanen om de beweging van de planeten te beschrijven. Maar dankzij nauwkeurige metingen van Tycho Brahe (1546–1601) kwam Johannes Kepler (1571–1630) erachter dat de planeten in ellipsbanen bewegen. Kepler stelde drie nieuwe wetten op voor de beweging van de planeten. Op basis van die wetten kon Isaac Newton (1643–1727) zijn universele gravitatiewet opstellen (paragraaf 1). En die wet wordt nu nog steeds gebruikt bij het voorspellen en plannen van de banen van satellieten en sondes die voor onderzoek het zonnestelsel zijn ingestuurd.

## Energie van een satelliet

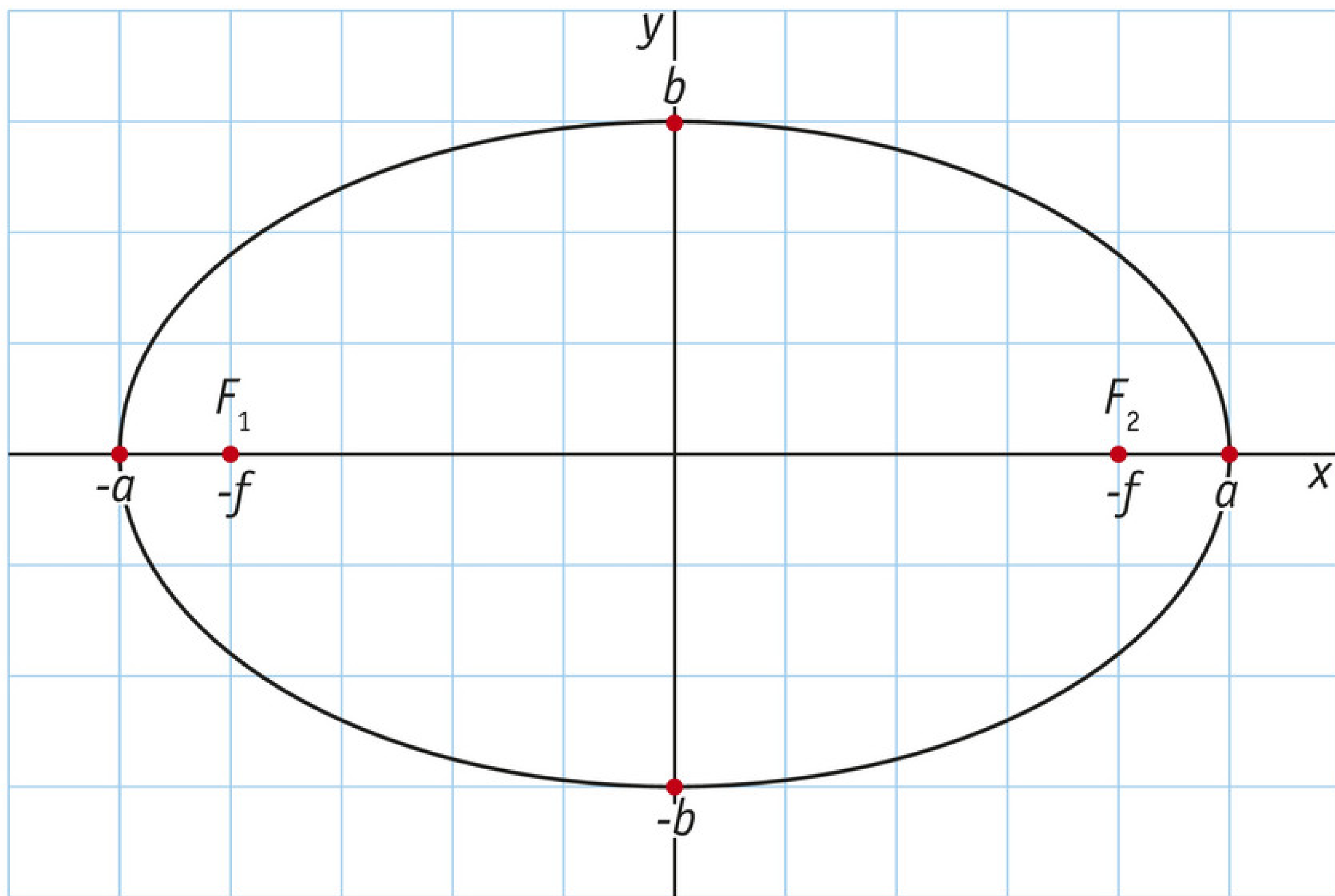
Je kunt de baan van een satelliet beschrijven in termen van zijn energie. Zo heeft een satelliet in een eenparige cirkelbaan rond de aarde altijd dezelfde hoeveelheid gravitatie-energie. Daarom is ook zijn kinetische energie constant. De totale energie is kleiner dan nul: de satelliet bevindt zich in een gebonden toestand.
Naast cirkelbanen zijn ook andere banen mogelijk (figuur 23). In een **ellipsbaan** bevindt de satelliet zich net als in een cirkelbaan in een gebonden toestand en is de totale energie van de satelliet kleiner dan nul. Een satelliet kan ook genoeg energie hebben om aan de aantrekkingskracht van de aarde te ontsnappen. Je zou het dan echter geen satelliet meer noemen. In voorbeeldopgave 4 (paragraaf 3) heb je uitgerekend hoe groot de ontsnappingssnelheid is. In dat geval is de totale energie precies nul: de satelliet komt oneindig ver van de aarde weg, maar met snelheid nul. Hierbij hoort een parabolische baan (figuur 23). Het kan ook zijn dat de energie groter is dan nul. Ook dan ontsnapt de satelliet, maar de eindsnelheid is dan groter dan nul. Dit is een hyperbolische baan (figuur 23).



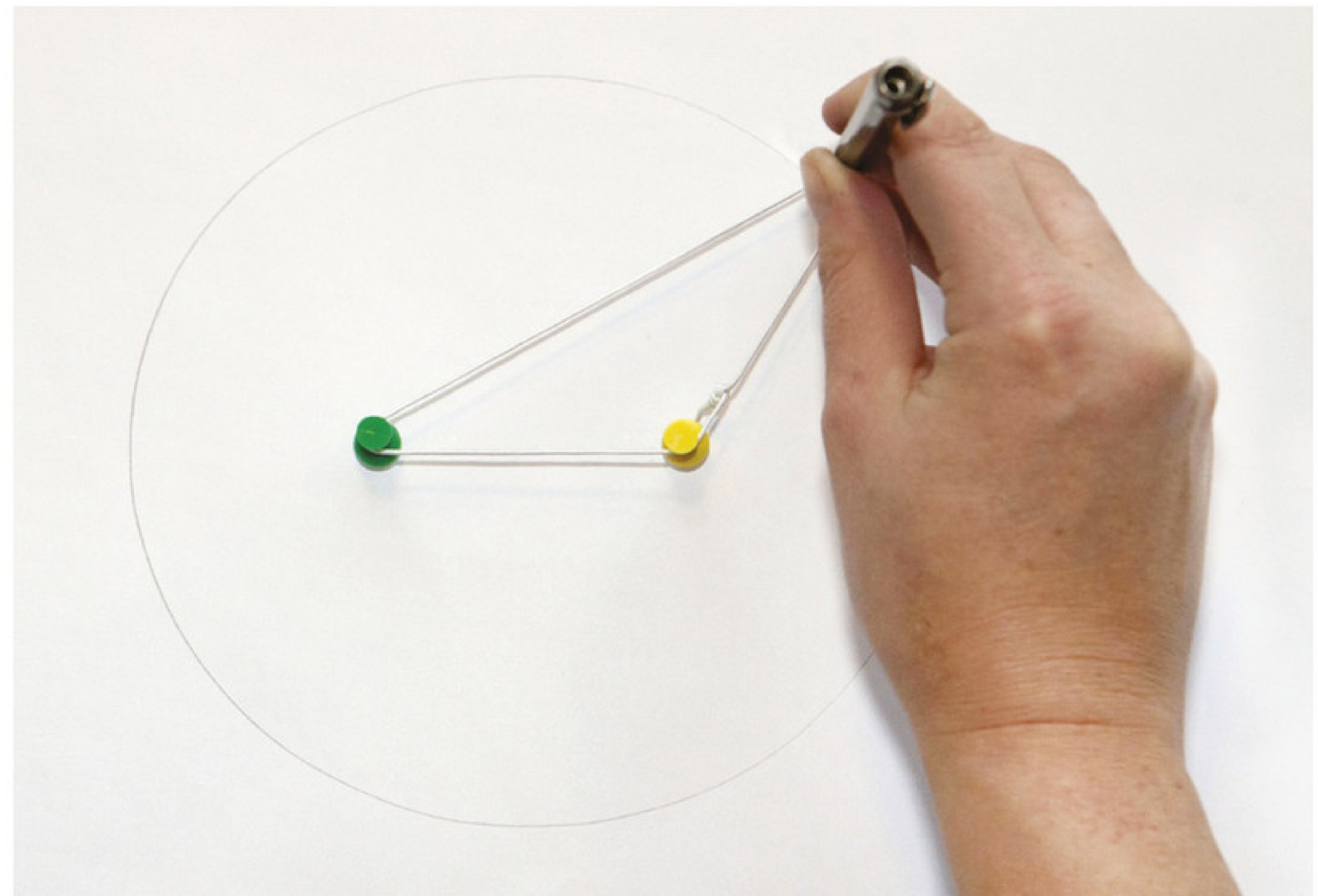

◀ **figuur 23** mogelijke banen die een massa om een andere massa kan uitvoeren

## Ellipsbanen

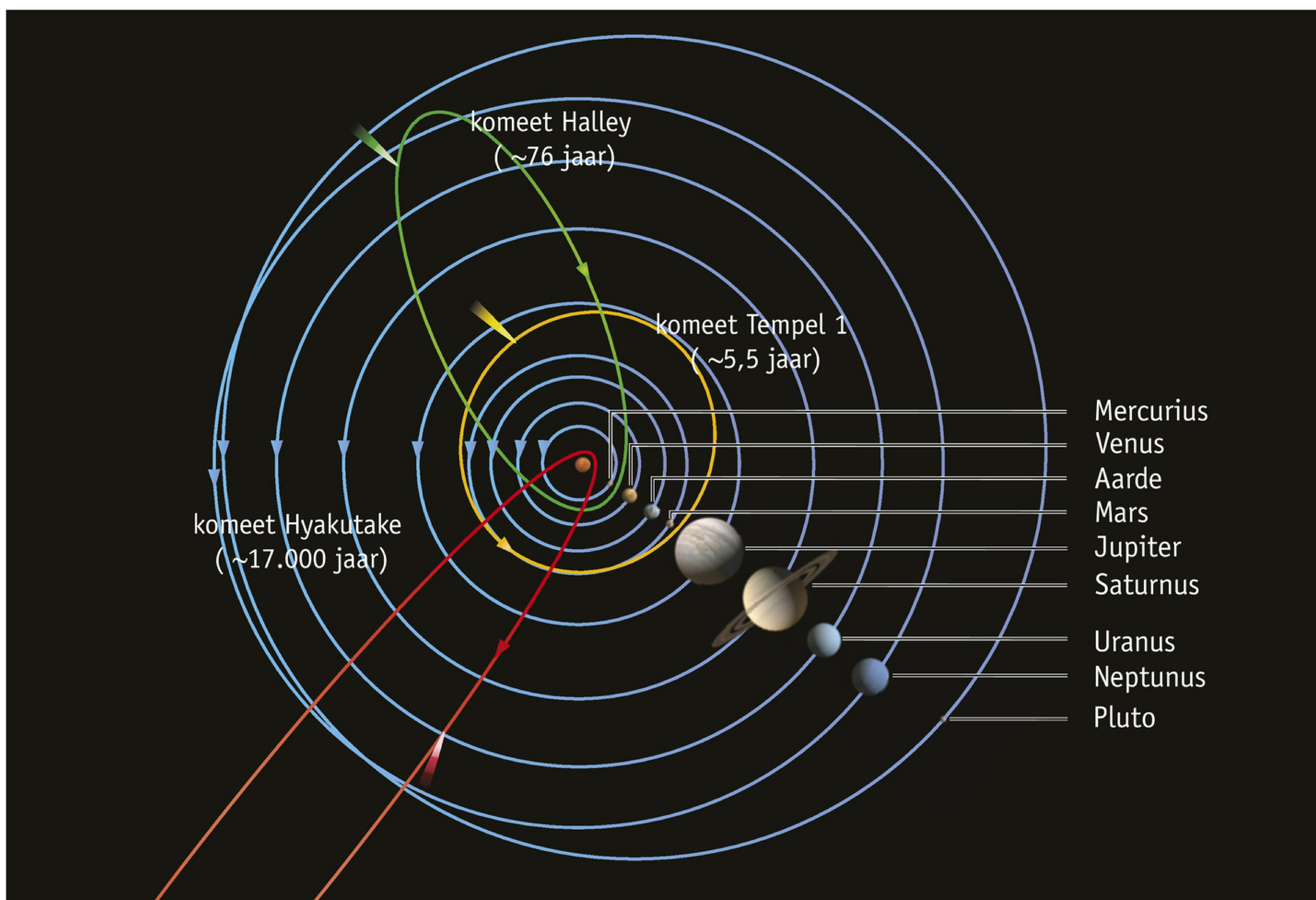
Vrijwel alle planeten draaien niet in cirkelbanen, maar in ellipsbanen om de zon. In tegenstelling tot een cirkel heeft een ellips twee kenmerkende afmetingen: de grootste afstand van de oorsprong tot de ellipsbaan wordt de halve lange as $a$ genoemd, de kortste afstand de halve korte as $b$ (figuur 24). De punten $F_1$ en $F_2$ zijn de brandpunten van de ellips. De afstand van het ene brandpunt naar het andere via een willekeurig punt op de ellips is constant. Dat gegeven kun je gebruiken om een ellips te tekenen (figuur 25). De mate waarin een ellips afwijkt van een cirkel, wordt de **excentriciteit** $e$ genoemd, waarbij $0 < e < 1$; $e = 0$ komt overeen met een cirkel en $e = 1$ met een parabolische baan.




▲ **figuur 24** een ellipsbaan



▲ **figuur 25** Zo teken je een ellips: de pinnen staan in de twee brandpunten.



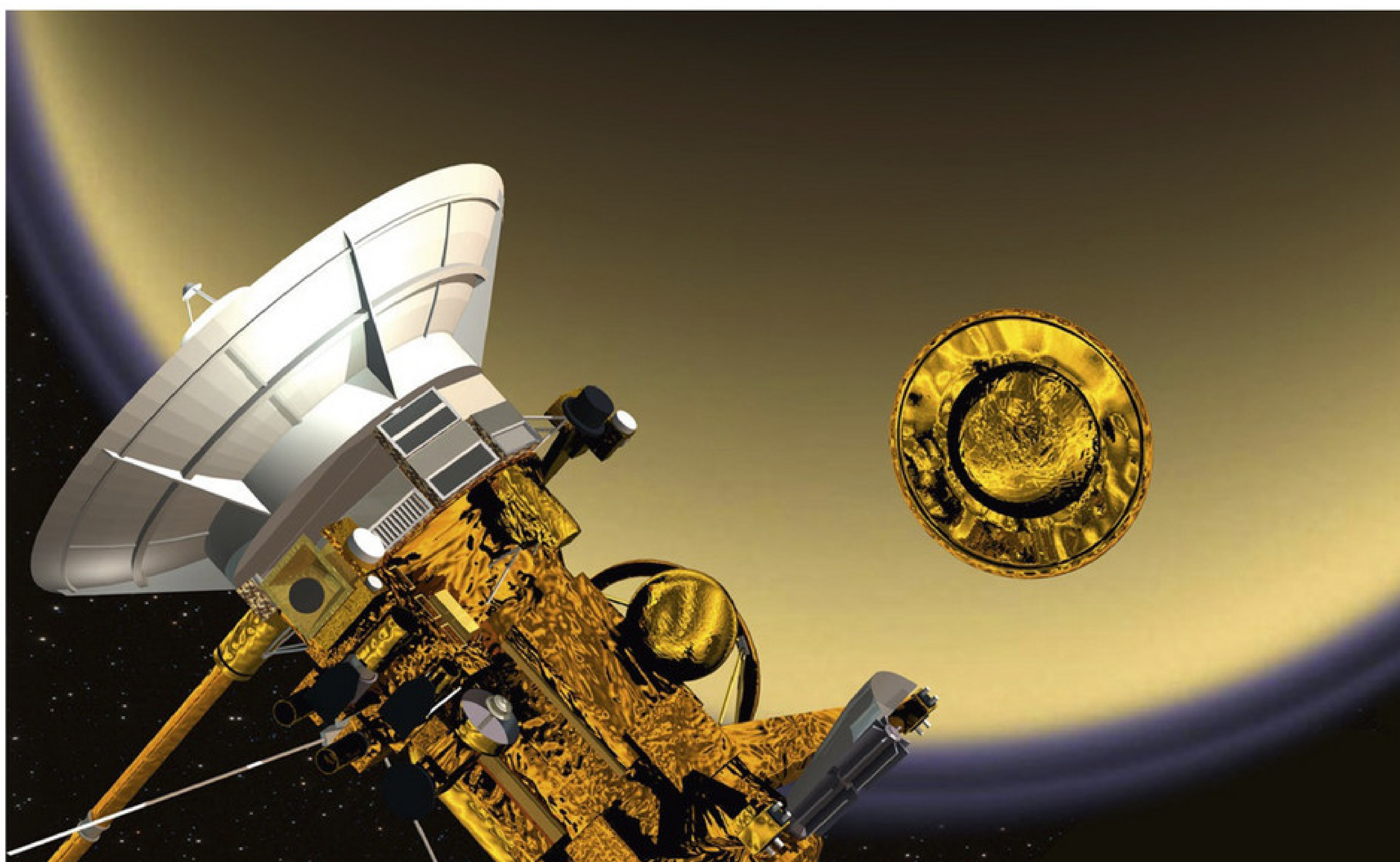

▲ **figuur 26** ellipsbanen in ons zonnestelsel (niet op schaal)

De zon staat bij een ellipsbaan niet in het midden van de ellips, maar in een van de brandpunten. De aarde beschrijft bij benadering een cirkelbaan, dus met een lage excentriciteit ($e = 0{,}0167$). De banen van Mercurius en Pluto hebben juist een relatief hoge excentriciteit: respectievelijk 0,2056 en 0,2488 (figuur 26).

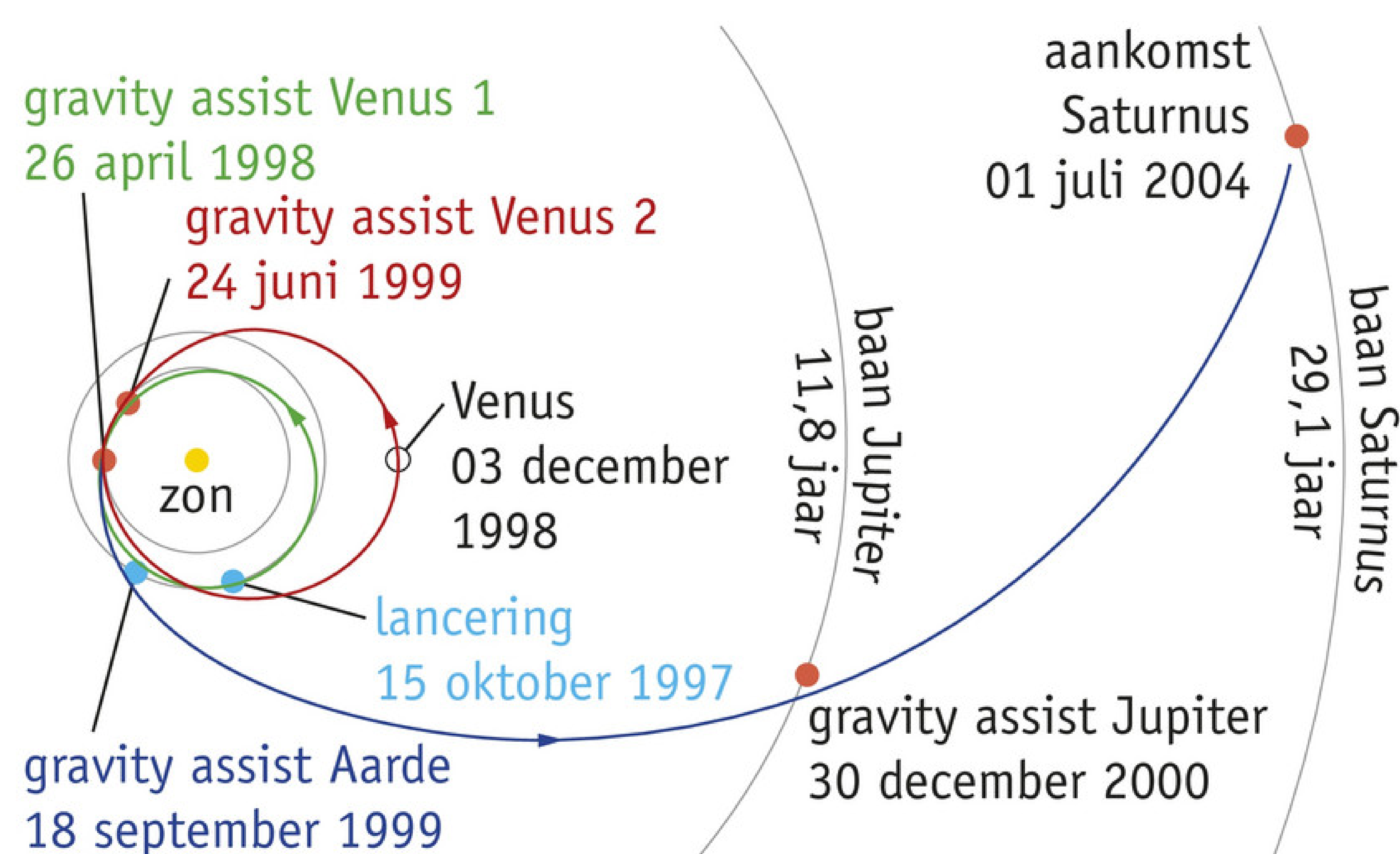
Kometen hebben een nog grotere excentriciteit, in de orde van 0,7 tot 0,9. Het is echter niet zo dat hoe lager de massa van de planeet is, hoe groter de excentriciteit. De massa van Jupiter is bijvoorbeeld ruim driehonderd keer zo groot als die van de aarde. De excentriciteit is niet kleiner, maar bijna drie keer zo groot als die van de aarde.
De drie wetten die Kepler opstelde, gingen over hoe een planeet in zo'n ellipsbaan beweegt en over het verband tussen de verschillende banen. Je bent deze wetten in dit hoofdstuk al tegengekomen. De eerste wet stelt dat planeten in ellipsbanen rond de zon draaien, met de zon in een van de brandpunten. De tweede wet, de perkenwet, stelt dat de baansnelheid van een planeet toeneemt naarmate deze dichter naar de zon toe beweegt. De derde wet stelt dat $\frac{T^2}{r^3}$ voor alle planeten constant is. Je hebt dit verband in opdracht 30 al kunnen afleiden.

## Sondes

Een **ruimtesonde**, kortweg **sonde**, is een onbemand vaartuig dat niet om de aarde draait, maar door het zonnestelsel beweegt en metingen verricht. Er zijn tot op heden tientallen sondes de ruimte ingestuurd met verschillende doelen en wisselend succes. Een sonde voert een ingewikkelde baan uit die bovendien tussendoor wordt bijgestuurd. Zo kunnen bijvoorbeeld meerdere planeten, manen of kometen worden bezocht, of er kan extra snelheid worden opgebouwd met een zwaartekrachtslinger (*gravity assist*) door langs een planeet te manoeuvreren.
Een voorbeeld daarvan is de Cassini-Huygens-missie naar Saturnus, gelanceerd in 1997 (figuur 27). De sonde werd na lancering twee keer langs Venus en vervolgens langs de aarde en Jupiter gestuurd om extra vaart te maken. Vijf jaar later kwam de missie aan bij Saturnus (figuur 28).



▲ **figuur 27** De Huygens-module is net losgelaten door Cassini voor een landing op de Saturnus-maan Titan (impressie).




▲ **figuur 28** de ingewikkelde baan van Cassini-Huygens

## Kogelslingeren

Een satelliet die om de aarde draait, heeft een verwaarloosbare massa ten opzichte van de aarde. Uit de derde wet van Newton volgt dat de kracht van de satelliet op de aarde even groot is als de kracht van de aarde op de satelliet. Maar uit de tweede wet van Newton volgt dat het effect van die vrij kleine kracht voor een grote massa (de aarde) kleiner is dan voor een kleine massa (de satelliet). Het gevolg is dat je kunt zeggen dat de satelliet draait om het massamiddelpunt van de aarde, dat in feite 'stilstaat'.
Anders wordt het wanneer de massa's van de voorwerpen die om elkaar draaien meer aan elkaar gelijk zijn, zoals het geval is bij de aarde en de maan. De maan heeft een massa die ongeveer honderd keer zo klein is als die van de aarde. Het effect dat de maan op de aarde heeft, kun je daarom niet verwaarlozen. Dit lijkt op wat er gebeurt bij kogelslingeren (figuur 29). De kogel draait niet alleen om de atleet: de atleet draait ook een klein beetje 'om de kogel'. De atleet kan onmogelijk op dezelfde plaats blijven staan.



▲ **figuur 29** kogelslingeren

Bij berekeningen aan satellieten rond de aarde, planeten rond de zon of sondes door ons zonnestelsel kun je het effect van de lichtere massa's op de zwaardere altijd verwaarlozen. Dat maakt het al wat gemakkelijker. Een sonde door ons zonnestelsel kun je dan modelleren door de bewegingen van de planeten expliciet in het model te zetten, met de straal en de omlooptijd van de baan zoals je die in Binas vindt. Ruimtevaartorganisaties, zoals ESA en NASA, maken hiervoor gebruik van geavanceerde computermodellen. Zo kunnen ze met grote precisie missies plannen die vele jaren beslaan. En mocht er dan toch een kleine afwijking zijn, dan hebben de meeste sondes nog stuurraketten om hiervoor te corrigeren.

**Onthoud!**

- De cirkelbaan is een speciale ellipsbaan, waarbij de brandpunten van de ellips samenvallen.
- Planeten en kometen draaien in ellipsbanen rond de zon, waarbij de zon in een van de brandpunten van de ellipsbaan staat.
- De excentriciteit van een ellips geeft aan hoeveel de ellips afwijkt van een cirkel.
- Wanneer voorwerpen met een vergelijkbare massa om elkaar heen draaien, dan beïnvloeden ze elkaar. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de aarde en de maan. In het geval van planeten rond de zon en satellieten rond de aarde kun je de grootste massa als stilstaand beschouwen.
- Sondes zijn wetenschappelijke ruimtevaartuigen die door het zonnestelsel worden gestuurd om planeten, manen en kometen te onderzoeken. Hun baan wordt op ingewikkelde wijze beïnvloed door de massa's die ze tegenkomen. Bovendien worden ze bijgestuurd met stuurraketten.

## Opdrachten

**35** Brandpunten
Hoeveel brandpunten heeft een cirkel?

**36** Ellipsbaan
Een planeet draait in een ellipsbaan om de zon.
In welk punt zal de planeet de grootste baansnelheid hebben: dicht bij de zon of ver ervan af? Leg je antwoord uit.

**37** Baanstraal en omlooptijd
Er is een verband tussen de omlooptijd $T$ van een planeet om de zon en de afstand $r$ tot de zon.
- **a** Geef dit verband zoals het in Binas te vinden is.
- **b** Hoe moet je de omlooptijd $T$ en de afstand $r$ in een diagram uitzetten om een recht evenredig verband te vinden?
- **c** Maak voor je keuze uit opdracht b een tabel met gegevens voor ons zonnestelsel. Gebruik gegevens uit Binas.
- **d** Teken het bijbehorende diagram en controleer of het verband inderdaad recht evenredig is.

**38** Exoplaneten
De omlooptijd van een exoplaneet is te bepalen uit de schommelingen in de ster waar de exoplaneet omheen draait. Als de massa van die ster bekend is, is ook de afstand te bepalen waarop de exoplaneet om de ster draait. Met deze methode is echter de massa van de exoplaneet niet te bepalen.
- **a** Leg uit waarom niet.

Om de massa van de exoplaneet te bepalen, wordt de gravitatiewet van Newton gebruikt.
- **b** Leg uit dat je alleen de grootte van $F_g$ van de ster op de exoplaneet hoeft te weten om de massa van de exoplaneet te kunnen bepalen.

$F_g$ kan worden gevonden doordat de exoplaneet ook een kracht op de ster uitoefent.
- **c** Noem de wet van Newton waaruit dat volgt.

Stel dat een ver planetenstelsel vanaf de aarde wordt waargenomen in het vlak waarin de exoplaneten rond hun ster draaien.
- **d** Leg uit welke meting moet worden uitgevoerd om de grootte van $F_g$ te vinden.
- **e** Waarom werkt deze methode vooral goed bij exoplaneten met een (zeer) grote massa?

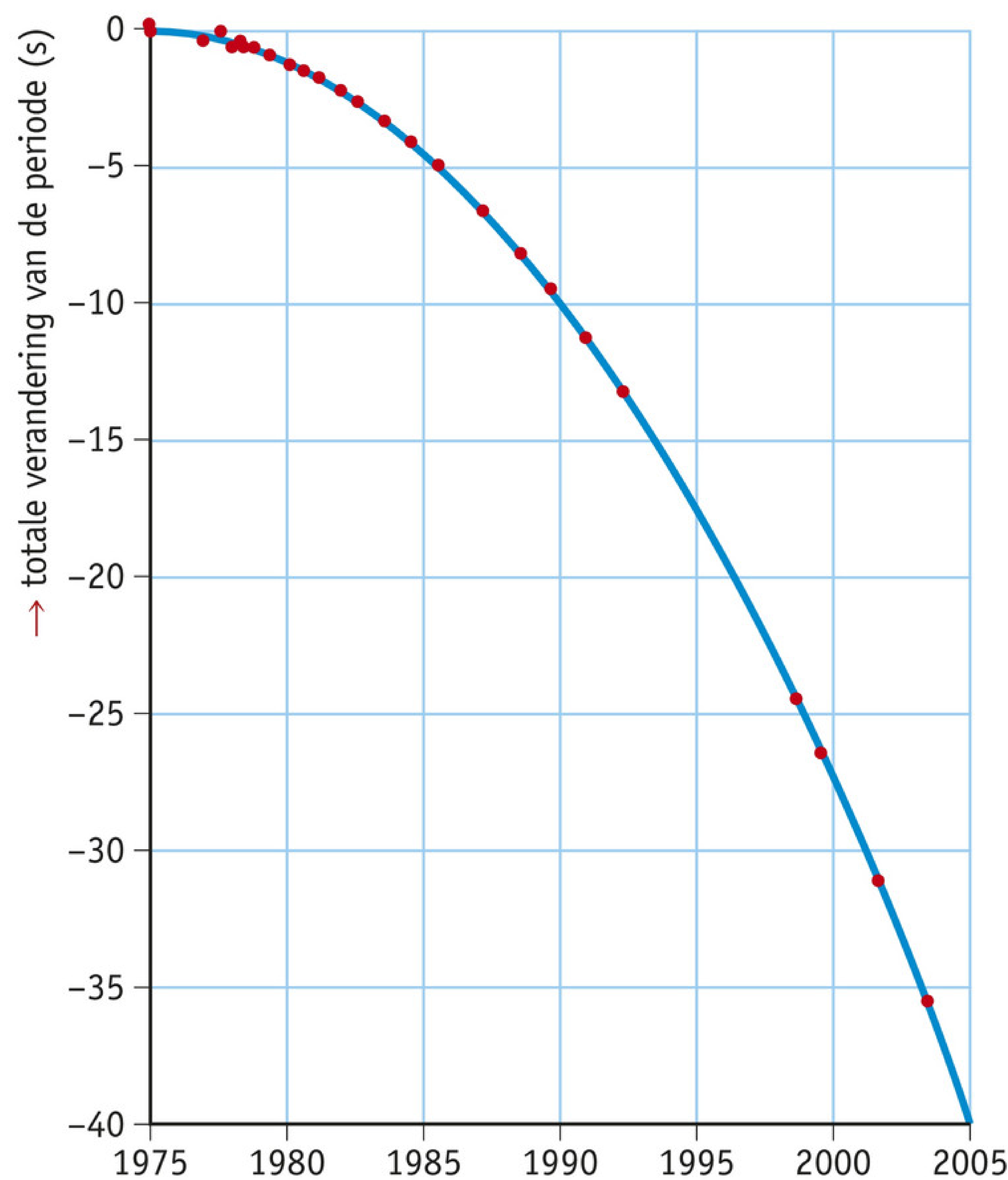
**39** Neutronensterren
Russell Hulse en Joseph Taylor kregen in 1993 de Nobelprijs voor metingen aan een systeem van twee neutronensterren waarvan er één met regelmaat signalen uitzendt. Zo'n zendende neutronenster wordt een pulsar genoemd.
De neutronensterren draaien op een afstand van 3 lichtseconden (ls) in 7,75 uur om elkaar en hebben elk een massa van 1,4 keer de massa van de zon.
- **a** Leg met behulp van zowel de tweede als de derde wet van Newton uit dat het niet zo kan zijn dat een van de sterren vrijwel stilstaat en dat de andere daaromheen draait.

Hoewel de twee neutronensterren in ellipsbanen om elkaar heen draaien, kun je voor een schatting van de orde van grootte van de gravitatie-energie toch uitgaan van een cirkelbaan van de ene neutronenster om de andere, die stilstaat. In dit systeem van twee neutronensterren is de absolute waarde van de gravitatie-energie groter dan in het systeem zon–aarde.

Het scheelt een aantal orden van grootte.

**b** Bereken hoeveel orden van grootte dit scheelt.

**c** Toon door middel van een afleiding aan dat de totale energie van het systeem gelijk is aan $-\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2$, met $m_1$ de massa van de rondcirkelende ster. Stel hiertoe de gravitatiekracht gelijk aan de middelpuntzoekende kracht.



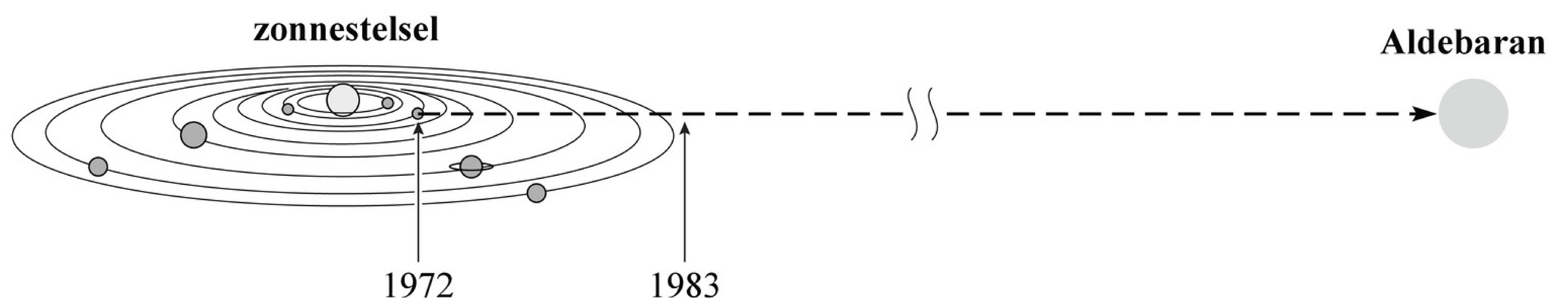

▲ **figuur 30** De twee neutronensterren gaan steeds sneller om elkaar heen draaien.

De twee neutronensterren gaan steeds sneller om elkaar heen draaien (figuur 30). De grote ontdekking van Taylor en Hulse is dat dit komt doordat zogenoemde zwaartekrachtsgolven worden uitgezonden.

**d** Leg uit dat de omlooptijd kleiner wordt als het systeem energie verliest door straling. Toon daartoe eerst aan dat de snelheid $v$ steeds groter wordt en dus de straal $r$ steeds kleiner.

**40** Pioneer-10

De verkenner Pioneer-10 werd gelanceerd in 1972 en was in 1983 het eerste ruimtevaartuig dat ons zonnestelsel verliet. In 1983 bewoog Pioneer-10 met een snelheid van ongeveer 2,6 AE per jaar in de richting van de rode ster Aldebaran (figuur 31).




▲ **figuur 31** de reis van Pioneer-10 naar Aldebaran (niet op schaal)

**a** Bereken hoeveel jaar Pioneer-10 over zijn reis naar Aldebaran zal doen als hij zijn hele reis met de gegeven snelheid beweegt.

Pioneer-10 kan het zwaartekrachtveld van de zon alleen verlaten als de kinetische energie van de Pioneer-10 groter is dan de bindende gravitatie-energie. In 1983 bevond Pioneer-10 zich op een afstand van $6{,}2 \cdot 10^{12}$ m van de zon.

**b** Toon aan dat zijn snelheid dan ruimschoots voldoende is om uit het zonnestelsel te ontsnappen.

Pioneer-10 beweegt op zijn reis door de Kuipergordel. Dit is een gebied van ijzig interplanetair stof dat ons zonnestelsel omgeeft, op een afstand tussen 30 en 100 AE. Doordat Pioneer-10 dit interplanetaire stof 'opveegt', neemt de massa van Pioneer-10 toe. Een voorwerp dat tijdens zijn beweging in massa toeneemt, ondervindt daardoor een tegenwerkende kracht:

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v$$

Voor de tegenwerkende kracht op Pioneer-10 ten gevolge van het 'opvegen' van het stof geldt:

$$F = A \cdot \rho \cdot v^2$$

Hierin is:
- $A$ de frontale oppervlakte van Pioneer-10 in $m^2$;
- $\rho$ de stofdichtheid in kg $m^{-3}$;
- $v$ de snelheid van Pioneer-10 in m $s^{-1}$.

**c** Leid deze formule af. Maak gebruik van de hiervoor gegeven formule en van formules uit Binas.

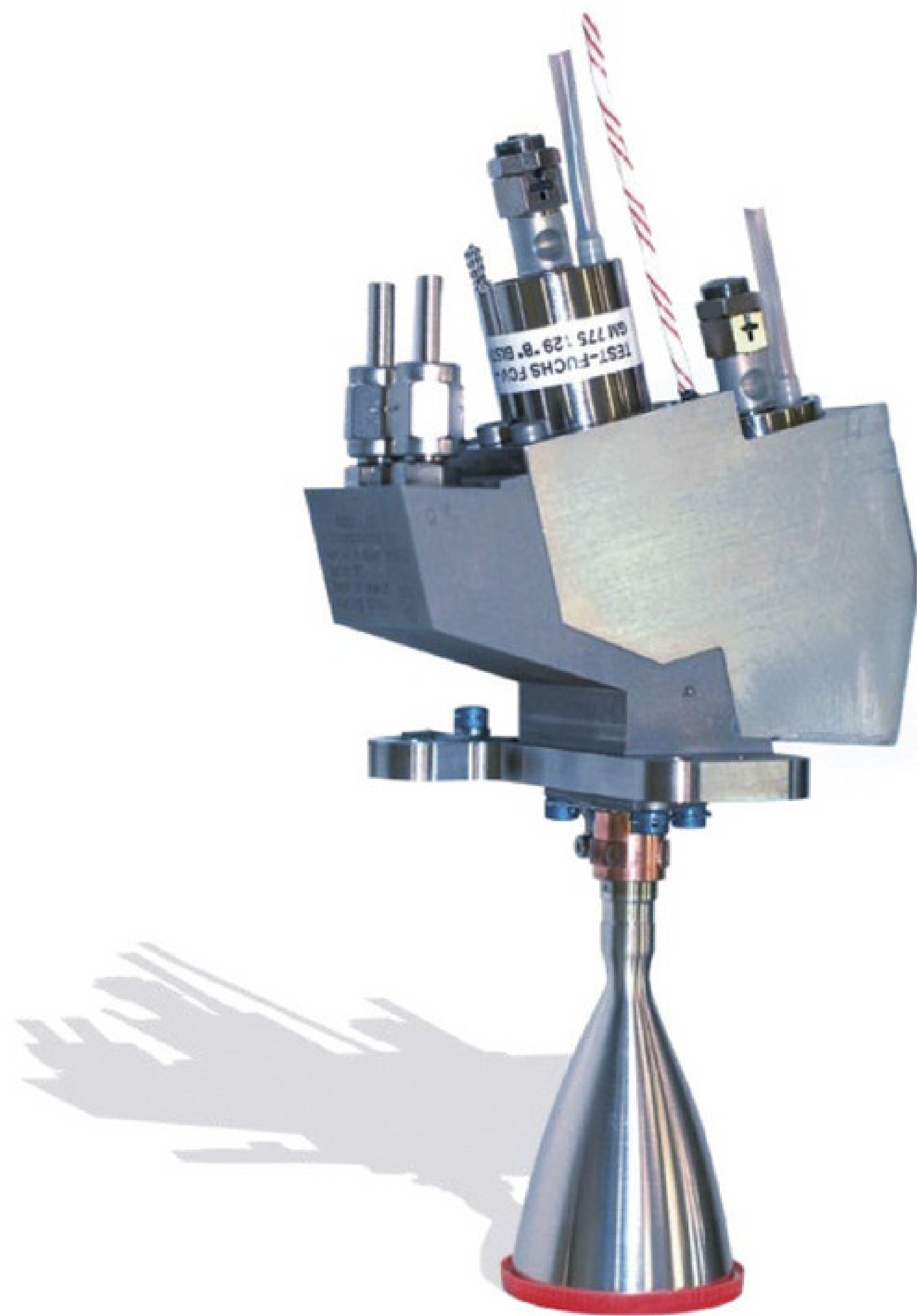
De snelheid van Pioneer-10 blijkt iets sterker af te nemen dan kan worden verklaard door de aantrekkingskracht van het zonnestelsel. Als de extra vertraging het gevolg is van de hiervoor genoemde tegenwerkende kracht, is daarmee de waarde voor de stofdichtheid van de Kuipergordel te bepalen.
De antenneschotel van Pioneer-10 heeft een diameter van 2,74 m. De frontale oppervlakte van Pioneer-10 is gelijk aan de oppervlakte van de antenneschotel. Op een bepaalde plaats in de Kuipergordel had Pioneer-10 (massa = 241 kg) een snelheid van $1{,}23 \cdot 10^4$ m $s^{-1}$ en ondervond de sonde een extra vertraging van $8{,}74 \cdot 10^{-10}$ m $s^{-2}$.

**d** Bereken hieruit de stofdichtheid op die plaats in de Kuipergordel, als wordt aangenomen dat deze extra vertraging volledig wordt veroorzaakt door het 'opvegen' van het stof.

*naar: examen 2011-I*

## Eindopdracht

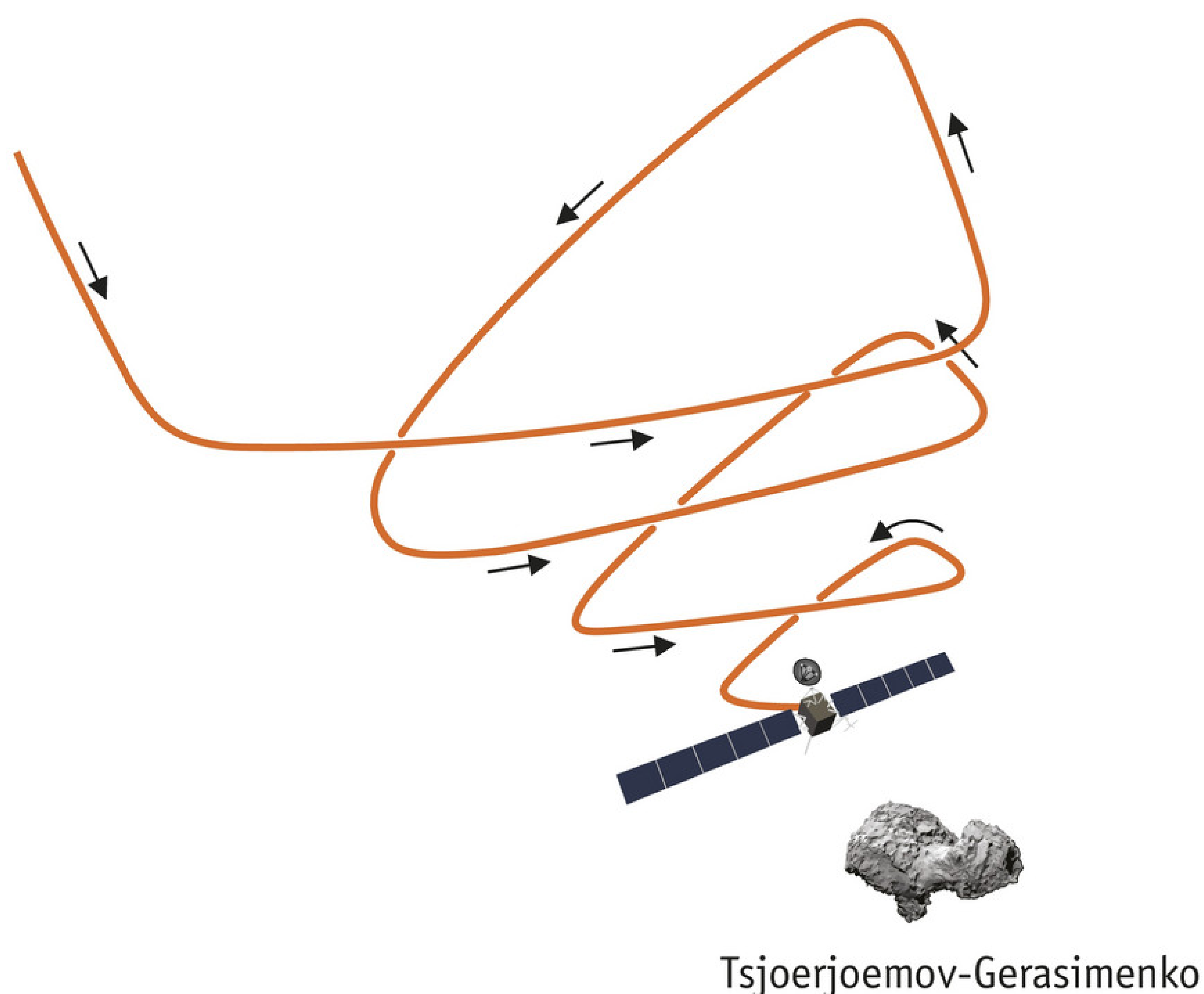
**41** Rosetta-missie
De Rosetta-missie had als doel de sonde Philae op het oppervlak van de komeet Tsjoerjoemov-Gerasimenko te laten landen om onderzoek te doen naar de samenstelling ervan. De oorspronkelijke baan van Rosetta zou de sonde met een snelheid van bijna 800 m $s^{-1}$ *langs* de komeet brengen. Daarom moest de relatieve snelheid ten opzichte van de komeet in verschillende stappen worden teruggebracht. Dit gebeurde met 24 zogenoemde 10-Newton-thrusters (figuur 32).



◀ **figuur 32** een 10-Newton-thruster met onderaan de uitlaat

**a** Leg uit hoe thrusters gebruikmaken van de derde wet van Newton om een kracht van 10 N te kunnen uitoefenen.

In eerste instantie werd Rosetta in een zogenoemde piramidebaan gebracht, waarbij de sonde een driehoekige baan volgde die steeds kleiner werd en dichter bij de komeet kwam (figuur 33). Deze baan begon op een afstand van 100 km van de komeet. De relatieve snelheid ten opzichte van de komeet was toen 1,0 m $s^{-1}$.




▲ **figuur 33** de 'piramidebaan' van Rosetta (niet op schaal)

**b** Laat door een berekening zien dat de gravitatiekracht op die afstand tussen de sonde ($1{,}2 \cdot 10^3$ kg) en de komeet ($1{,}0 \cdot 10^{13}$ kg) slechts $8{,}0 \cdot 10^{-5}$ N bedroeg.

**c** Toon aan dat de zijden van de piramidebaan vrijwel recht zijn. Bereken daartoe hoeveel meter Rosetta van haar pad afweek per afgelegde kilometer, als de kracht van opdracht b loodrecht op de bewegingsrichting stond.

Uiteindelijk werd Rosetta in een cirkelvormige baan op een afstand van 10 km van de komeet gebracht.

**d** Bereken de omlooptijd van Rosetta om de komeet.

Op 12 november 2014 werd Philae losgekoppeld van Rosetta om op de komeet te landen. Die landing ging niet vlekkeloos: de harpoenen die Philae aan het komeetoppervlak moesten verankeren, werkten niet en de sonde stuiterde met een snelheid van 38 cm $s^{-1}$ terug de ruimte in. De komeet heeft een diameter van 4 km.

**e** Toon door middel van een berekening aan of deze snelheid groter is dan de ontsnappingssnelheid van Tsjoerjoemov-Gerasimenko.

Op de dag van de landing van Philae bevond de komeet zich op een afstand van $446 \cdot 10^9$ m van de zon en had hij een snelheid van 18,4 km $s^{-1}$ ten opzichte van de zon. De kleinste afstand tot de zon, het zogenoemde perihelium, is voor deze komeet $186 \cdot 10^9$ m.

**f** Bereken welke snelheid de komeet in het perihelium zal hebben. Houd alleen rekening met de aantrekkingskracht van de zon.

**g** Leg op basis van de totale energie van de komeet uit dat de baan van de komeet gesloten is.

Voor een cirkelvormige baan rond de zon geldt een verband tussen de omlooptijd en de baanstraal.

**h** Geef dit verband.

De baan van de komeet Tsjoerjoemov-Gerasimenko is elliptisch en de omlooptijd bedraagt 6,6 jaar. Het verband bij opdracht h geldt dan nog steeds wanneer niet de baanstraal wordt ingevuld, maar de halve lange as van de ellipsbaan.

**i** Bereken hiermee de grootste afstand van de komeet tot de zon, het zogenoemde aphelium.

# 6 Practicum

## EXPERIMENT 1 De derde wet van Newton ervaren (begripspracticum)

**Inleiding**
De derde wet van Newton kun je in veel situaties om je heen herkennen.
In dit experiment maak je het effect van de derde wet zichtbaar.

**Onderzoeksvraag**
Hoe kan het effect van de derde wet van Newton zichtbaar worden gemaakt?

**Benodigdheden**
twee bureaustoelen met wieltjes; twee ongeveer even zware leerlingen; weegschaal; zwaar voorwerp (10 tot 20 kg)

**Uitvoering**
- Leerling A zit op een stoel, met zijn voeten op het onderstel, vrij van de grond.
- Leerling B zit op de andere stoel met zijn voeten tegen de zitting van de stoel van leerling A (figuur 7).
- Markeer op de grond het midden tussen de stoelen.
- Leerling B zet zich nu af. Doe het beheerst, zodat de stoelen niet omvallen.
- Markeer de posities waar de bureaustoelen tot stilstand komen.
- Herhaal de voorgaande stappen, maar nu zet leerling A zich af.
- Herhaal de voorgaande stappen, maar nu neemt een van de leerlingen een zwaar voorwerp op schoot.

**Verwerking**

**1** Hoe kun je zien dat in alle situaties beide leerlingen een kracht op elkaar uitoefenen?
**2** Hoe kun je zien dat beide krachten ongeveer even groot zijn wanneer de massa's van de leerlingen even groot zijn?
**3** Waardoor lijken de krachten niet precies even groot?
**4** Hoe kun je bepalen dat beide krachten (ongeveer) even groot zijn wanneer de massa's niet gelijk zijn?

**Conclusie**
**5** Beantwoord de onderzoeksvraag.

## EXPERIMENT 2 Krachten in een cirkelbaan (onderzoekspracticum)

**Inleiding**
Als je een voorwerp aan een touwtje rondslingert, dan is er een spankracht in het touwtje aanwezig die zorgt voor de middelpuntzoekende kracht. De grootte van die kracht hangt af van een paar factoren.

**Onderzoeksvraag**
Hoe hangt de middelpuntzoekende kracht in een eenparige cirkelbeweging af van de massa van het voorwerp, de straal van de baan en de baansnelheid?

**Benodigdheden**
gewichtjes (25 g, 50 g); veerunster; touw (50 cm); liniaal

**Uitvoering**
- Maak aan het eind van het touw een lusje waaraan je een gewichtje kunt bevestigen. Teken op het touw om de 10 cm een merkteken.
- Bevestig het gewichtje van 25 g aan het eind van het touw.
- Draai het touw met een constante snelheid rond, met een straal van 10 cm. Laat de snelheid toenemen en neem waar hoe de kracht verandert waarmee het touw aan je hand trekt.
- Herhaal de vorige stap, maar laat nu steeds de straal 10 cm toenemen.
- Herhaal de vorige twee stappen, nu met het gewichtje van 50 g.

**Verwerking**

**1** Schrijf je waarnemingen duidelijk op.
**2** Hoe zou je de methode kunnen aanpassen om het onderzoek kwantitatief te maken?

**Conclusie**
**3** Beantwoord de onderzoeksvraag.

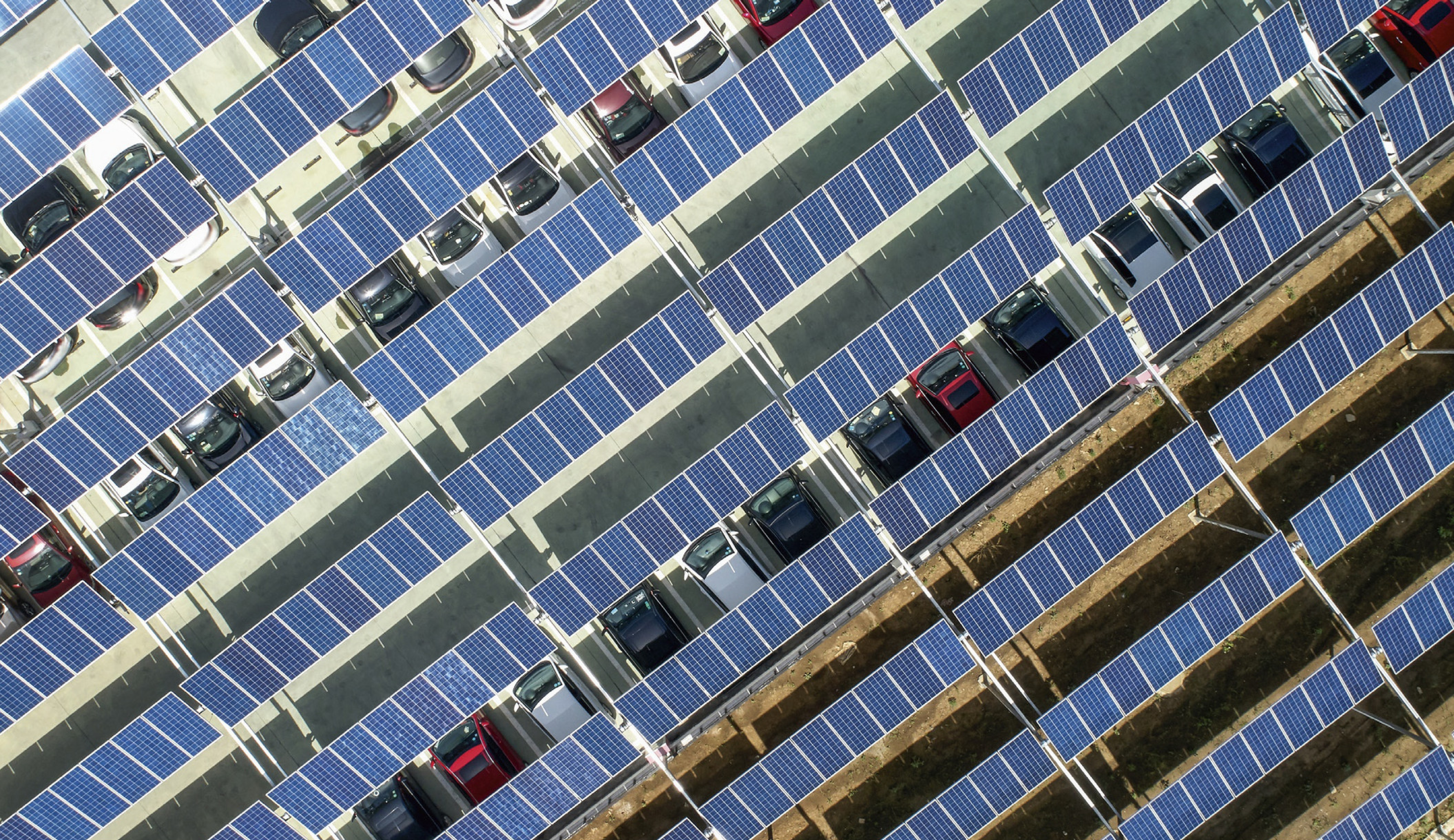
## ONDERZOEK Reis van een sonde modelleren

**Inleiding**
Door een sonde langs een planeet te sturen, kan deze een extra ‘zetje’ krijgen en zo versnellen. Dit bespaart veel brandstof, waardoor het lanceergewicht van de sonde lager kan zijn, of waardoor er meer wetenschappelijke apparatuur kan worden meegestuurd. In dit onderzoek modelleer je deze manoeuvre, die ook wel zwaartekrachtslinger of *gravity assist* wordt genoemd.

**Onderzoeksvragen**
**1** Hoe moet een sonde langs een planeet worden gestuurd zodat de sonde versnelt?
**2** Hoeveel kan een sonde versnellen door een zwaartekrachtslinger?

**Praktisch**
Ga in je model uit van een sonde die vanaf de aarde wordt gelanceerd en richting Mars wordt gestuurd voor een zwaartekrachtslinger. Houd in eerste instantie alleen rekening met de aantrekking van Mars, niet met die van de zon en de aarde. Verwerk de baan van Mars in je model door deze expliciet in te voeren, niet door deze te modelleren. Je kunt voor dit onderzoek ook gebruikmaken van het herexamen natuurkunde uit 2016 (tijdvak II).

**Conclusie**
Beantwoord de onderzoeksvragen.



## HOOFDSTUK 14

# Natuurwetten en modellen

“Maak alles zo eenvoudig mogelijk, maar niet eenvoudiger dan mogelijk,” zei Einstein over het opstellen van modellen van de werkelijkheid. Het eerste deel van de uitspraak was in de middeleeuwen al bekend als ‘het scheermes van Ockham’: maak niet meer aannamen dan nodig. Het tweede deel is een waarschuwing: er mag geen enkele waarneming in tegenspraak zijn met je model. Anders moet je model, je vereenvoudigde beschrijving van de werkelijkheid, worden aangepast. Zo leiden experimenten tot nieuwe modellen en nieuwe modellen tot nieuwe voorspellingen, die vervolgens in nieuwe experimenten worden getoetst. In dit hoofdstuk oefen je met delen van de examenstof en bekijk je hoe het proces van modelvorming werkt.

### Praktijk



### Theorie



### Maatschappij

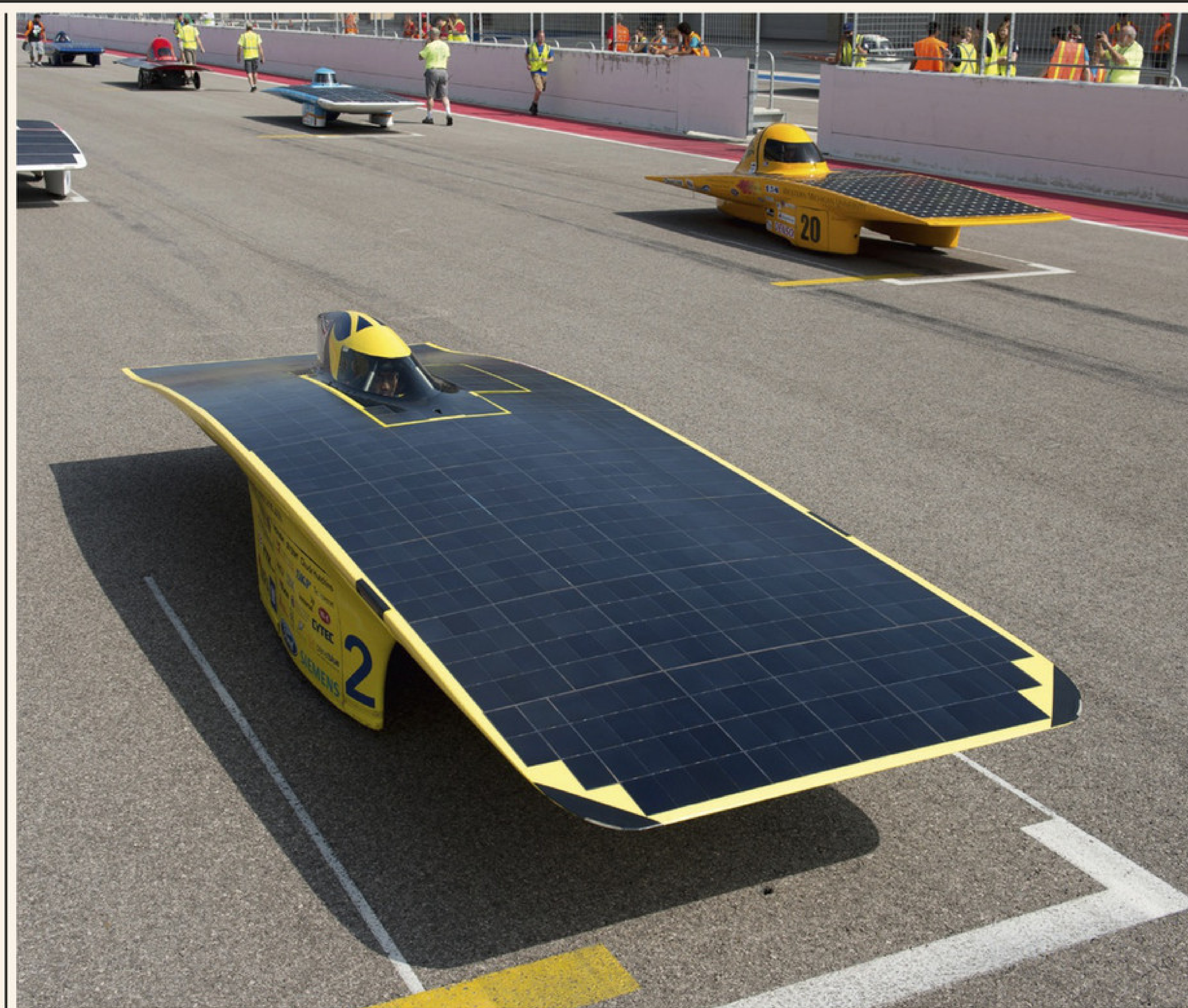


**Maak de online Voorkennistoets voordat je aan dit hoofdstuk begint.**

**Praktijk**

# Snel met licht

Een avontuurlijke reis naar Australië, meedoen aan de prestigieuze World Solar Challenge en in goede teamgeest werken aan een groenere toekomst: het is niet gek dat deelnemende studenten enthousiast zijn. De zonneautoteams van de drie Nederlandse technische universiteiten zijn allemaal van topklasse. Het team van de Universiteit Twente vindt het prachtig te zien wat je zonder hulp van ervaren wetenschappers kunt doen. Delft heeft de langste traditie: het Nuna-team is veelvoudig wereldkampioen in de snelle *Challenger*-klasse. Eindhoven is wereldkampioen in de *Cruiser*-klasse, gericht op personenauto's.



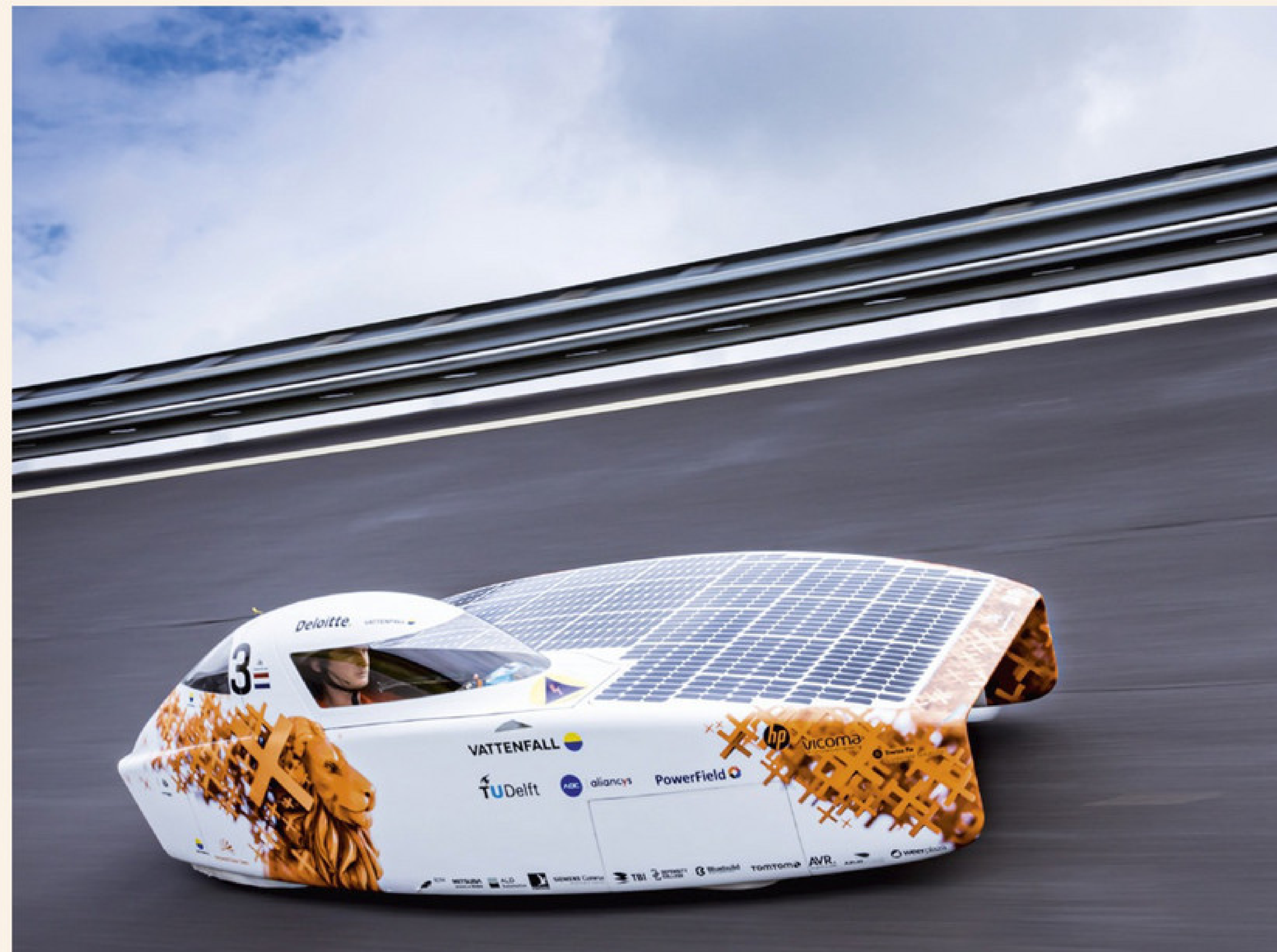
De World Solar Challenge is een tweejaarlijkse race voor zonneauto's, die sinds 1987 wordt georganiseerd in Zuid-Australië. De 3021 km lange route loopt van het noorden naar het zuiden, van Darwin naar Adelaide. De zonnepanelen op het dak en soms aan de zijkanten van de auto's leveren alle energie. Die energie kan direct worden gebruikt voor het aandrijven van de elektromotor, maar een team kan er ook voor kiezen op zonnige momenten een deel van de energie op te slaan in een accu. Teamleden in een volgauto maken onderweg de planning met behulp van computermodellen. Is het nu zonnig, maar wordt het later bewolkt? Dan is het tactisch om iets minder vermogen direct te verbruiken en de accu op te laden voor later gebruik. Wind en hellingen maken de planning van het energiegebruik een uitdagende puzzel.

Al vele maanden voorafgaand aan de race zijn de concurrerende ontwerpteams uit de verschillende deelnemende landen druk in de weer met de voorbereiding en het ontwerpen van de auto's. Er komt van alles bij kijken: het kiezen van het type zonnecellen, het bedenken en verbeteren van het aerodynamische ontwerp, het doorrekenen en in windtunnels testen van wat op de tekentafel is bedacht, het voldoen aan de voorschriften van de organisatie op het gebied van veiligheid, het bedenken van racestrategieën. Ieder teamlid heeft zijn specialisme: van computerprogramma's schrijven tot de taken van een manager, zoals het letten op de financiën. Communicatie is ook een belangrijk onderdeel: praten met sponsoren en de media, zoals de universiteitsbladen en de NOS die op televisie verslag doet van de race. De coureur is niet de enige held.

## Realistische regels

De futuristische zonnewagens werden in de loop van de jaren steeds sneller. Zonnecellen en andere technologieën werden geavanceerder. Tijdens de race over duizenden kilometers in Zuid-Australië worden snelheden gehaald die normaal zijn op de snelweg. De organisatie heeft nu beperkingen opgelegd die ervoor

> “Met computermodellen maak je een racestrategie, die pas je voortdurend aan als de weersomstandigheden veranderen.”




◀ **figuur 2** de Delftse Nuna 9S-auto in actie

zorgen dat de race veilig blijft en die garanderen dat de coureurs geen boetes krijgen voor snelheidsovertredingen. Ook maken de regels duidelijk dat de technologie niet alleen voor races wordt ontwikkeld, maar dat alles uiteindelijk is bedoeld voor toepassing in gewoon personenvervoer. Een van de maatregelen is dat de oppervlakte van de zonnecellen die de wagens bedekken, is gelimiteerd. Gewone siliciumzonnecellen mogen in de Challenger-klasse maximaal 4,0 $m^2$ beslaan, zonnecellen die meerdere laagjes van verschillende halfgeleiders hebben, de zogenoemde multi-junction-zonnecellen, slechts 2,64 $m^2$. De bestuurder moet tegenwoordig ook meer rechtop zitten dan in de beginjaren van de World Solar Challenge. Ook zijn er beperkingen aan hoe zwaar de oplaadbare accu mag zijn. Op deze manier blijft het een uitdaging een goede nieuwe zonneracewagen te ontwerpen en wordt er steeds meer geleerd op het gebied van zuinigheid en energieopslag.

## Nieuwe klasse

Bij de race die al het langst bestaat, de Challenger-klasse, gaat het om de snelste tijd. Net als in races met formule 1-benzinemonsters zit er één coureur in de racewagen. Sinds 2013 is er ook de Cruiser-klasse, waarbij de belangrijkste eis is dat er meerdere passagiers mee kunnen in de zonnewagen. Een team van vier mensen aan boord krijgt meer punten dan een team van drie personen. Cruisers kunnen niet geheel op zonne-energie rijden, maar er zijn precieze regels over hoeveel kilowattuur een team




▲ **figuur 1** het team van de Universiteit Twente in 2019 met de *Red Shift*




▶ **figuur 3** de Eindhovense cruiser *Stella Vie* in actie in Australië

mag bijladen uit het lichtnet. Hoe minder je gebruikmaakt van de optie extra energie toevoegen, hoe hoger je scoort bij de jury.
De snelheid waarmee het parcours wordt afgelegd, blijft het belangrijkst, maar de jury geeft ook punten voor zaken als veiligheid en comfort. Die aspecten komen misschien de snelheid niet ten goede, maar zijn wel heel belangrijk voor toekomstige toepassingen van zonnewagens als regulier vervoermiddel. Dit soort wedstrijdregels maakt het nog uitdagender een goed model voor de prestaties van een auto op te stellen en daarmee winnende strategieën te bedenken. Je moet bijvoorbeeld berekenen hoeveel langzamer de auto zal rijden door een extra passagier, wat je vervolgens moet afwegen tegen de extra punten die je daarvoor krijgt.

## Spanning en sensatie

Zonneraces leveren spectaculaire beelden op: van voortrazende futuristische bolides, auto's die in de berm op hun kant staan om zo veel mogelijk zon te vangen, tot teams die uit pure blijdschap collectief in een fontein springen. Een verslag van de Sasol-zonnerace 2018 in Zuid-Afrika waarbij het gaat om de grootste afgelegde afstand, laat zien dat frustratie van de voorlaatste dag kan omslaan in euforie aan de finish. Het Delftse team moest zijn voorsprong inleveren, nadat een van de teamleden zijn tas in de strategiewagen van het Japanse Tokai-team had gegooid. Hoewel dat volgens het Delftse team per ongeluk ging, dienden de Japanners bij de raceorganisatie een klacht in wegens spionage. Delft kreeg 126 km strafafstand, maar toch won het team een dag later de race. "We hebben alles op alles gezet die achterstand in te halen," vertelde teamlid Luka opgetogen. "In de laatste etappe hebben we bijvoorbeeld gebruikgemaakt van onze innovatie 'Intelligent Cruise Control'. Dat is een systeem dat zich aanpast aan de omgeving. Als er bijvoorbeeld een berg aankomt, past de wagen daarop het vermogen aan."
Meedoen aan een race is niet alleen een topprestatie die je kunt zien als gekwalificeerd zijn voor een soort olympisch eindtoernooi na hard trainen. De teamleden leren ook veel dingen die nuttig zijn voor hun toekomst:

### Wind, vuur en veiligheid

In 2019 waren de omstandigheden van de Bridgestone World Solar Challenge zwaar en bleek dat resultaten uit het verleden geen garanties bieden voor de toekomst. In de *Challenger*-klasse lag het team van Twente op kop, maar een windvlaag blies de zonneauto van de weg. De bestuurder was ongedeerd maar het team moest opgeven. Het Delftse team lag toen op kop en had met nog maar 300 kilometer te gaan de overwinning voor het grijpen. Maar... door nog onbekende oorzaak vatte de wagen vlam en brandde uit. Ook hier was de coureur gelukkig ongedeerd. Na het uitvallen van Delft ging de overwinning naar het Belgische Agoria Solar Team, van studenten van de universiteit Leuven. Zij konden feestvieren, samen met het Eindhovense team dat voor de vierde keer op rij de *Cruiser*-klasse op zijn naam schreef.

uiteraard op hun vakgebied, maar ook op het gebied van samenwerken en omgaan met sterke concurrentie. Dat laatste uit zich bij verschillende oud-deelnemers die bedrijven in zonnevervoerstechnologie hebben opgezet. Maar *serious business* is voor de meeste deelnemers niet de belangrijkste reden om mee te doen aan dit project, het is voor hen simpelweg één groot avontuur, de uitdaging van hun leven.

## Opdrachten

Bestudeer eerst de theorie van dit hoofdstuk voordat je de volgende opdrachten uitvoert.

**1** Specificaties
De afmetingen van een zonnewagen zijn van grote invloed op de luchtweerstand.
- **a** Geef de formule die de luchtweerstand beschrijft.
- **b** Leg van alle factoren in die formule uit of je ze in de praktijk kunt beïnvloeden.
- **c** Zoek de specificaties op van de eerste en de meest recente Nuna-zonneauto en vergelijk deze. Doe dit voor de afmetingen van de auto en voor de oppervlakte van de zonnepanelen.

Zonneauto's hebben geen 'vleugels' die de auto naar beneden drukken en op de weg houden, zoals formule 1-auto's die hebben.
- **d** Leg uit dat dit te maken heeft met het verschil tussen de parcoursen die beide typen auto's afleggen. Gebruik in je antwoord het begrip 'middelpuntzoekende kracht'.

**2** Aerodynamica
Veel zonneraceauto's zijn asymmetrisch: de uitstulping aan de bovenkant waar de bestuurder zit, zit aan de rechterkant, ter hoogte van de wielen.
- **a** Leg uit dat dit een voordeel heeft wat de luchtweerstand betreft ten opzichte van een coureur die in het midden zit.
- **b** Leg uit dat er ook een voordeel is bij het opvangen van licht.
- **c** Leid een verband af tussen het geleverde vermogen $P$ en de constant vol te houden snelheid $v$ in het geval er een tegenwind $v_t$ is. Ga ervan uit dat er geen rolweerstand is.
- **d** Doe hetzelfde voor het geval er een meewind $v_m$ is.
- **e** Verwerk nu ook een constante rolweerstand $F_{rol}$ in de antwoorden van opdracht c en d.
- **f** Beredeneer welke voordelen een trein boven een auto heeft wat betreft weerstand en geef antwoord op de vraag of zonnetreinen in de toekomst tot de mogelijkheden zullen behoren.

**3** Racemodel
Het vermogen dat de zon levert aan een horizontaal gepositioneerd zonnepaneel is evenredig met de sinus van de hoek die aangeeft hoe hoog de zon boven de horizon staat.
- **a** Leg dat uit met behulp van een schets.

Het vermogen dat de zonnepanelen van een bepaalde zonnewagen leveren gedurende een dag waarop de zon 14 uur lang op is, kan als volgt worden geschreven als functie van de tijd:
$P = 300 \cdot \sin(6{,}23 \cdot 10^{-5} \cdot t)$.
- **b** Maak een computermodel voor het opladen van de accu gedurende een dag waarop niet wordt geracet.
- **c** Maak een computermodel waarmee je de afstand als functie van de tijd berekent als het door de zon geleverde vermogen op elk moment van de dag onmiddellijk wordt gebruikt. Ga uit van een rechte, horizontale weg, een verwaarloosbare rolweerstand en windstil weer. Ga ervan uit dat de wagen door aanduwen bij de start al een snelheid van 1,0 m $s^{-1}$ heeft gekregen.
- **d** Maak een model waarin je een ingewikkelder situatie beschrijft dan die van opdracht c, naar eigen inzicht. Tip: in de loop van het hoofdstuk kom je ideeën tegen voor rijden op een helling, vertrek vanuit stilstand, het inzetten van de energievoorraad van een accu, en voor het in je model opnemen van mee- of tegenwind.

**4** Rendement
Leg met behulp van de begrippen 'foton' en 'halfgeleider' uit dat een zonnecel nooit een rendement van 100% kan hebben.

# 1 Schaalwetten en evenredigheden

In deze paragraaf leer je:
- redeneren met evenredigheden;
- verbanden afleiden door substitutie;
- schaalwetten opstellen en gebruiken.

## Schaalwetten

In veel gevallen hangen grootheden af van de afmetingen van een voorwerp. De weerstand van een stroomdraad, het uitgestraalde vermogen van een ster en de massa van een massieve bol zijn voorbeelden hiervan. Als je bestudeert met welke *macht* een grootheid afhangt van een lengteschaal, dan zoek je naar een **schaalwet**.

**Voorbeeldopgave 1**

Een kleuter kan over kiezelsteentjes lopen zonder dat dit pijn doet, een volwassene kan dat niet.
Geef hiervoor een verklaring door na te gaan op welke manier de druk op de voetzolen afhangt van de grootte van de persoon. Ga er daarbij van uit dat een volwassene een in alle richtingen evenveel uitvergrote kleuter is. Noem de lengteschaal $l$ en gebruik in je antwoord ‘De druk is evenredig met $l^\alpha$’, waarbij je de waarde van $\alpha$ invult.

*Uitwerking*
- De druk wordt gegeven door $p = \dfrac{F}{A}$, met $F$ de kracht die op een oppervlakte $A$ wordt uitgeoefend.
- De kracht is gelijk aan de zwaartekracht. Die is evenredig met de massa, die op zijn beurt evenredig is met het volume.
- Het volume van de persoon is evenredig met $l^3$, de oppervlakte van de voetzolen is evenredig met $l^2$.
- De druk is dus evenredig met: $\dfrac{l^3}{l^2} = l^1$
- Bij een grotere lengteschaal hoort een grotere druk, dus de volwassene voelt de steentjes meer dan de kleuter.

Bij het afleiden van een verband, bijvoorbeeld van een schaalwet, combineer je vaak meerdere bekende formules. Het invullen van de ene formule in de andere heet **substitutie**.

**Voorbeeldopgave 2**

Als een hemellichaam geen atmosfeer heeft, kan een satelliet zonder last te hebben van wrijving een cirkelbaan vlak boven het oppervlak beschrijven. De gravitatiekracht doet dienst als middelpuntzoekende kracht.
Vergelijk hemellichamen met dezelfde dichtheid, maar verschillende grootte. Hoe hangt de tijdsduur $T$ van een rondje af van de afmeting van het hemellichaam? Geef een afleiding waarbij je deze wet van Kepler gebruikt: $\dfrac{r^3}{T^2} = \dfrac{G \cdot M}{4\pi^2}$ en verder alleen bekende formules uit Binas.

*Uitwerking*
- In dit geval is de baanstraal $r$ bij benadering gelijk aan de straal van het hemellichaam $R$.

- Voor de massa van het hemellichaam geldt: $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$
- Als je dit in de wet van Kepler invult op de plaats van $M$, dan krijg je:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi^2} = \frac{G \cdot \rho \cdot R^3}{3\pi}$$

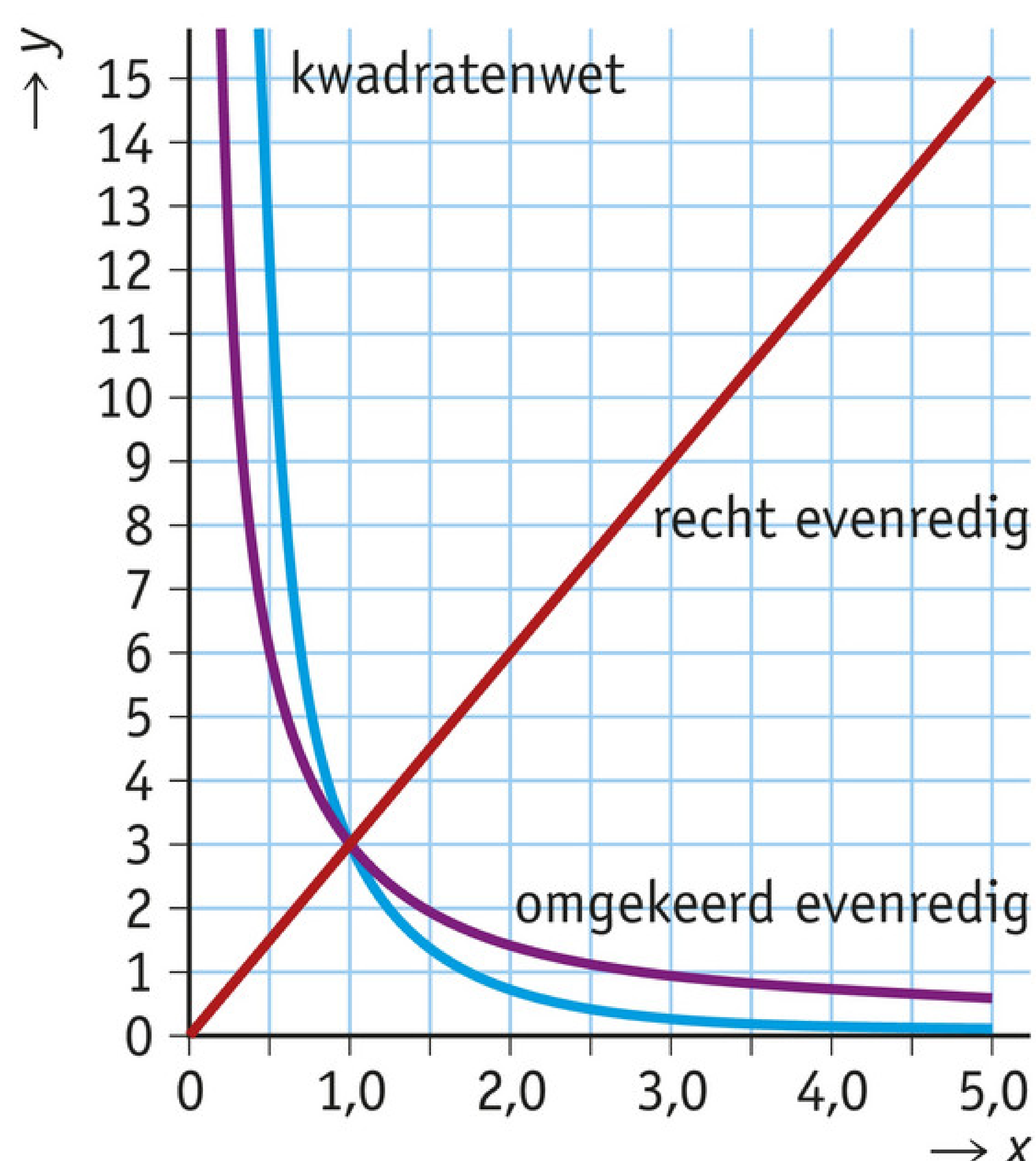
- $R^3$ valt weg, je houdt over: $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}}$
- De tijdsduur van een rondje hangt dus alleen af van de dichtheid van het hemellichaam waar de satelliet omheen cirkelt, niet van de afmeting.

De uitkomst van voorbeeldopgave 2 is een schaalwet, want als een grootheid zoals $T$ niet afhangt van de afmeting $R$, dan kun je dat schrijven als: $T \sim R^0$

## Drie belangrijke verbanden

Drie soorten verbanden dien je te herkennen:

- het **recht evenredig verband**; hierbij geldt dat als de ene grootheid twee keer zo groot wordt, de andere ook twee keer zo groot wordt. Als $A$ recht evenredig is met $B$, dan is de grafiek van $A$ (verticaal) tegen $B$ (horizontaal) een rechte lijn door de oorsprong (figuur 1). Je noteert dan $A \sim B$. Bijvoorbeeld: uit $I = \frac{U}{R}$ volgt dat $I \sim U$ als de weerstand $R$ constant is;
- het **omgekeerd evenredig verband**; hierbij geldt dat als de ene grootheid twee keer zo groot wordt, de andere twee keer zo klein wordt. Bijvoorbeeld: uit $I = \frac{U}{R}$ volgt dat $I \sim R^{-1}$ als je de spanning constant houdt. De grafiek is een dalende curve: een hyperbool (figuur 1);
- de **kwadratenwet**; in veel gevallen kun je een verband opstellen waarbij een grootheid kleiner wordt op grotere afstand $r$ van een centraal punt, evenredig met $r^{-2}$. De gravitatiekracht is een belangrijk voorbeeld: $F_g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$. Als de afstand 2× zo groot is, dan is de kracht 4× zo klein. De grafiek is een dalende curve die sneller daalt dan bij een omgekeerd evenredig verband (figuur 1).




▲ **figuur 1** drie verbanden

**Voorbeeldopgave 3**

De gloeidraad van een broodrooster straalt warmte uit (figuur 2). De hoeveelheid uitgestraalde warmte, de temperatuur van de draad en de kleur van het uitgestraalde licht hangen af van de eigenschappen van de draad en van de aangelegde elektrische spanning.



▲ **figuur 2** roodgloeiende gloeidraden in een broodrooster

Je sluit twee even lange draden van hetzelfde materiaal aan op het lichtnet. De ene draad is 2× zo dik als de andere.

**a** Laat zien dat de dikke draad 4× zo veel warmte uitstraalt als de dunne. Neem aan dat de soortelijke weerstand bij hogere temperatuur constant blijft.

**b** Leg uit dat de absolute temperatuur van de dikke gloeidraad 1,2× zo hoog is als die van de dunne gloeidraad.

**c** Was de aanname bij opgave a verantwoord? Licht je antwoord toe.

Het maximum van de stralingskromme van de dunne gloeidraad ligt bij $\lambda_{max}$ = 1,2 µm.

**d** Bereken $\lambda_{max}$ bij de dikke gloeidraad.

*Uitwerking*

**a**
- Als de dikte het enige verschil is tussen de draden, dan is de weerstand omgekeerd evenredig met de oppervlakte van de doorsnede $A$.
- Bij een 2× zo dikke draad is die oppervlakte 4× zo groot en dus is de weerstand 4× zo klein.
- Bij dezelfde spanning is de stroomsterkte $I = \frac{U}{R}$ dan 4× zo groot.
- Omdat geldt $P = U \cdot I$ is het vermogen en dus ook de uitgestraalde warmte per seconde 4× zo groot.

**b**
- De wet van Stefan-Boltzmann zegt dat het uitgestraalde vermogen evenredig is met de oppervlakte van de buitenkant van de draad en met $T^4$.
- Het vermogen is 4× zo groot, de oppervlakte 2× (want de oppervlakte van de cilinder is gelijk aan $2\pi rl$, $l$ is gelijk en $r$ is 2× zo groot).
- Dus $T^4$ is 2× zo groot en $T$ is $\sqrt[4]{2}$ = 1,189, afgerond 1,2× zo groot.

**c** De temperatuur is wel hoger, maar niet van een heel andere orde van grootte dan eerst. Dus het is aannemelijk dat de soortelijke weerstand niet sterk verandert.

**d** De verschuivingswet van Wien (zie hoofdstuk 9) zegt dat $\lambda_{max}$ omgekeerd evenredig is met $T$, dus de waarde wordt $\frac{1{,}2\ \mu\text{m}}{1{,}2} = 1{,}0\ \mu\text{m}$.

Soms kun je een schaalwet of een andere formule afleiden, maar soms wordt alleen gevraagd na te gaan of een formule kan kloppen wat de eenheden betreft. Je doet dan een **eenhedenbeschouwing**, ook wel dimensieanalyse genoemd. Uitgangspunt is dat de eenheid van het linkerlid van een vergelijking dezelfde moet zijn als de eenheid van het rechterlid. In hoofdstuk 1 is afgesproken dat daarbij de notatie $[f] = s^{-1}$ betekent: de eenheid van de grootheid frequentie is seconde tot de macht min 1.

## Onthoud!

- Belangrijke verbanden zijn recht evenredigheid, omgekeerd evenredigheid en de kwadratenwet.
- Door substitutie kunnen verbanden worden afgeleid uit andere verbanden.
- Een schaalwet geeft weer met welke macht een grootheid afhangt van de grootte van een voorwerp.

## Opdrachten

**1** Classificeren

Geef steeds aan of de genoemde grootheden recht evenredig met elkaar zijn, omgekeerd evenredig, of dat ze voldoen aan de kwadratenwet. Licht elk antwoord toe met een formule.

**a** De lichtintensiteit $I$ van een ster zoals je die op aarde meet en de afstand $r$ tussen de ster en de aarde.

**b** De waarden voor $\Delta p$ en $\Delta x$ zoals die voorkomen in de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

**c** De kracht $F$ die een lading ondervindt en de afstand $r$ tussen die lading en het middelpunt van een geladen metalen bol.

**d** De trillingstijd $T$ en $\sqrt{m}$ als een massa $m$ trilt aan een veer met veerconstante $C$.

**e** De stroomsterkte $I$ en de spanning $U$ als je de spanning varieert bij een weerstand die voldoet aan de wet van Ohm.

**f** De stroomsterkte $I$ en de spanning $U$ als je twee even felle lampen vergelijkt: een autolamp die werkt op 12 V en een lamp in huis die werkt op het lichtnet.

**g** De massa en de versnelling in gevallen waar sprake is van een constante kracht.

**2** Evenredigheden bij schakelingen

Een weerstand van 10 Ω en een weerstand van 15 Ω zijn in serie geschakeld. In de weerstand van 10 Ω wordt een vermogen van 2,0 W omgezet.

**a** Bereken het vermogen dat wordt omgezet in de weerstand van 15 Ω. Gebruik in je antwoord het woord ‘evenredig’.

De weerstand van 10 Ω en de weerstand van 15 Ω zijn nu parallel geschakeld, met een andere spanningsbron. In de weerstand van 10 Ω ontstaat 2,0 W aan warmte.

**b** Bereken het vermogen dat hoort bij de weerstand van 15 Ω. Gebruik weer het woord ‘evenredig’.

**3** Afleiding Kepler

Als een planeet een cirkelbaan beschrijft rond een ster met massa $M$, dan doet de gravitatiekracht dienst als middelpuntzoekende kracht.

Leid met behulp van formules die in Binas staan, af dat geldt: $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4}$

**4** Eenhedenbeschouwingen

Als een massa aan een heel dun touw heen en weer slingert, dan hangt de trillingstijd $T$ af van de lengte $l$ van het touw. Ook is de grootte van de valversnelling $g$ van belang.

**a** Bepaal de waarde van $\alpha$ in $T = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\alpha}$ door middel van een eenhedenbeschouwing.

De golfsnelheid $v$ in een gespannen snaar hangt af van de spankracht en van hoe zwaar de snaar is. Ahmad vraagt zich af of de formule $v = \sqrt{\frac{F_{span}}{m}}$ zou kunnen zijn, met $m$ de massa van de snaar.

**b** Laat met een eenhedenbeschouwing zien dat deze formule niet kan kloppen.

**c** Verander de formule op zo'n manier dat de eenheden wel kloppen.

Je weet dat de energiewaarden die een opgesloten quantumdeeltje kan hebben, afhangen van de lengte $L$ van het 'doosje' waarin het is opgesloten. Stel dat je in jouw oude verkreukelde Binas niet meer kunt lezen of geldt: $E_n = \frac{n^2 \cdot h^2}{8\pi^2 \cdot m \cdot L^2}$ of $E_n = \frac{n^2 \cdot h^2}{8\pi^2 \cdot m \cdot L^3}$

**d** Gebruik een eenhedenbeschouwing om aan te tonen welke formule de juiste is.

**5** Muis en olifant

Een muis (figuur 3) met massa $m$ = 20 g eet zo'n 4 g plantaardig voedsel per dag. Een olifant met massa $m = 4{,}0 \cdot 10^3$ kg eet 150 kg hooi per dag. Een olifant eet dus veel meer dan een muis, maar het verband tussen de massa van het dier en de hoeveelheid voedsel is niet recht evenredig. Als het wel recht evenredig zou zijn, zou gelden: hoeveelheid voedsel ~ $m$.

**a** Ga met de gegeven getallen na dat het verband niet recht evenredig is.

Ga ervan uit dat een zoogdier alleen energie nodig heeft om zichzelf warm te houden en dat het dier alleen warmte verliest door zijn huid.

**b** Leid af dat onder deze aannamen geldt: hoeveelheid voedsel ~ $m^{2/3}$

In werkelijkheid wordt een verband gemeten dat luidt: hoeveelheid voedsel ~ $m^{3/4}$

**c** Leg uit op welke punten het model dat leidt tot hoeveelheid voedsel ~ $m^{2/3}$ inaccuraat zou kunnen zijn.

**d** Leg uit dat het model van opdracht b beter is dan het meest naïeve model dat zegt: hoeveelheid voedsel ~ $m$.



▲ **figuur 3** een klein knaagdier

**6** Kleur gloeidraad

Uit de kleur van een gloeidraad kun je afleiden hoe heet hij is.

**a** Geef het verband tussen de golflengte waarbij een voorwerp maximale intensiteit uitstraalt en de absolute temperatuur.

**b** Naar welke natuurkundige is deze wet genoemd? Kies uit: *Ludwig Boltzmann – Jozef Stefan – Wilhelm Wien*.

**c** Hoe luidt de wet die naar de andere twee natuurkundigen van opdracht b is vernoemd?

**d** Leg uit of het verband tussen golflengte en absolute temperatuur een recht evenredig of een omgekeerd evenredig verband is.

Een gloeidraad zendt naast zichtbaar licht ook infraroodstraling uit. Stel dat de rode gloeidraad in figuur 2 maximaal uitstraalt bij een golflengte van 1200 nm.

**e** Bereken de temperatuur van de draad.

Iemand redeneert: “Als ik wil dat het maximum bij 600 nm komt te liggen, dan kan ik de benodigde temperatuur uitrekenen. Vervolgens kan ik met $P = \sigma \cdot A \cdot T^4$ uitrekenen hoeveel keer zo veel vermogen moet worden omgezet als bij 1200 nm. Dan beredeneer ik dat het omgezette vermogen evenredig is met $U^2$ en zo bereken ik welke spanning ik moet gebruiken om die kleur te krijgen.”

**f** Leg uit dat deze persoon in zijn model een aanname doet die te maken heeft met de wet van Ohm.

**7** Tegenkracht

Als een zonneauto een helling van $\alpha = 20°$ oprijdt, gaat dat langzaam en daardoor is de component van de zwaartekracht langs de helling de enige tegenwerkende kracht die van belang is.

**a** Leg uit dat in die omstandigheden het geleverde vermogen evenredig is met de snelheid.

Bij een bepaalde afdaling heffen de rolweerstand en de component van de zwaartekracht langs de helling elkaar precies op. De luchtweerstand is bij hoge snelheid de bepalende tegenkracht.

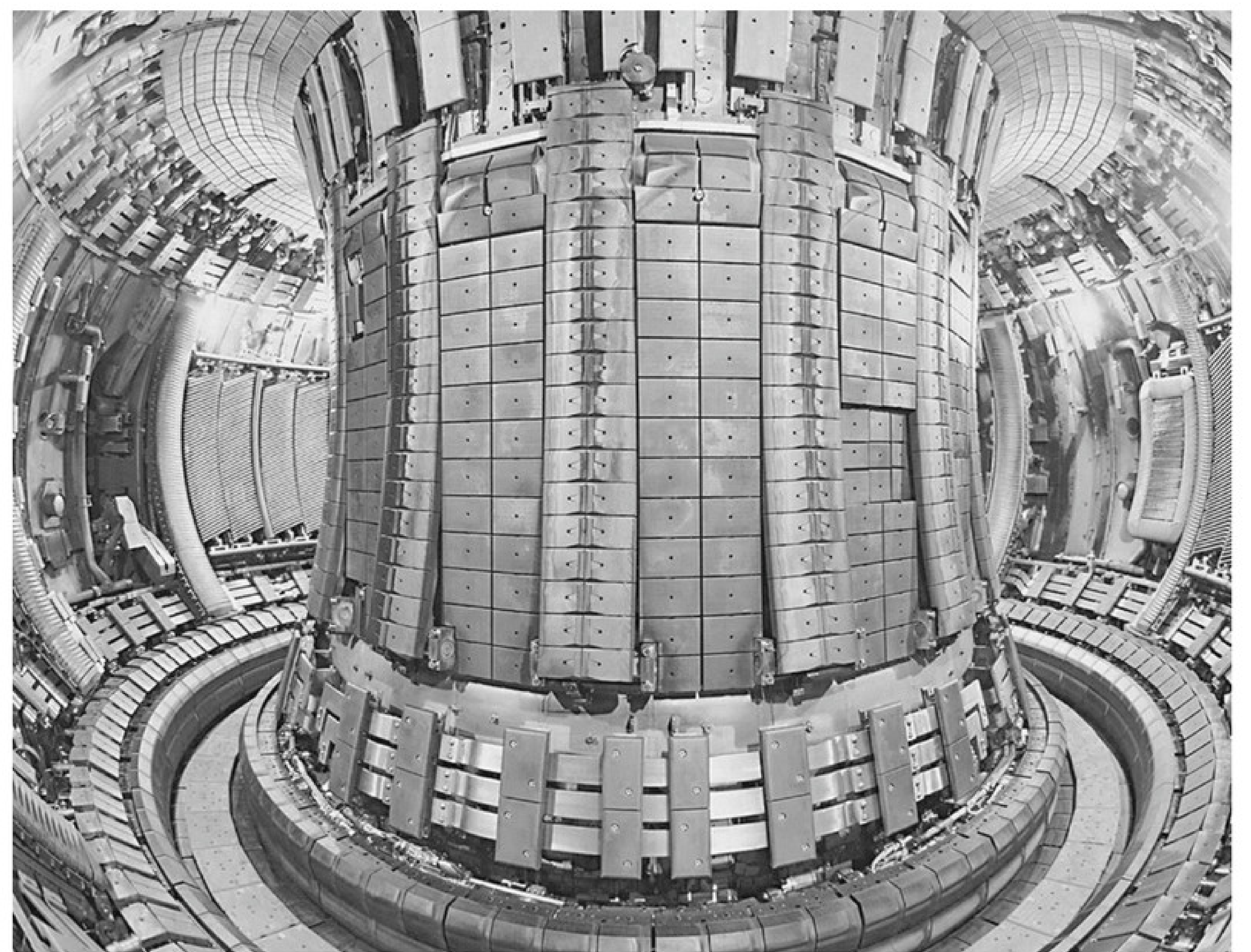
**b** Leg uit dat in die omstandigheden het geleverde vermogen evenredig is met de derde macht van de snelheid.

**8** Tokamak

Lees het artikel.

Een tokamak is een kernfusiereactor waarin met behulp van een magnetisch veld een plasma kan worden opgesloten. Zo’n plasma bestaat uit atoomkernen en vrije elektronen. In een tokamak wordt kernfusie bestudeerd, met als uiteindelijk doel een economisch rendabele energiebron te krijgen.

Kernfusie kan alleen optreden als het plasma heet genoeg is, de dichtheid hoog genoeg is en de opsluittijd lang genoeg is. Het woord tokamak is afkomstig uit het Russisch: тороидальная камера с магнитными катушками, hetgeen betekent: torusvormige ruimte met magnetische spoelen.



▲ **figuur 4** binnenkant van een tokamak

Er ontsnapt veel energie uit de torus. Enerzijds is dat gewenst, want deze energie wordt omgezet in thermische energie. Dit is de energie die de centrale levert. Anderzijds is dat ongewenst, want er is een hoge temperatuur nodig om het fusieproces op gang te houden. Daarom moet er bij de bestaande tokamaks energie van buiten worden toegevoerd.
In Zuid-Frankrijk is ITER-tokamak in aanbouw. Alle afmetingen van ITER zijn een factor $k$ groter dan bij bestaande tokamaks. Hierdoor worden ook het volume en de buitenoppervlakte van het plasma groter. De energieproductie is evenredig met het volume van het plasma. Het energieverlies is evenredig met de buitenoppervlakte van het plasma. Bij ITER hoeft netto geen energie van buitenaf te worden toegevoerd om het fusieproces op gang te houden.
Leg uit hoe het komt dat een grotere factor $k$ dit teweegbrengt.
*naar: examen 2015-I*

# 2 Verbanden met wiskunde

In deze paragraaf leer je:
- welke oplossingsmethode bij welk verband hoort;
- hoe je met een coördinatentransformatie grafisch onderzoekt of een verband geldig is;
- wat de relatie is tussen differentiëren en het gebruiken van raaklijnen.

Bij wiskunde leer je vergelijkingen oplossen. Voor lineaire, kwadratische en exponentiële vergelijkingen bestaan standaardmethoden. Die heb je bij natuurkundevraagstukken vaak nodig. Door grafieken te tekenen kun je onderzoeken hoe de ene grootheid schaalt met de andere. Je onderzoekt dan door welk wiskundig verband de metingen worden beschreven. Ten slotte wordt de wiskundige vaardigheid ‘differentiëren’ gebruikt bij natuurkunde. De afgeleide heeft te maken met de steilheid van een grafiek. Sommige grootheden kun je *berekenen* met behulp van de afgeleide, óf *bepalen* door een raaklijn te tekenen.

## De gevraagde grootheid vrijmaken

Met een formule kun je de waarde van een grootheid berekenen. Als de spanning gelijk is aan $U$ = 230 V en voor de stroomsterkte geldt $I$ = 2,0 A, dan geldt $P = U \cdot I = 4{,}6 \cdot 10^2$ W. Soms ligt het anders: gegeven is dat een apparaat 60 W omzet als het wordt aangesloten op 230 V, gevraagd is de stroomsterkte. Het verband is dan een **vergelijking** geworden: je zoekt voor welke $I$ geldt dat $60 = 230 \cdot I$. Dat zoeken naar de waarde waarbij is voldaan aan de voorwaarde, heet het **oplossen van de vergelijking**.
Het verschil tussen een verband waarmee je iets uitrekent en een vergelijking die je moet oplossen, is niet zo heel groot, want in plaats van $P = U \cdot I$ te gebruiken, zou je het verband ook kunnen schrijven met wat je wilt weten voorop: $I = \frac{P}{U}$. Daarna kun je de waarde voor de stroomsterkte gewoon uitrekenen. Dit omschrijven van de formule naar een vorm die begint met ‘$I$ =’ wordt ook wel ‘oplossen voor $I$’ genoemd.

### Voorbeelden: kwadratisch en exponentieel

Uiteraard hangt het van het soort vergelijking af wat je moet doen. Een lineaire vergelijking, een kwadratische vergelijking, een vergelijking met een exponentieel verband: ze hebben allemaal hun eigen tips en trucs. Wel is er een algemeen principe: je voert links en rechts van het gelijkteken dezelfde operaties uit. Het is vaak een goed idee dit in kleine stapjes te doen. Hier volgen twee voorbeelden met daarna algemene aandachtspunten.

**Voorbeeldopgave 4**

Een elektron wordt versneld tot het een kinetische energie heeft van 2,0 eV.
Bereken de snelheid van het elektron.

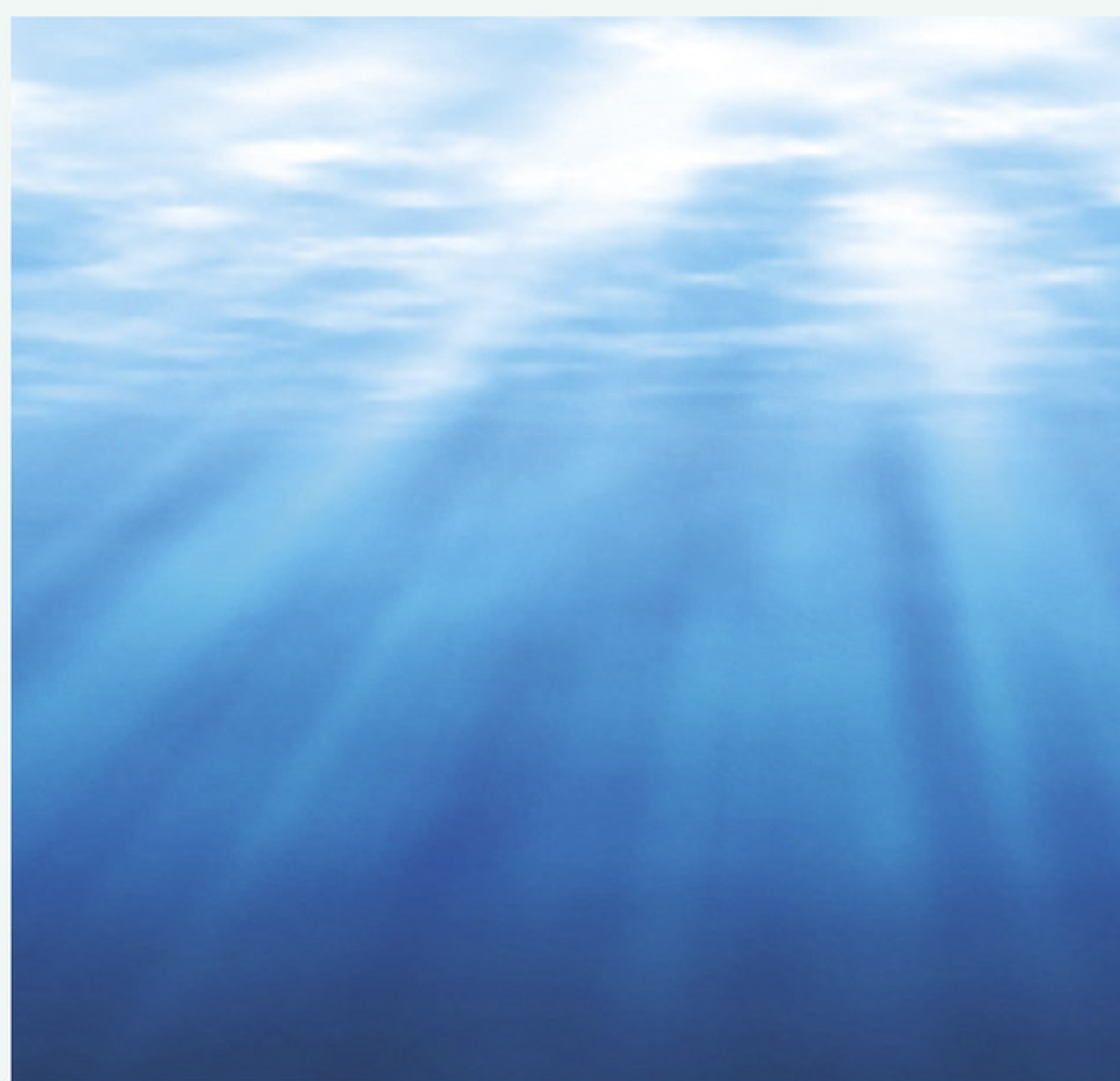
*Uitwerking*
Formule: $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
Gegevens: Eerst reken je de energie om naar de SI-eenheid:
$2{,}0 \text{ eV} = 2{,}0 \times 1{,}6022 \cdot 10^{-19} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ J
In Binas vind je: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg
Invullen levert: $3{,}2 \cdot 10^{-19} = 4{,}55 \cdot 10^{-31} \cdot v^2$
Je wilt uitkomen op $v = \ldots$ Daartoe haal je eerst de factor die voor de $v^2$ staat, naar de andere kant. Dat wil zeggen dat je aan beide kanten door die factor deelt:

$$v^2 = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19}}{4{,}55 \cdot 10^{-31}} = 7{,}0 \cdot 10^{11}$$

Nu trek je aan beide kanten de wortel en je krijgt: $v = 8{,}4 \cdot 10^5$ m s$^{-1}$
Tot slot controleer je of het aantal significante cijfers klopt (je begon met 2 en je eindigt met 2) en je controleert de eenheid: de SI-eenheid van snelheid is m s$^{-1}$. Dus het eindantwoord is juist genoteerd.

**Voorbeeldopgave 5**

In figuur 5 zie je dat diep onder water vooral blauw licht doordringt. Dit verschijnsel beschrijf je met een model waarin de verschillende kleuren licht een verschillende ‘halveringsdikte’ hebben.



▲ **figuur 5** een lichtbundel onder water

**a** Leg aan de hand van figuur 5 uit welke kleur licht in water de grootste halveringsdikte heeft: rood of blauw.

De bovenste 1,0 m van het water absorbeert 71% van rood licht.
**b** Bereken de halveringsdikte van water voor rood licht.

*Uitwerking*
**a** Zoals uit figuur 5 blijkt, dringt blauw licht dieper door dan rood licht. Er is dus een dikkere laag water nodig om het blauwe licht tegen te houden dan voor het rode licht. Dat betekent dat de halveringsdikte, de dikte waarbij de helft van het betreffende licht is geabsorbeerd, groter is voor blauw licht dan voor rood licht.
**b** Formule: bij ioniserende straling is de formule voor de intensiteit als functie van de afstand in een materiaal: $I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d_{½}}}$

De situatie is analoog voor licht in een materiaal. Je weet dat voor de intensiteit op 1,0 m diepte geldt: $I = 0{,}29 \cdot I_0$

Invullen levert: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1{,}0}{d_{½}}} = 0{,}29$

De enige onbekende in deze vergelijking, $d_{½}$, staat op een onhandige plek. Om uit te komen op $d_{½} = \ldots$, neem je aan beide kanten de logaritme: $\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1{,}0}{d_{½}}}\right) = \log 0{,}29$

Nu maak je gebruik van een regel die je van wiskunde kent: $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$. Zo vind je:

$\frac{1{,}0}{d_{½}} \cdot \log 0{,}5 = \log 0{,}29$

Invoeren in de rekenmachine levert: $\frac{1{,}0}{d_{½}} = \frac{\log 0{,}29}{\log 0{,}5} = 1{,}786$

Vervolgens draai je beide kanten om: $d_{½} = \frac{1{,}0}{1{,}786} = 0{,}56$ m

## Aandachtspunten

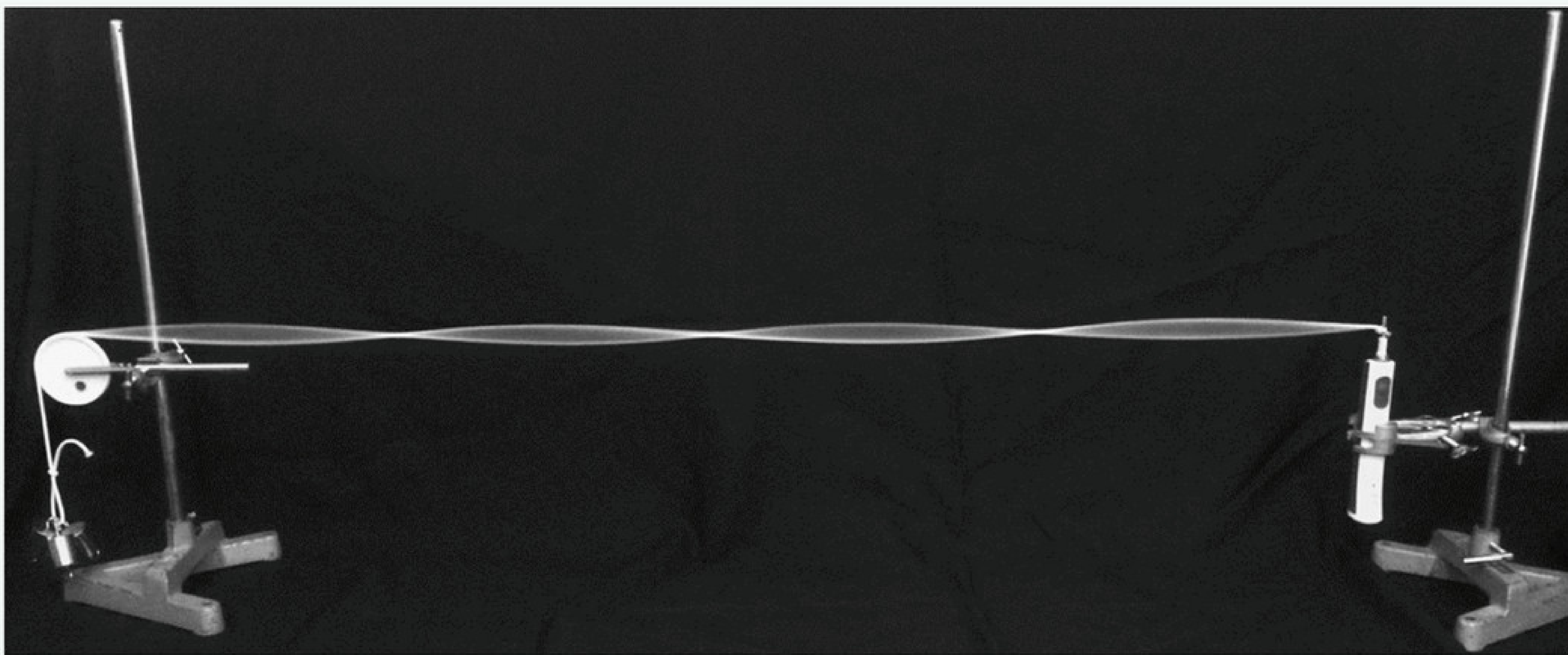
- In een formule vul je de waarden in, uitgedrukt in SI-eenheden. Je antwoord is dan ook de waarde in de bij de grootheid van het antwoord horende SI-eenheid.
- Soms moet je in een opdracht werken met een formule die je nog niet kent, maar die in de opdracht is gegeven.
- Soms kun je gebruikmaken van analogieën: de rekenmethode die je kent voor halveringstijden, is ook van toepassing op halveringsdikten, voor röntgenstraling én voor zichtbaar licht. Dezelfde vergelijkingen hebben dezelfde oplossingen.

## Grafische methode

Als je metingen omzet in een grafiek, is goed te zien of er sprake is van een recht evenredig verband. Je ziet of er door de meetpunten een rechte lijn door de oorsprong is te trekken. Elk ander verband is niet op deze manier direct te controleren: je kunt bijvoorbeeld niet zien of een kromme die steeds sneller stijgt, precies kwadratisch is. Je kunt toch via een grafiek controleren of een bepaald verband geldig is door een **coördinatentransformatie** uit te voeren. Als je wilt controleren of $A \sim B^2$, dan maak je in een tabel een aparte kolom waarin je $B^2$ uitrekent. Daarna maak je een grafiek waarin je horizontaal $B^2$ uitzet. Als het uitzetten van de punten een rechte lijn door de oorsprong oplevert, dan klopt het kwadratische verband.

**Voorbeeldopgave 6**

Ludo laat een koord trillen met behulp van een elektrische tandenborstel. Daaraan is een koord bevestigd dat over een katrol is gelegd en strak wordt gehouden door het gewicht van een aantal blokjes met een totale massa *m* (figuur 6). Als Ludo de tandenborstel aanzet, kan er een staande golf ontstaan in het koord.



▲ **figuur 6** trillend koord

Ludo bepaalt voor een aantal waarden van *m* steeds de lengte *L* en het aantal buiken *n*. *L* is de afstand van de tandenborstel tot de katrol. Zijn meetresultaten staan in de volgende tabel.

| *m* (kg) | *L* (m) | *n* |
|---|---|---|
| 0,100 | 1,26 | 9 |
| 0,200 | 1,50 | 6 |
| 0,300 | 1,44 | 5 |
| 0,400 | 1,62 | 5 |
| 0,500 | 1,43 | 4 |

Voor de voortplantingssnelheid van een transversale golf in een koord geldt: $v = \sqrt{\dfrac{F}{\rho_1}}$
Hierin is:
- $v$ de voortplantingssnelheid in m $s^{-1}$;
- $F$ de spankracht in N;
- $\rho_1$ de lineaire massadichtheid van het koord in kg $m^{-1}$.

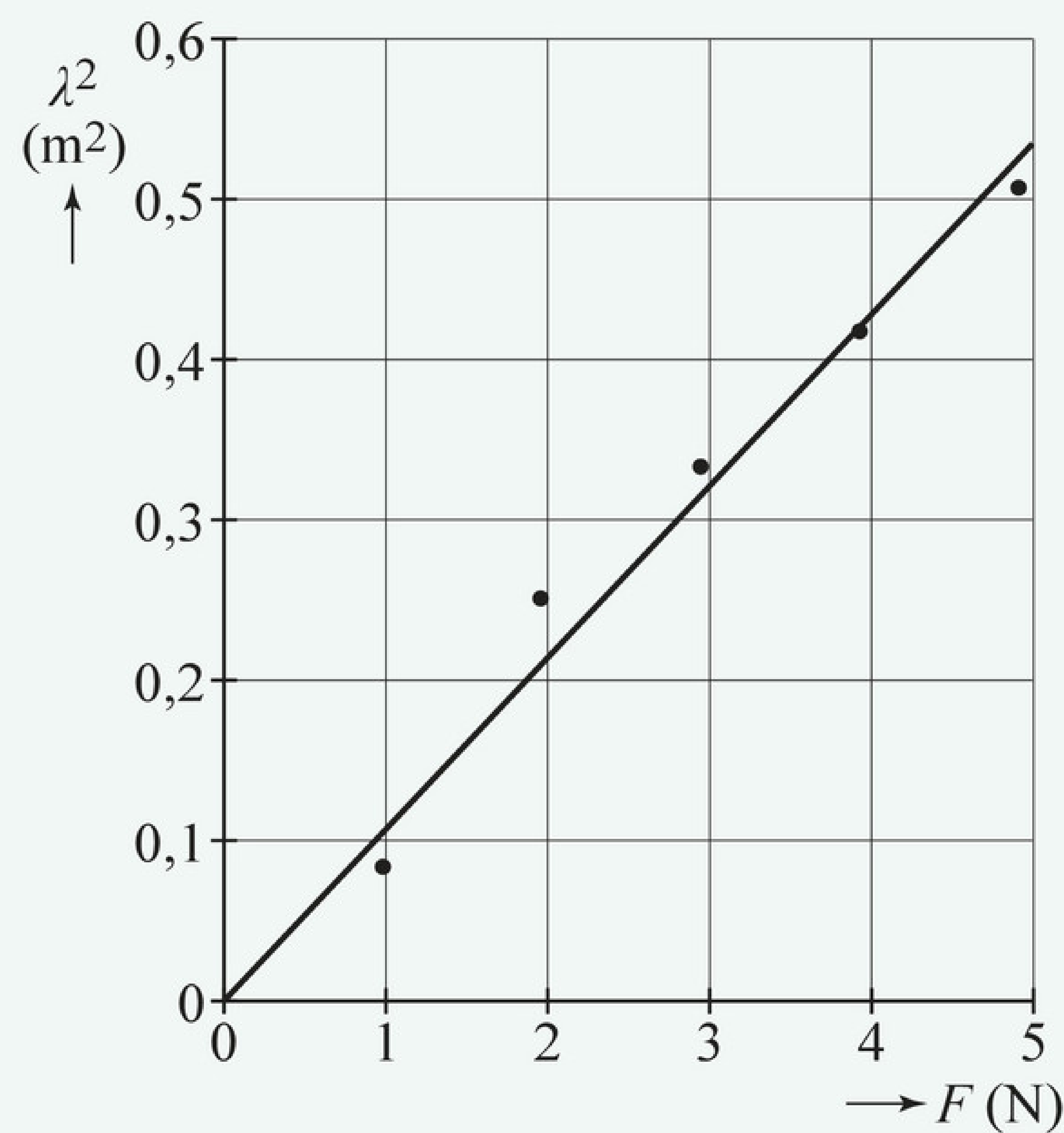
**a** Leg uit dat je kunt controleren of dit verband klopt door $\lambda^2$ uit te zetten tegen de spankracht $F$.
**b** Zet meetpunten in een ($\lambda^2$,$F$)-grafiek.
**c** Leg uit of het verband klopt.

Het koord heeft een lineaire massadichtheid van $1{,}24 \cdot 10^{-4}$ kg $m^{-1}$.
**d** Bepaal uit de grafiek de frequentie van het trilmechanisme van de elektrische tandenborstel.

*Uitwerking*
**a**
- Met $v = \lambda \cdot f$ volgt: $\lambda = \dfrac{1}{f}\sqrt{\dfrac{F}{\rho_1}}$
- Alles kwadrateren levert: $\lambda^2 = \dfrac{1}{f^2} \cdot \dfrac{F}{\rho_1}$
- De frequentie $f$ is vast, dus als het verband klopt, ontstaat er een rechte lijn met richtingscoëfficiënt $\dfrac{1}{f^2 \rho_1}$

**b** Het aantal buiken is gelijk aan het aantal halve golflengten. Zo bereken je uit de tabel steeds $\lambda$ en vervolgens $\lambda^2$. De kracht volgt steeds uit $F = m \cdot g$. Maak een schaalverdeling en zet de punten uit (figuur 7).

**c** Er is redelijk goed een rechte lijn te trekken vanuit de oorsprong (figuur 7). Dus het verband klopt.




▲ **figuur 7** *F* uitgezet tegen $\lambda^2$

**d** De richtingscoëfficiënt is gelijk aan $\frac{0{,}53}{5{,}0}$ = 0,106 (je moet een zo groot mogelijk stuk nemen en een waarde van de lijn kiezen, niet een losse meetwaarde). Dus is

$\frac{1}{f^2 \rho_1}$ = 0,106 en met de gegeven waarde van de lineaire massadichtheid, krijg je:

$$f = \sqrt{\frac{1}{0{,}106 \times 1{,}24 \cdot 10^{-4}}} = 2{,}8 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

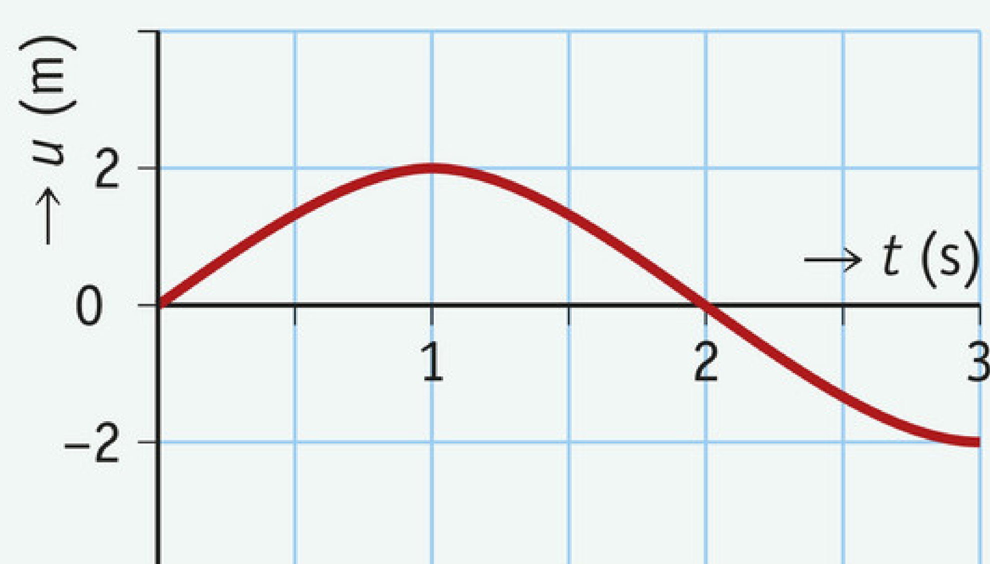
*naar: examen 2018-I*

## Raaklijnen tekenen en differentiëren

In een $(x,t)$-diagram kun je de snelheid op een bepaald moment bepalen door een raaklijn te tekenen bij dat tijdstip en dan de steilheid van die raaklijn te bepalen. Bij wiskunde heb je geleerd hoe differentiëren werkt bij een aantal standaardfuncties. Dit kun je bij natuurkunde toepassen: je moet machtsfuncties, sinus- en cosinusfuncties kunnen differentiëren. Zo kun je soms ook een snelheid *berekenen*, in plaats van *bepalen*.

### Voorbeeldopgave 7

Van een trillend voorwerp is het $(u,t)$-diagram gegeven in figuur 8.




▲ **figuur 8** $(u,t)$-diagram

**a** Bepaal de maximale grootte van de snelheid.

Een trilling wordt in het algemeen beschreven met: $u(t) = A \cdot \sin \dfrac{2\pi \cdot t}{T}$

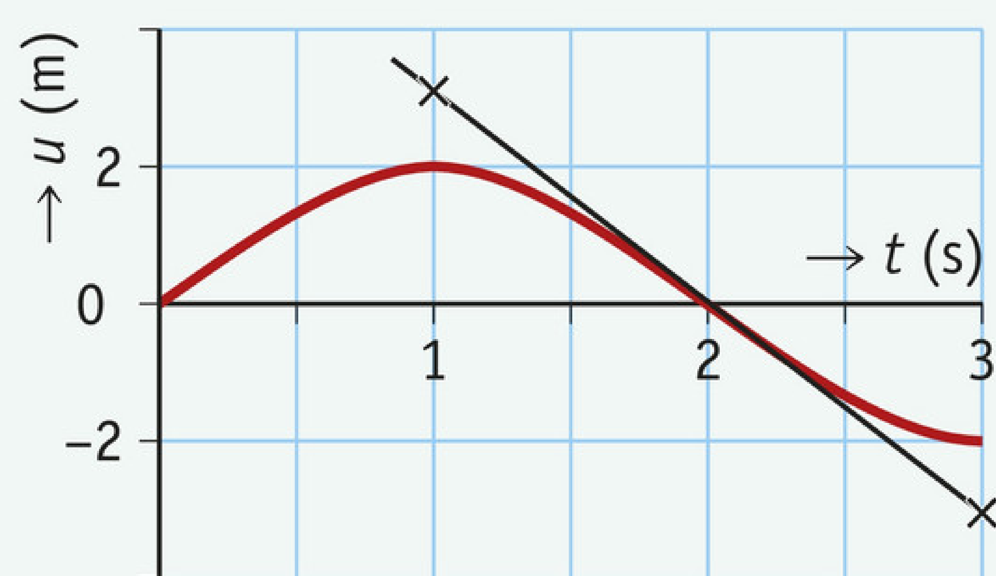
**b** Leg uit dat in dit geval geldt: $u(t) = 2{,}0 \cdot \sin(0{,}5 \times \pi \cdot t)$

**c** Bereken de maximale snelheid. Gebruik: $v(t) = u'(t)$

**d** Leid door $u(t) = A \cdot \sin \dfrac{2\pi \cdot t}{T}$ te differentiëren een uitdrukking af voor de maximale snelheid.

*Uitwerking*

**a** Zie figuur 9. De grafiek is het steilst bij $t = 2{,}0$ s. De raaklijn is getekend. Voor gemarkeerde punten op die lijn geldt: $\dfrac{\Delta u}{\Delta t} = \dfrac{6{,}0}{2{,}0} = 3{,}0 \text{ m s}^{-1}$




▲ **figuur 9** raaklijn aan de ($u$,$t$)-grafiek bij $t = 2{,}0$ s

**b** De amplitude lees je af: die is gelijk aan 2,0 m. De periode lees je ook af: $0{,}50 \times T$ is gelijk aan 2,0 s, dus $T = 4{,}0$ s. Dat vul je in: $u(t) = 2{,}0 \cdot \sin \dfrac{2\pi \cdot t}{4{,}0} = 2{,}0 \cdot \sin(0{,}5 \times \pi \cdot t)$

**c** De afgeleide van sinus is cosinus en de kettingregel geeft een factor $0{,}5 \times \pi$. De snelheid wordt dus gegeven door $v(t) = 2{,}0 \times 0{,}5 \times \pi \times \cos(0{,}5 \times \pi \cdot t)$. De maximale waarde daarvan is 3,1. (De *berekende* waarde 3,1 m s$^{-1}$ komt vrij goed overeen met de bij opgave a *bepaalde* waarde 3,0 m s$^{-1}$.)

**d** De afgeleide functie is: $v(t) = u'(t) = \dfrac{2\pi}{T} \cdot A \cdot \cos \dfrac{2\pi \cdot t}{T}$

De cosinus is maximaal 1, dus de maximale snelheid is $v_{max} = \dfrac{2\pi \cdot A}{T}$ (zie ook Binas tabel 35B).

Merk op dat bij een bepaling uit een grafiek het nooit zo is dat alleen één precieze waarde goed is. Er is altijd een marge. Bij het trekken van een rechte lijn door de meetpunten in voorbeeldopgave 6 moet je ervoor zorgen dat er net zoveel punten net boven als net onder de lijn liggen, maar dan is er nog wel wat speling. Dat geldt ook voor het tekenen van een raaklijn zoals in voorbeeldopgave 7. Dat doe je zo precies mogelijk, maar er is altijd enige ruimte in wat geldt als een goede bepaling van de steilheid.

### Onthoud!

- Oplossen van een vergelijking is het zoeken naar een waarde van een grootheid waarbij aan die vergelijking is voldaan.
- Er zijn oplossingsmethoden voor vergelijkingen met lineaire, kwadratische en exponentiele verbanden.
- Je controleert of een verband geldig is door een coördinatentransformatie uit te voeren, de meetpunten in een grafiek te zetten en te kijken of er dan een rechte lijn door de oorsprong kan worden getekend.
- Als je een functie hebt voor $x(t)$, dan vind je de snelheid door te differentiëren: $v(t) = x'(t)$ In een grafiek kun je een bepaling doen door de steilheid van de raaklijn te bepalen.

### Opdrachten

**9** Type vergelijking
Geef steeds aan met welk type verband je te maken hebt. Kies uit: *exponentieel – lineair – kwadratisch*. Licht je antwoord steeds toe met een formule.
**a** Berekening van de halfwaardetijd als de activiteit van een bron op twee tijdstippen is gegeven.
**b** Berekening van de tijd die nodig is om een bepaalde snelheid te behalen bij een eenparig versnelde beweging.
**c** Berekening van de tijd die nodig is om vanuit stilstand een bepaalde afstand af te leggen bij een eenparig versnelde beweging.
**d** Berekening van het uitgestraalde vermogen van een ster uit de gemeten intensiteit en de afstand tot de ster.
**e** Berekening van de tijd die nodig is om een bepaalde afstand af te leggen bij een eenparige beweging.

**10** Rekenen aan een val
Aan het oppervlak van een bepaalde komeet is de valversnelling slechts $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m s$^{-2}$ groot. Er is geen atmosfeer. Als een voorwerp vanaf 10 m hoogte vanuit stilstand begint te vallen, geldt voor de verticale afstand vanaf het beginpunt: $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
**a** Bereken hoe ver het voorwerp is gevallen na 1,0 minuut.
**b** Bereken na hoeveel tijd de snelheid gelijk is aan 1,0 m s$^{-1}$ bij een valbeweging met deze versnelling.
**c** Bereken na hoeveel tijd het voorwerp de grond raakt.

**11** Tegenwerking met machten
Een zonneauto van 600 kg rijdt met constante snelheid een supersteile helling van 30° op. De enige tegenwerkende kracht die van belang is, is de component van de zwaartekracht langs de helling. De motor levert een vermogen van 12 kW.
**a** Bereken de snelheid.

Tijdens een vlak stuk is de enige tegenwerkende kracht de luchtweerstand, die wordt gegeven door $F_{w,l} = 0{,}060 \cdot v^2$. De motor levert weer 12 kW.
**b** Bereken de snelheid.

**12** Exponentiële afname
Met de formule $N = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{t_{1/2}}}$ bereken je het aantal aanwezige kernen van een radioactieve isotoop als functie van de tijd. De activiteit van een bron is recht evenredig met het aantal aanwezige kernen. Een sample Cd-109 heeft een activiteit van 2,0 MBq.
**a** Bereken de activiteit na 2,0 dagen.
**b** Bereken na hoeveel tijd de activiteit nog slechts 1,0% is van de oorspronkelijke activiteit.

**13** Dosis in Tsjernobyl

Een van de grootste ongelukken ooit met een kerncentrale was in 1986 in Tsjernobyl (figuur 10). Radioactieve stoffen kwamen in de atmosfeer en ter plekke was de stralingsintensiteit hoog. Helikopterpiloten die beton moesten storten over de kapotte reactor, liepen een dosis gammastraling op.

Stel dat een piloot in 2,0 minuten op 10 m hoogte een dosisequivalent $H$ van 5,0 mSv opliep.

**a** Beredeneer hoe groot het dosisequivalent zou zijn geweest als de piloot op 15 m hoogte zou hebben gevlogen. Ga ervan uit dat alle straling uit een kleine ruimte komt, zodat het om een puntbron gaat. Noem in je antwoord de naam van de wet die geldt als iets zich vanuit een punt verspreidt.



▲ **figuur 10** foto genomen vanuit een helikopter boven de ontplofte reactor van Tsjernobyl

Stel dat de piloot een massa heeft van 70 kg, dat hij door gammastraling wordt geraakt over een oppervlakte van 0,50 m$^2$, dat hij op 10 m hoogte 0,010% van de op hem vallende straling absorbeert en dat de gammafotonen een energie van 4,5 MeV hebben.

**b** Bereken de activiteit van de bron.

**14** Wat tegen wat?

Leg steeds uit welke coördinatentransformatie je moet uitvoeren om te onderzoeken of het gegeven verband geldig is.

**a** Je meet lengten van slingers en de perioden die daarbij horen. Je wilt controleren of geldt: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

**b** Je meet de geluidsintensiteit als functie van de afstand tot een bron en je wilt controleren of de kwadratenwet geldig is.

**c** Je meet het vermogen dat een voorwerp uitstraalt als functie van de temperatuur en je wilt controleren of de uitstraling van dit voorwerp voldoet aan de wet van Stefan-Boltzmann.

**15** Veer met massa
Charley heeft een veer waaraan steeds grotere massa's worden gehangen. Hij meet hoelang dertig keer op en neer gaan duurt. In de tabel staan de aan de veer gehangen massa's en de waarden voor 30*T*. Als er niets aan de veer hangt, kan hij ook trillen.

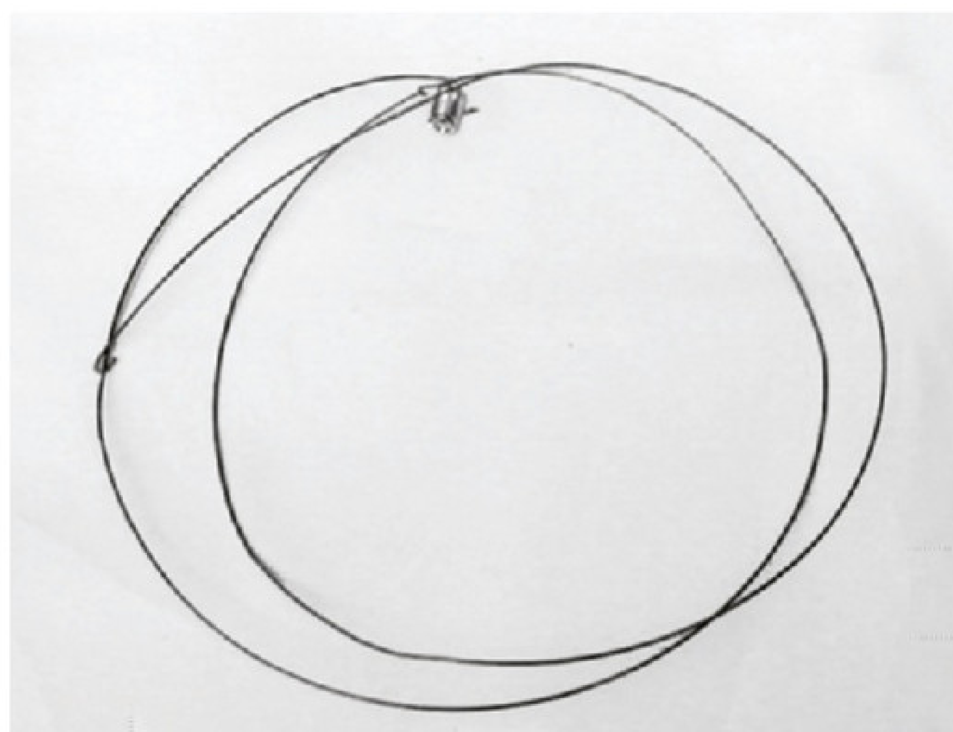
| *m* (g) | 30*T* (s) |
|---|---|
| 0 | 15,69 |
| 25,25 | 23,32 |
| 50,14 | 29,28 |
| 75,39 | 34,32 |
| 100,21 | 38,73 |
| 150,32 | 46,45 |

**a** Onderzoek met behulp van een coördinatentransformatie en een grafiek of *T* evenredig is met de wortel van de aan de veer gehangen massa. Zet $T^2$ uit tegen *m*.
**b** Leg uit hoe een eventuele afwijking van een rechte lijn door de oorsprong kan ontstaan.
**c** Bepaal zo goed mogelijk uit de grafiek de veerconstante.

**16** Fluxfunctie
Tycho buigt een koperdraad van 1,0 m lengte in een cirkel. Vervolgens wekt hij een inductiespanning op door binnen 0,10 s een magnetisch veld van 2,0 mT aan te leggen. Het veld staat loodrecht op de cirkel.
**a** Bereken de grootte van de inductiespanning.
**b** Noem vier manieren om met een draad en een plotseling aangelegd magneetveld een grotere inductiespanning op te wekken. Leg daarbij uit hoe je aan de formule voor inductiespanning ziet dat dat kan.

Florine denkt: als ik dezelfde draad in een dubbele cirkel leg (figuur 11), dan is de inductiespanning groter, want dan heb ik twee windingen. In dat geval kan ik de waarde van de inductiespanning met twee vermenigvuldigen.
**c** Leg met behulp van formules uit of de inductiespanning in het geval van Florine groter of kleiner is dan, of gelijk is aan die in het geval van Tycho.

Saskia en Hans willen een inductiespanning opwekken die harmonisch varieert als functie van de tijd: er moet gelden: $U_{ind} = 0{,}30 \cdot \sin(0{,}20 \cdot t)$. Ze weten dat de inductiespanning de afgeleide naar de tijd is van de magnetische flux.
Hans zegt: "Dan zorgen we dat $\Phi = -0{,}30 \cdot \cos(0{,}20 \cdot t)$." Saskia stelt voor: "$\Phi = -1{,}5 \cdot \cos(0{,}20 \cdot t)$."
**d** Leg uit wie gelijk heeft. Differentieer daartoe beide voorgestelde functies.
**e** Teken de juiste functie van de flux en bepaal met behulp van een raaklijn de maximale waarde van de inductiespanning.
**f** Vergelijk de waarde die je bij opdracht e vond met de waarde die volgt uit de formule $U_{ind} = 0{,}30 \cdot \sin(0{,}20 \cdot t)$.



◀ **figuur 11** een dubbele cirkel van metaaldraad

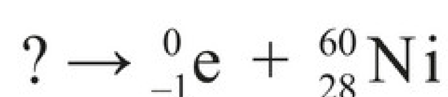
# 3 Behoudswetten

In deze paragraaf leer je:
- bij het opstellen van modellen gebruikmaken van behoudswetten;
- de wetten van Kirchhoff interpreteren als behoudswetten.

In een scheikundige reactie worden moleculen afgebroken en er ontstaan nieuwe. Er verandert van alles, maar er zijn ook grootheden die onveranderd blijven. In dit voorbeeld is de totale massa een **behouden grootheid**. Het aantal atomen van een bepaald element is bij een scheikundige reactie ook behouden. Het feit dat behouden grootheden bestaan, zorgt ervoor dat niet alles mogelijk is: de mogelijke uitkomsten van een proces zijn ingeperkt. Als iemand een reactievergelijking opschrijft met meer massa voor dan na de reactie, dan weet je dat die vergelijking niet klopt. Als je een model opstelt van een natuurkundig proces, dan helpt het als je weet welke **behoudswetten** je kunt gebruiken.

## Behoud van lading

In een potje dat β-straling uitstraalt, ontstaat steeds meer Ni-60. Je kunt beredeneren welke isotoop ook aanwezig moet zijn in het potje. In de vervalvergelijking vul je in wat bekend is:

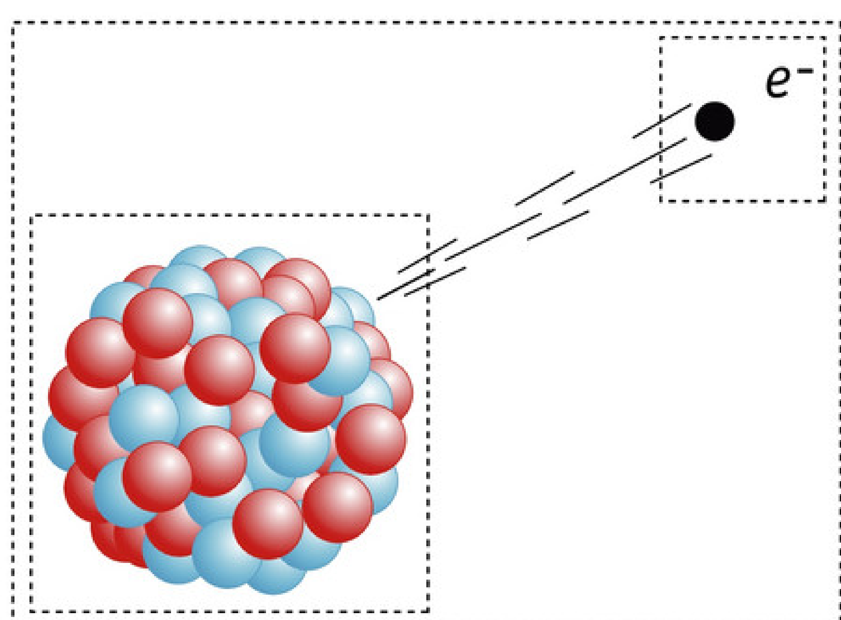


$$? \rightarrow {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$$

Het totale massagetal en de totale lading voor en na het verval zijn gelijk. Voor het massagetal en het atoomnummer houd je twee eenvoudige vergelijkingen over. De totalen zijn 60 voor de massa en 27 voor de lading. Uit alle kernen die bestaan, is er vanwege ladingbehoud en massabehoud slechts één mogelijkheid over: Co-60.
Hier is gebruikgemaakt van de **wet van behoud van lading**. Die houdt in dat lading niet zomaar verdwijnt of uit het niets ontstaat. Daardoor kan niet elke willekeurige nieuwe kern ontstaan bij β-verval, maar ligt vast dat het aantal protonen met één toeneemt. Er is ook gebruikgemaakt van de **wet van behoud van massa**: ook die grootheid moet voor en na de reactie in totaal gelijk zijn. Bij β-verval houdt dat het volgende in: een toename van het aantal protonen met één moet gepaard gaan met een afname met één van het aantal neutronen.

## Van object naar systeem

Uiteraard is bij β-verval de lading van de kern die je bekijkt *niet* constant: die gaat van 27 naar 28. De wet van behoud van lading geldt niet voor een enkel object, maar wel voor het geheel: voor de reactie is dat *de kern waarmee je begon*, na de reactie is dat *de dochterkern plus het elektron*. Je moet bij het toepassen van de behoudswetten dus goed definiëren waar je naar kijkt. Als je naar het potje met stoffen kijkt, zal dat positief geladen raken doordat er elektronen wegschieten. De wet van behoud van lading geldt alleen als je de elektronen meetelt als deel van het systeem. Dit is algemener: een behoudswet gaat over een **gesloten systeem** en geldt voor het geheel, niet voor de deelsystemen (figuur 12).




▲ **figuur 12** systeem en deelsystemen

## De wetten van Kirchhoff zijn behoudswetten

De stroomwet van Kirchhoff luidt: $\sum_i I_i = 0$. Deze wet geldt voor elk punt in een stroomkring. Als je de stroomsterkten die naar het punt toelopen, positief rekent, en de stroomsterkten van het punt af negatief, dan telt alles op tot nul. Er loopt evenveel stroom naar het punt toe als ervandaan. Deze wet kun je dus zien als een 'wet van behoud van stroomsterkte'. Als er drie stroomdraden naar een punt lopen en de stroomsterkte van twee stromen is bekend, dan legt de stroomwet van Kirchhoff vast wat de waarde van de derde stroomsterkte is. Dit is weer een voorbeeld van het feit dat een behoudswet het aantal mogelijke uitkomsten van een proces vastlegt: een stroom van 1,0 A kan niet verdergaan als een stroom van 0,8 A plus een stroom van 0,5 A.
Bij de stroomwet van Kirchhoff bestaat het 'systeem' uit alle takken die aan één punt vastzitten. Bij de spanningswet van Kirchhoff $\sum_i U_i = 0$ is het systeem een stroomkring, waarbij je rondgaat tot je weer in het oorspronkelijke punt bent. Spanningen van spanningsbronnen die je op een punt in de stroomkring gepasseerd bent, reken je negatief, andere spanningen positief. Je kunt de spanningswet van Kirchhoff interpreteren als 'behoud van spanning in een stroomkring'.

## Behoud van energie

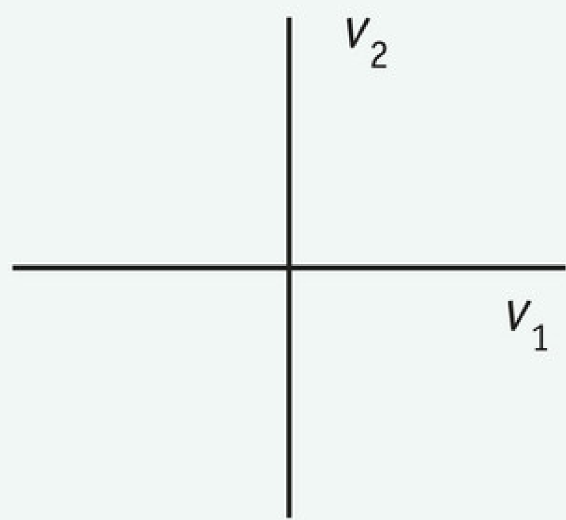
Dat je goed moet vastleggen binnen welk systeem een behoudswet geldt, geldt ook voor de wet van behoud van energie. Als de hoogspringster omhoogspringt (figuur 13), verandert haar kinetische energie tijdens de sprong. De formule $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ levert op verschillende momenten tijdens de sprong steeds een andere uitkomst op. Dat de wet van behoud van energie hierdoor niet lijkt te gelden, komt doordat het systeem te klein is genomen. Als je ook de zwaarte-energie in het systeem persoon–aarde meeneemt, geldt dat de totale energie $E_{tot} = E_k + E_z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$ wel constant is. Als er ook nog wrijving is, dan dient de warmte die ontstaat te worden meegenomen als deel van het systeem. Als je de lucht die warmer wordt niet meetelt, is het systeem niet gesloten: er lekt energie weg uit het systeem. Pas als het systeem naast de persoon en de aarde ook de afgegeven warmte omvat, kun je uitgaan van de geldigheid van de wet van behoud van energie.



▲ **figuur 13** een opstijgende atlete

**Voorbeeldopgave 8**

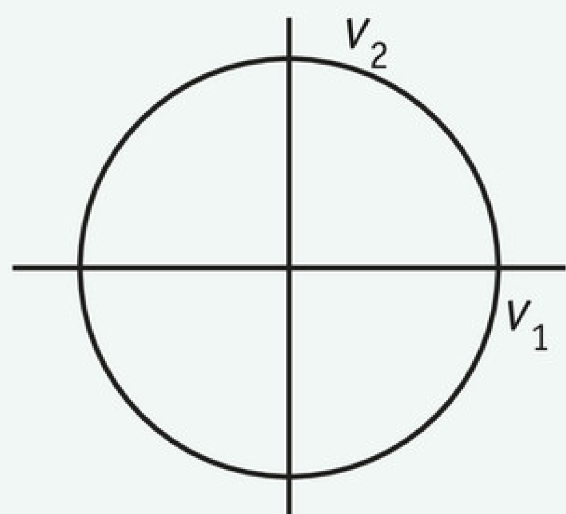
Een biljartbal botst met snelheid 3,00 m s$^{-1}$ op een identieke biljartbal die stilligt. Als er geen behoudswet zou gelden, zouden alle combinaties van snelheden na de botsing mogelijk zijn. In figuur 14 zie je het ($v_1$,$v_2$)-vlak, waarin elk punt een combinatie van snelheden aangeeft.




▲ **figuur 14** Is elk punt in het vlak een mogelijke uitkomst?

**a** Geef in de figuur aan welke combinaties van eindsnelheden mogelijk zijn als je de wet van behoud van energie toepast. Licht je antwoord toe.
**b** Leg uit dat er nog een behoudswet nodig is om de uitkomst helemaal vast te leggen.
**c** Bereken de snelheid van de andere bal als je weet dat de eerste bal na een schampschot een snelheid heeft van 2,80 m s$^{-1}$.

*Uitwerking*
**a** Zie figuur 15.




▲ **figuur 15** De mogelijkheden zijn ingeperkt tot de punten op een cirkel.

Er geldt: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$ = constant. Omdat de massa's gelijk zijn, geldt ook dat $v_1^2 + v_2^2$ = constant en je weet de waarde van die constante ook: $v_1^2 + v_2^2 = 9{,}00$. Bij wiskunde heb je geleerd dat de vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ die van een cirkel is.
**b** Er zijn nog steeds oneindig veel mogelijkheden (de cirkel van figuur 15 telt oneindig veel punten), terwijl er slechts één echte combinatie van snelheden werkelijk zal optreden. Een andere behoudswet legt vast welke dat zal zijn (opdracht 25).
**c** Vul in: $v_2^2 = 9{,}00 - 2{,}80^2 = 1{,}16$ en er volgt: $v_2 = 1{,}08$ m s$^{-1}$

De wet van behoud van energie geldt ook als elektrische energie een rol speelt. De wet geldt voor systemen van atomen, voor systemen op de schaal van biljartballen en ook op de schaal van sterrenstelsels. Het is een **universele natuurwet** voor systemen die als gesloten mogen worden beschouwd. Omdat er veel soorten energie zijn die kunnen worden uitgewisseld, zijn zeer veel situaties te bedenken die kunnen worden gemodelleerd met behulp van de wet van behoud van energie. Een behoudswet is van groter belang binnen de natuurkunde dan een verband tussen grootheden zoals $P = U \cdot I$. Van verbanden zoals de laatste zijn er vele, van behoudswetten maar enkele.

### Onthoud!

- Behoudswetten leggen beperkingen op aan de mogelijke uitkomsten van een proces.
- Behoudswetten gelden binnen een gesloten systeem.
- Belangrijke behoudswetten zijn die van lading, massa en energie.
- De wetten van Kirchhoff kun je zien als een wet van behoud van stroomsterkte in een punt en een wet van behoud van spanning in een stroomkring.

### Opdrachten

**17** Grootte elektrische energie
Een lift stijgt met constante snelheid. Hierbij spelen drie soorten energie een rol: de verbruikte elektrische energie, de toename van de zwaarte-energie en de hoeveelheid warmte die ontstaat.

**a** Leg uit welke van deze drie per seconde de grootste waarde heeft.
**b** Bereken in de volgende gevallen de elektrische energie en orden de waarden van klein naar groot.
  A De rekening voor elektrische energie bedraagt € 300, de prijs per kilowattuur (kWh) is 21 cent.
  B Een lamp met vermogen 80 W staat een jaar lang elke dag 1,5 h aan.
  C Een lift brengt een massa van 6,0 ton tot een hoogte van 40 m, het rendement van de energieomzetting is 75%.
  D Een batterij van 4,5 V en een capaciteit van 2000 mAh raakt op.

**18** Omhoogschieten
Je schiet een pijl met massa 23 g recht omhoog. De veerconstante van de pees van de kruisboog die je gebruikt, is 8,0 N $cm^{-1}$. Je rekt de pees 25 cm uit. Alle veerenergie wordt omgezet in kinetische energie.

**a** Bereken de snelheid waarmee de pijl de boog verlaat.
**b** Bereken hoe hoog de pijl komt, als je weet dat 60% van de kinetische energie wordt omgezet in warmte en 40% in zwaarte-energie.
**c** Leg uit dat je de pijl niet als een 'gesloten systeem' kunt beschouwen tijdens het omhooggaan.

**19** Ontsnapping
Een steen met een massa van 1,0 kg ligt op het maanoppervlak.

**a** Bereken de gravitatie-energie die een massa van 1,0 kg op het maanoppervlak heeft.
**b** Bereken met welke snelheid dit voorwerp moet bewegen om op een totale energie 0 J uit te komen.
**c** Geef een formule voor de ontsnappingssnelheid.

Licht kan niet ontsnappen als het zich binnen de 'schwarzschildstraal' van een zwart gat bevindt.

**d** Leid een formule af voor deze straal als functie van de massa, de gravitatieconstante en de lichtsnelheid.

**20** Energiequanta
In hoofdstuk 12 kwam fluorescentie aan de orde. Om dat effect te verklaren, heb je zowel de verdeling van de energie van elektromagnetische straling in fotonen met energie $E = h \cdot f$ nodig, als de wet van behoud van energie. Pas door het combineren van die twee zaken kun je verklaren dat je wel met blauw licht rode fluorescentie kunt krijgen, maar niet andersom. Geef die verklaring.

**21** Behoud van massa

Het begin van het gedicht *Herinnering aan Holland* van Hendrik Marsman luidt:

*Denkend aan Holland*
*zie ik breede rivieren*
*traag door oneindig*
*laagland gaan*

**a** Leg met behulp van een behoudswet uit dat het logisch is dat waar een rivier breed is, de stroming langzaam gaat.

**b** Leg uit hoe het komt dat een straal water uit een kraan bovenaan het breedst is, en verder naar beneden steeds smaller wordt. Zeg daarbij iets over een behoudswet.

Je hebt een stroomdraad met weerstand $R$. Deze draad rek je uit, de lengte wordt twee keer zo groot.

**c** Leg met behulp van de formule voor de weerstand van een draad en een behoudswet uit hoeveel keer zo groot de weerstand wordt na het uitrekken.

**22** Kirchhoff en behoud

In een bepaalde schakeling splitst de hoofdstroom zich in twee parallelle takken. Er zijn drie stroomsterkten: $I_{totaal}$, $I_1$ en $I_2$.

**a** Leg uit hoe de wet van Kirchhoff het aantal mogelijke combinaties van stroomsterkten verkleint.

**b** Van welke behoudswet is deze wet van Kirchhoff een gevolg: behoud van lading, behoud van massa of behoud van energie?

Een accu van 12 V geeft aan elke coulomb lading die van de pluspool naar de minpool loopt, een energie mee van 12 J. Je sluit drie lampen in serie aan op deze accu.

**c** Welk verband is er tussen de drie spanningen $U_1$, $U_2$ en $U_3$?

**d** Schrijf de algemene wet op die Kirchhoff hiervoor formuleerde.

**e** Leg uit dat ook deze wet van Kirchhoff een gevolg is van een behoudswet.

**+23** PET

Met een PET-scan probeert een arts organen in beeld te brengen. De patiënt krijgt een $\beta^+$-straler toegediend. Een kern van zo'n isotoop zendt een positron uit: dat is een deeltje met lading +1 en met dezelfde massa als een elektron. Dat positron ontstaat op hetzelfde moment als het wordt uitgezonden.

**a** Leg uit dat het atoomnummer van de dochterkern 1 lager is dan het atoomnummer van de moederkern.

Zodra dit positron een elektron tegenkomt, annihileren ze elkaar: de totale massa van beide deeltjes wordt via de formule $E = mc^2$ omgezet in gammastraling.

**b** Stel dat de energie zou worden omgezet in één enkel foton, bereken dan de impuls van dat foton.

Omdat de totale impuls een behouden grootheid is, kan niet vanuit vrijwel stilstaande deeltjes ineens één foton met impuls ontstaan. Wat wel gebeurt, is dat er twee fotonen ontstaan, elk met de helft van de energie.

**c** Leg uit hoe die twee fotonen bewegen en hoe het komt dat dan wel aan de wet van behoud van impuls kan zijn voldaan.

**d** Leg uit op welke manier van die speciale beweging van de twee fotonen gebruik wordt gemaakt in een PET-scanner.

**24** Kirchhoff en zonnepanelen

Zonneauto's, afgelegen weerstations en lichtboeien op zee zijn niet verbonden met het lichtnet. Ze gebruiken zonne-energie, maar niet alleen als de zon schijnt. Daarom wordt gebruikgemaakt van accu's die op sommige momenten opladen en op andere momenten energie leveren.

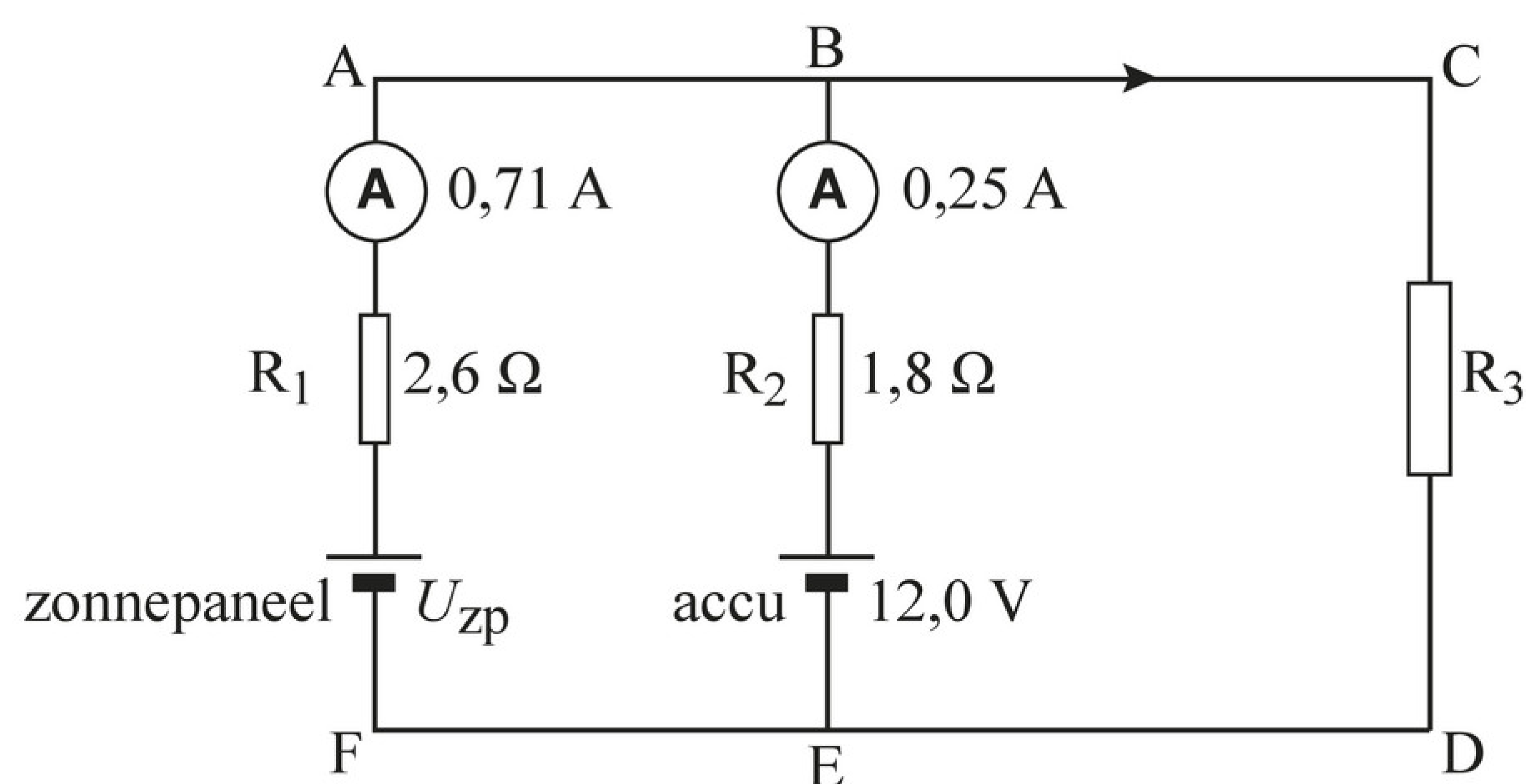
Een afgelegen weerstation is gedurende het hele jaar 24 uur per dag in bedrijf. De installatie wordt van energie voorzien door een accu van 12 V. Het elektrisch vermogen van de installatie varieert sterk en bedraagt gemiddeld 2,3 W.

Een volledig opgeladen accu heeft een capaciteit van 75 Ah. (Dit houdt in dat de volledig opgeladen accu gedurende 1,0 uur een stroom van 75 A kan leveren, of gedurende 3,0 uur een stroom van 25 A, enzovoort.)

Deze accu voldoet niet om de installatie één jaar te laten werken.

**a** Bereken het aantal volledig opgeladen accu's dat in één jaar nodig zou zijn als ze niet tussentijds worden opgeladen.

Overwogen wordt om naast de accu een zonnepaneel in de schakeling op te nemen. Hiertoe wordt een proefopstelling gebouwd (figuur 16).




▲ **figuur 16** schakeling met zonnepaneel en accu

De installatie van het weerstation is weergegeven door een gewone weerstand, aangegeven met $R_3$. Het zonnepaneel staat in de schakeling parallel aan de accu.

Bij een bepaalde lichtsterkte op het zonnepaneel leveren beide spanningsbronnen stroom aan de weerstand $R_3$ en worden de in figuur 16 weergegeven stroomsterkten gemeten.

**b** Bereken het vermogen dat in dat geval aan weerstand $R_3$ wordt geleverd.

**c** Bereken de spanning $U_{zp}$ van het zonnepaneel bij deze lichtsterkte. Gebruik hierbij de spanningswet van Kirchhoff.

*naar: examen 2018-I*

**+25** Samenwerkende behoudswetten

In voorbeeldopgave 8 werd via de wet van behoud van energie de snelheid van een biljartbal gevonden bij bekende eindsnelheid van de andere bal na een schampschot.

**a** Leg aan de hand van figuur 15 uit dat de wet van behoud van energie in feite twee oplossingen toelaat. Geef in figuur 15 aan met welke twee oplossingen dit overeenkomt.

Beschouw nu een 'stop shot'. Daarbij komt de ene bal recht op de stilliggende bal af. Het woord zegt het al: de eerste bal zal na de botsing stilliggen.

**b** Leg uit dat dit *niet* uit alleen de wet van behoud van energie kan worden geconcludeerd. Leg dus uit dat de einduitkomst niet wordt vastgelegd door de wet van behoud van energie.

Behalve de wet van behoud van energie is er ook de wet van behoud van impuls. De totale impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ is vooraf en achteraf gelijk.

**c** Toon aan dat deze wet leidt tot een beperking van de mogelijke oplossingen tot punten die liggen op de lijn $v_2 = 3{,}00 - v_1$.

**d** Teken in figuur 15 deze twee oplossingen.

**e** Leg uit hoe je uit de figuur kunt opmaken dat er slechts twee combinaties van snelheden zijn die voldoen aan *beide* voorwaarden: behoud van impuls én behoud van energie.

**f** Omschrijf de eindsituatie. Leg uit hoe je dit opmaakt uit de figuur.

# 4 Computermodellen

In deze paragraaf leer je:
- in welke gevallen je een computermodel kunt gebruiken;
- wat het onderscheid is tussen eerste-ordesystemen en tweede-ordesystemen;
- hoe je radioactief verval modelleert;
- hoe je systemen met verschillende krachten modelleert.

Computerberekeningen zijn belangrijk als de oplossing van een vergelijking niet in één keer is op te schrijven. Met een computer kun je heel snel veel kleine berekeningen uitvoeren. Dat is vooral nuttig wanneer grootheden snel veranderen of als een proces heel lang duurt.

## Tijdstapjes

Voor een voorwerp waarop een constante kracht werkt, kun je direct opschrijven wat de positie is op elk tijdstip $t$. Er geldt dan namelijk: $x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$, met $a = \frac{F_{res}}{m}$

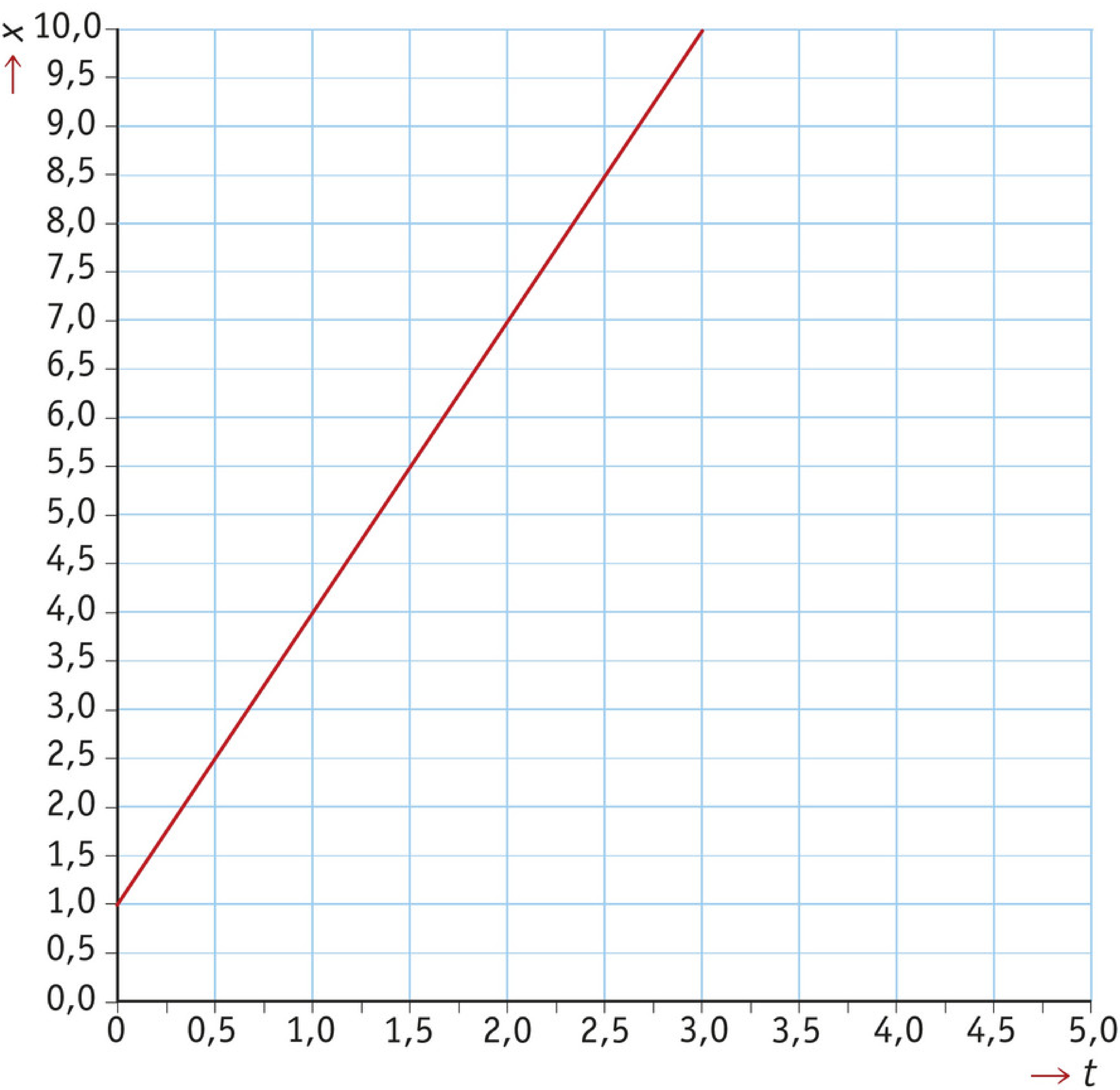
In de praktijk is de situatie bijna altijd ingewikkelder. Op aarde bijvoorbeeld is er altijd een luchtweerstand die evenredig is met $v^2$ en die dus verandert tijdens het op gang komen. De resulterende kracht hangt van de snelheid af en nog wel via een kwadraat, wat het probleem extra lastig maakt. Je kunt geen eenvoudige functie $x(t)$ opschrijven die vertelt waar het voorwerp op elk tijdstip is.
De manier om dit aan te pakken is de oplossing stapje voor stapje te berekenen. Voor een heel klein tijdsinterval kan de resulterende kracht wél als constant worden beschouwd. De snelheid en de positie en daardoor ook de kracht veranderen niet abrupt. Je berekent met die kracht de snelheidsverandering en de verandering van positie in dat kleine tijdstapje. De nieuwe positie en snelheid beschouw je als de beginwaarden van een nieuw tijdsinterval. Newton rekende al op deze manier en hij schreef vele vellen papier vol met stapsgewijze berekeningen. Tegenwoordig maak je gebruik van een computer. Computermodellen zijn in eerdere hoofdstukken al voorbijgekomen. In deze paragraaf gaat het over kenmerken van verschillende typen systemen. Het doorrekenen van een model is een **iteratief proces**. Dat betekent dat je dezelfde berekening steeds opnieuw doet, maar dan met andere getallen. Het aantal malen dat je een tijdstap doorrekent, noem je het aantal **iteraties**. De keuze voor de grootte van de tijdstapjes hangt af van de mate waarin grootheden veranderen. Als alles langzaam varieert, is het verantwoord om grotere tijdstappen te nemen. De aanname dat alles constant is, is dan voor iets langere tijd gerechtvaardigd. Als bijvoorbeeld de kracht snel varieert, moet je een kleinere tijdstap nemen. De computerberekening duurt dan langer.

## Eerste-ordesystemen: verval en groei

Sommige modellen hangen af van de eerste afgeleide van de grootheid waar het om gaat. Deze systemen worden **eerste-ordesystemen** genoemd. De toe- of afname van een grootheid is bijvoorbeeld constant. Het model dat je dan krijgt (figuur 17), heeft als oplossing lineaire groei of lineaire afname. In een grafische weergave komt dat overeen met een rechte lijn (figuur 18).

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| dx := v * dt<br>x := x + dx<br>t := t + dt | t := 0<br>x := 1<br>v := 3<br>dt := 0.01 |

▲ **figuur 17** computermodel voor eenparige beweging




▲ **figuur 18** bewegen met constante snelheid: het diagram bij het model van figuur 17

Bij veel eerste-ordesystemen is de toe- of afname van een grootheid evenredig met de grootheid zelf. Bijvoorbeeld: het aantal vervallende atoomkernen in een tijdstap is een vast percentage van het totale aantal aanwezige atoomkernen van de radioactieve stof. Dit leidt tot exponentiele afname van het aantal kernen.

### Voorbeeldopgave 9

De modelregels in figuur 19 geven radioactief verval weer.

**a** Leg uit dat de grafiek van $N$ tegen $t$ steeds minder steil zal worden.
**b** Welke verandering moet je doorvoeren als je het verval van een andere isotoop wilt bestuderen, met een kleinere halveringstijd?
**c** Typ het model in en laat de computer het doorrekenen. Maak de grafiek van $N$ tegen $t$.
**d** Welk aspect van radioactief verval zit helemaal niet in dit model?
**e** Leg uit wanneer deze tekortkoming het ernstigst is: bij het begin of aan het eind.

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| dN := Constante * N<br>N := N - dN<br>t := t + dt | t := 0<br>N := 1000000<br>Constante := 0.01<br>dt := 0.01 |

▲ **figuur 19** computermodel voor radioactief verval

*Uitwerking*

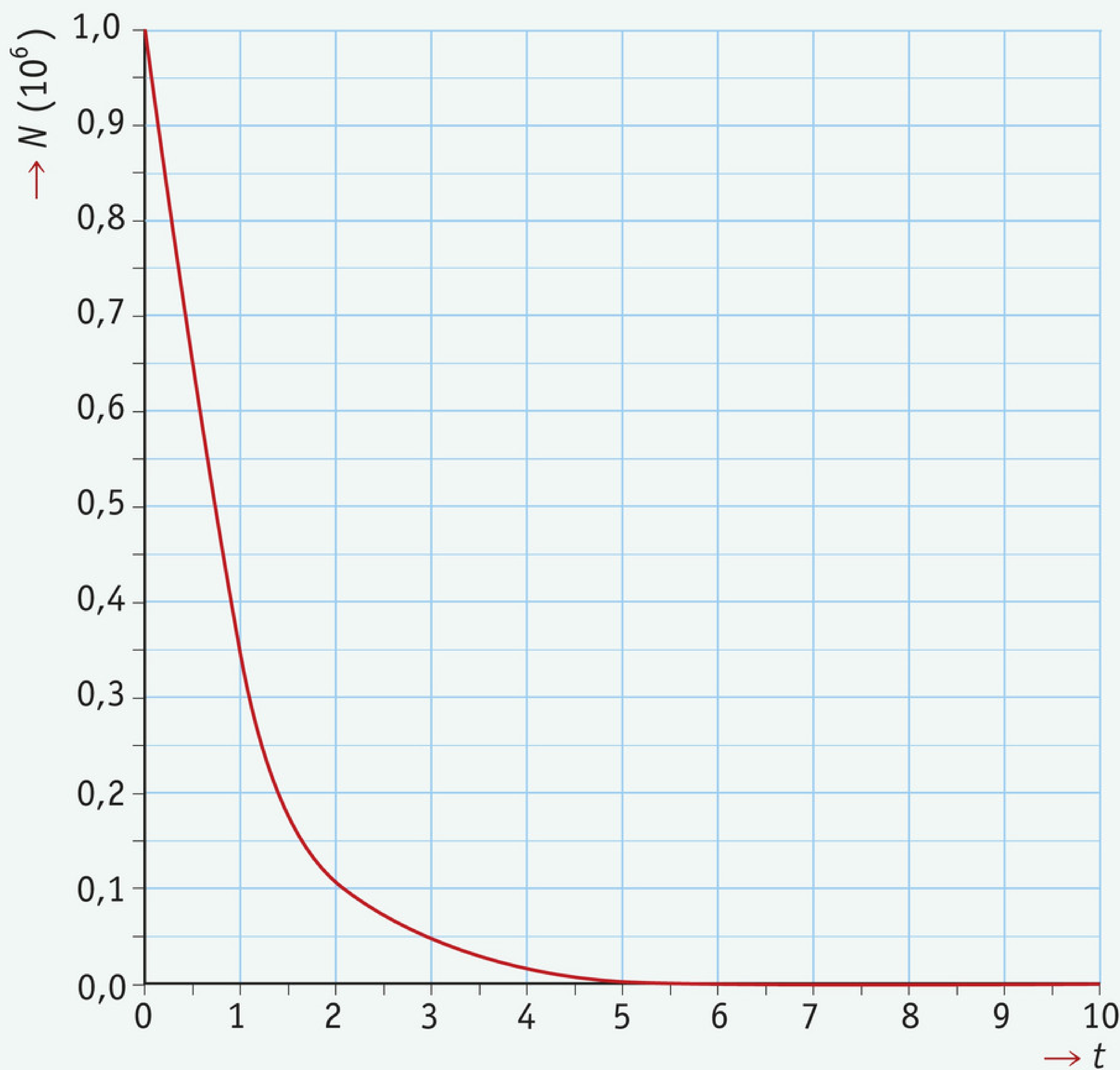
**a** Omdat N steeds kleiner wordt en Constante gelijk blijft, wordt Constante * N steeds kleiner. Dus wordt dN, de afname van N per tijdstap, steeds kleiner.

**b** De waarde van Constante moet groter worden, want de kernen vervallen sneller.

**c** Zie figuur 20.

**d** In werkelijkheid is het vervalproces een toevalsproces. Het aantal kernen dat in een tijdsinterval zal vervallen, fluctueert. Dat zit niet in het model.

**e** Aan het eind, want dan zijn kleine verschillen in het aantal vervallende kernen meteen een groot percentage van het aantal vervallende kernen.




▲ **figuur 20** exponentiële afname: het diagram bij het model van figuur 19

Bij het doorrekenen van een eerste-ordesysteem hoeft alleen de startwaarde (beginwaarde) van de betreffende grootheid te worden opgegeven. In het model voor de eenparige beweging is dat de beginpositie. Bij het verval is dat het aantal kernen aan het begin van het proces. Omdat snelheid respectievelijk halveringstijd vastliggen, ligt met het kiezen van die ene **beginvoorwaarde** het verdere verloop van het proces vast.

## Tweede-ordesystemen: oscillaties en andere bewegingen

Als je een beweging bestudeert, is vaak de kracht $F$ gegeven. Je wilt meestal de positie $x$ als functie van de tijd $t$ bepalen. Dan zou je willen gebruiken: $x = x + v \cdot \mathrm{d}t$, maar nu is $v$ ook niet bekend. Uit de tweede wet van Newton, $F = m \cdot a$, volgt dat er wel iets bekend is over de versnelling: die is gelijk aan de gegeven kracht gedeeld door de massa: $a = \frac{F}{m}$. De snelheid kun je vervolgens berekenen als: $v = v + a \cdot \mathrm{d}t$. Hierna kun je de positie berekenen met $x = x + v \cdot \mathrm{d}t$. Het berekenen van de positie gaat dus in twee stappen.
De versnelling $a$ is de afgeleide van de afgeleide van de grootheid $x$ die je wilt bepalen als functie van de tijd: de afgeleide van $x$ is de snelheid $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. De versnelling is daarvan weer de afgeleide: $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. De afgeleide van de afgeleide noem je de tweede afgeleide.

Zo'n systeem waarbij je uitgaat van kennis over de tweede afgeleide van een functie, noem je een **tweede-ordesysteem**. In dat geval is er iets bekend over de versnelling; die kan bijvoorbeeld evenredig zijn met $v^2$, of op grotere afstand snel afnemen via de functie $x^{-2}$. Bij elke tijdstap ligt $a$ vast.
In een tweede-ordesysteem zijn er altijd *twee* beginvoorwaarden. Je moet de beginpositie én de beginsnelheid opgeven, de rest volgt vanuit die startwaarden. Als je een beweging in de $x$-richting en de $y$-richting wilt berekenen, worden dit vier beginwaarden: twee voor de $x$ en twee voor de $y$, steeds een positie en een snelheid. Maar je noemt dat nog steeds een tweede-ordesysteem, omdat je uitgaat van de tweede afgeleide van de positie.
Een speciaal soort beweging krijg je als de kracht $F$ evenredig is met de positiecoördinaat $x$, met een negatieve evenredigheidsconstante. Dat geldt bijvoorbeeld voor een massa aan een veer. Je krijgt dan een harmonische trilling (voorbeeldopgave 10).

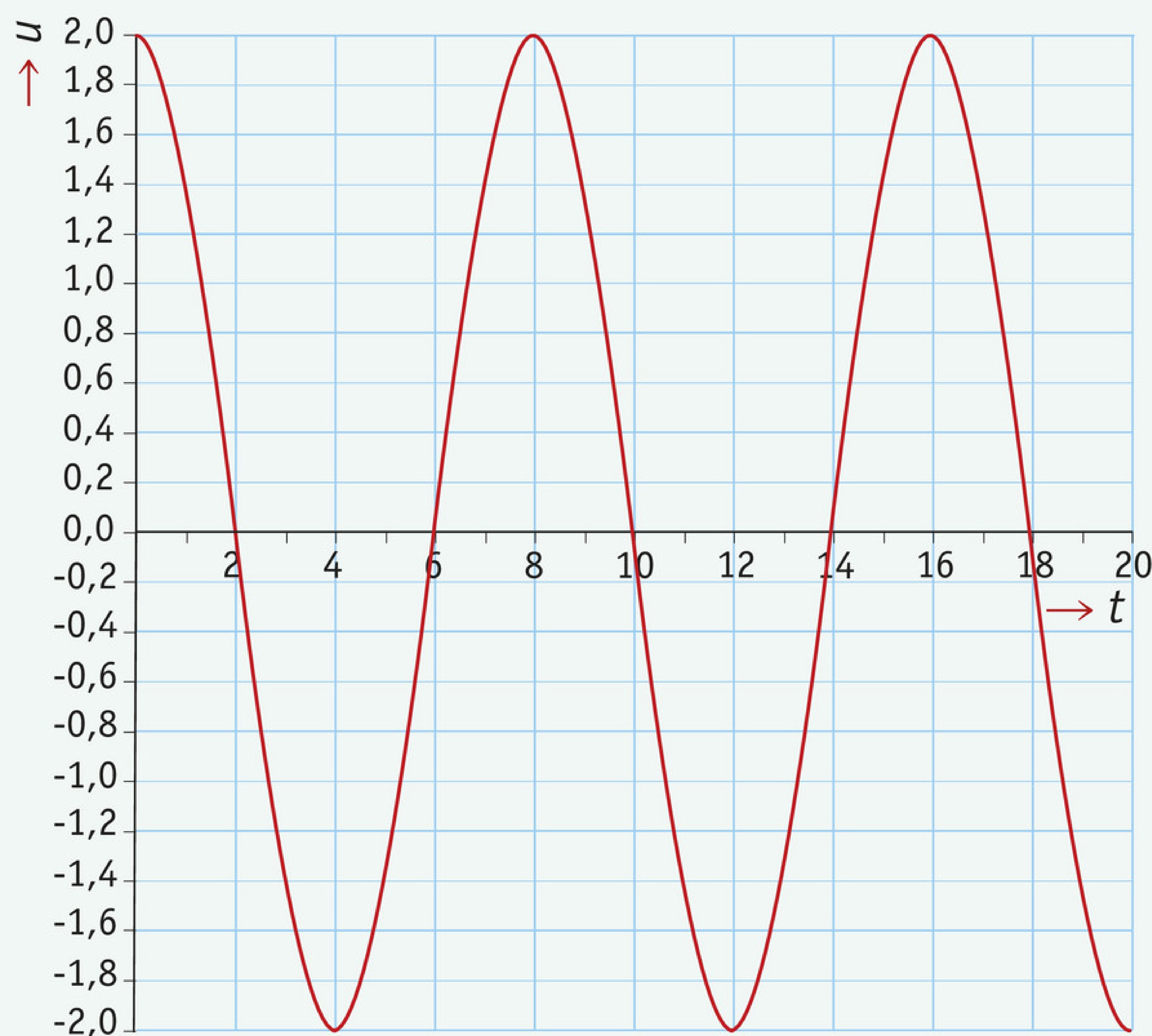
### Voorbeeldopgave 10

Modelleer de beweging van een veer met veerconstante 0,30 N m$^{-1}$ waaraan een massa van 0,50 kg hangt. Geef de grafiek van de uitwijking als functie van de tijd, als je het voorwerp op tijdstip 0 met uitwijking 2,0 m vanuit stilstand loslaat.

*Uitwerking*
Het model vind je in figuur 21. Daarmee is de grafiek in het diagram van figuur 22 gemaakt.

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| F := -C * u<br>a := F / m<br>dv := a * dt<br>v := v + dv<br>du := v * dt<br>u := u + du<br>t := t + dt | t := 0<br>m := 0.50<br>C := 0.30<br>u := 2.0<br>v := 0<br>dt := 0.01 |

▲ **figuur 21** computermodel voor een massa aan een veer




▲ **figuur 22** oscillatie: het diagram bij het model van figuur 21

Ook zonder dat je een model echt doorrekent, kun je aan de modelregels al veel zien:

- Een constante eerste afgeleide leidt tot een recht evenredig verband.
- Een eerste afgeleide die evenredig is met de grootheid zelf, leidt tot een exponentieel verband.
- Een constante tweede afgeleide leidt tot een kwadratisch verband.
- Als de tweede afgeleide evenredig is met de grootheid zelf en tegengesteld gericht, dan krijg je een oscillatie.

Voor computermodellen geldt hetzelfde als voor de modellen eerder in het hoofdstuk: je dient altijd goed in de gaten te houden wat de aannamen zijn. Zo weet je dat je een vereenvoudiging maakt als je bij een beweging de wrijvingskracht niet in het model opneemt. Je weet dan ook meteen hoe je het model kunt verbeteren als het de werkelijkheid niet goed beschrijft.

## Onthoud!

- In een computermodel deel je de berekening op in kleine tijdstapjes.
- De tijdstapjes moeten kleiner zijn als de grootheden sneller variëren.
- Bij een eerste-ordesysteem is er iets gegeven voor de eerste afgeleide.
- Bij een tweede-ordesysteem is er iets gegeven voor de tweede afgeleide.
- Als geldt $\mathrm{d}x \sim x$, dan krijg je exponentiële afname of toename.
- Als voor de tweede afgeleide van de positie $x$ (de versnelling $a$) geldt $a \sim x$, dan krijg je een harmonische trilling als de evenredigheidsconstante negatief is.

## Opdrachten

**26** Eerste of tweede orde

Geef steeds aan of het om een eerste- of een tweede-ordesysteem gaat.

**a** Een model voor de hoogte van een opstijgende raket als functie van de tijd, waarbij er rekening mee wordt gehouden dat de massa afneemt.

**b** Een model voor $z(t)$ met beginwaarden $z(0)$ en $z'(0)$.

**c** Een model voor $v(t)$ met beginwaarde $v(0)$.

**27** Snel of langzaam vallen

Een voorwerp valt van 1000 km hoogte naar de aarde. Je wilt weten hoelang dit duurt. Als stopconditie gebruik je: '`Als h < = 0 dan Stop Eindals`'.

**a** Leg uit hoe het komt dat '`Als h = 0 dan Stop Eindals`' niet zou werken.

**b** Maak een model waarbij je alleen rekening houdt met de gravitatiekracht, voer het uit en bepaal de tijdsduur van het vallen.

**c** Leg uit dat je model een langere tijdsduur oplevert als je luchtweerstand inbouwt.

**28** Snel of langzaam verval

Als je het verval van een bepaalde isotoop wilt beschrijven met een computermodel, heb je de halveringstijd nodig.

**a** Zoek de halveringstijd van Po-215 op.

Er geldt: $A = -\frac{dN}{dt}$ en ook $A = \frac{\ln 2}{t_{½}} \cdot N$

**b** Bereken welke waarde je in het model van figuur 19 voor `Constante` zou moeten nemen om het verval van Po-215 te modelleren, als je `dt = 0.01` zou gebruiken.

**c** Leg uit dat het voor deze isotoop nodig is een veel kleinere tijdstap te nemen.

**+29** Verval na verval

Th-227 vervalt tot Ra-223, dat op zijn beurt ook vervalt. Er wordt een model gemaakt voor de hoeveelheid Ra-223 als functie van de tijd.

**a** Is het model dat de hoeveelheid Ra-223 weergeeft, een eerste-orde- of een tweede-ordesysteem? Leg je antwoord uit.

**b** Maak het model, reken het door en teken de grafiek van de hoeveelheid Ra-223 als functie van de tijd voor de eerste honderd dagen.

**30** Wegglijden

Als een lange kabel voor een deel over de rand van een afgrond hangt (figuur 23), dan zal alleen de zwaartekracht op het overhangende deel ervoor zorgen dat de kabel in beweging komt. Dat deel wordt steeds groter. Het nog niet complete model voor deze beweging staat in figuur 24.




◀ **figuur 23** Een kabel hangt over de rand van een afgrond.

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| Meffectief := (x/L) * m<br>Als x > L Dan Meffectief := m<br>EindAls<br>F := Meffectief * 9.81<br>a :=<br>v :=<br>x :=<br>Als x > 100 Dan<br> Stop<br>EindAls<br>t := t + dt | m := 5<br>L := 10<br>x := 0.1<br>v := 0<br>t := 0<br>dt := 0.1 |

▲ **figuur 24** computermodel voor een glijdende kabel

In het model is ervoor gezorgd dat de kracht niet meer evenredig met $x$ toeneemt als $x$ groter is dan de lengte van de kabel. Vanaf die $x$ is de kracht constant.

**a** Leg uit waarom dat zo moet zijn.
**b** Leg uit wat het nadeel is als de waarde voor `dt` heel groot wordt gekozen.
**c** Vul het model aan: vul steeds in wat er achter de := moet komen.
**d** Typ het model in, laat het doorrekenen en maak een $(x,t)$-diagram, een $(v,t)$-diagram en een $(a,t)$-diagram.

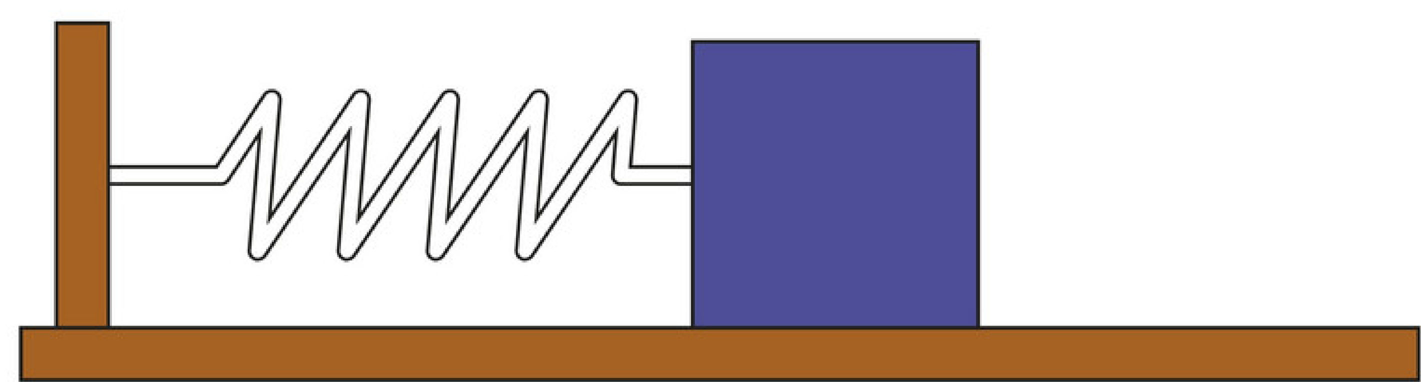
Nu kun je het model gebruiken om de beweging te onderzoeken bij verschillende beginwaarden.

**e** Neem als beginwaarde $x = 0{,}2$ en onderzoek na hoeveel tijd de kabel de grond raakt.

**31** Resonantie

Als een massa aan een veer op een zeer glad horizontaal vlak beweegt, is de kracht evenredig met de uitrekking van de veer (figuur 25). Als de veer naar rechts is uitgetrokken, werkt de veerkracht naar links; als de veer naar links is ingeduwd, duwt de veerkracht terug naar rechts. De veerkracht wordt gegeven door $F = -C \cdot x$. Daarnaast is er iemand die op een regelmatige manier aan de veer trekt. Die tweede kracht is afhankelijk van de tijd. Het niet-volledige model voor deze veer met aandrijving staat in figuur 26. Het argument van de sinus is in radialen.

**a** Welke waarde heeft de periode van de aandrijfkracht?
**b** Vul het model aan.
**c** Typ je model in, laat het doorrekenen en maak de diagrammen van plaats, snelheid en versnelling als functie van de tijd. Zorg ervoor dat je programma rekent in radialen, niet in graden.



▲ **figuur 25** een massa-veersysteem waarbij zwaartekracht geen rol speelt

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| `F := Fmax * Sin(t) - …`<br>`a :=`<br>`v :=`<br>`x :=`<br>`t := t + dt` | `m := 2`<br>`Fmax := 1`<br>`C := 8`<br>`x := 0.5`<br>`v := 0`<br>`t := 0`<br>`dt := 0.005` |

▲ **figuur 26** computermodel voor een aangedreven trilling

Dit model ga je gebruiken om de beweging verder te onderzoeken. Je gaat kijken bij welke $C$ de trilling het heftigst wordt, dus je zoekt de $C$ waarbij de maximale uitwijking het grootst wordt. Daarbij is het nodig dat je programma langer loopt.

**d** Leg uit dat je beter daartoe het aantal iteraties kunt vergroten dan de tijdstap vergroten.
**e** Leg uit hoe je gaat onderzoeken bij welke $C$ de maximale uitwijking het grootst is.
**f** Doe het onderzoek. Noteer de waarde van $C$ waarbij de uitwijking maximaal is.

**32** Wielrennen met vermogen

Een wielrenner kan een constant vermogen van 200 W leveren zonder dat zijn spieren verzuren. Hoe snel hij dan gaat, hangt er onder andere vanaf of hij stijgt of daalt. Figuur 27 geeft een incompleet model voor die snelheid als er een parcours is dat eerst vlak is en later een helling heeft van 0,1 radialen.

**a** Hoeveel graden is dat?
**b** Vul het model aan.
**c** Doe de computerberekening en maak een grafiek van de snelheid tegen de tijd.
**d** Leg uit wat je moet veranderen als er een afdaling is.

| modelvergelijkingen | beginwaarden |
|---|---|
| Fspier := …/v<br>Flucht := k * v^2<br>Fhelling := m * g * Sin(Alfa)<br>Fres := Fspier - Fhelling - Flucht<br>a := F/m<br>v :=<br>x :=<br>Als x > 10000 dan Alfa := 0.1 Eindals<br>Als x > 15000 dan Stop Eindals<br>t := t + dt | m := 80<br>P := 200<br>Alfa := 0<br>x := 0<br>v := 10<br>k := 0<br>g := 9.81<br>t := 0<br>dt := 0.005 |

▲ **figuur 27** model voor de snelheid van een wielrenner

**33** Helling en accu

Een zonneauto wil het parcours van het model in figuur 27 afleggen. De zon schijnt niet, de accu is gevuld met $E$ = 1,2 MJ. Je wilt onderzoeken met welk motorvermogen je moet rijden om zo snel mogelijk boven te komen, zonder dat de accu helemaal leeg raakt. De massa is 200 kg, verder is alles hetzelfde als in het model van figuur 27.

**a** Wat is de goede modelregel om bij te houden of de accu nog niet leeg is: `E := E - P * t` of `E := E - P * dt`? Leg je antwoord uit.
**b** Voer het model in en ga na dat je met $P$ = 500 W niet boven komt.
**c** Onderzoek met welk vermogen je het snelst boven komt.

Je hebt nu de snelste tijd die hoort bij de aannamen die je hebt gemaakt. De helling, de inhoud van de accu en de massa van de wagen kun je niet veranderen, maar misschien kan de rit toch sneller verlopen.

**d** Wat zou je in het model kunnen veranderen aan de manier waarop de energie wordt gebruikt tijdens de rit?

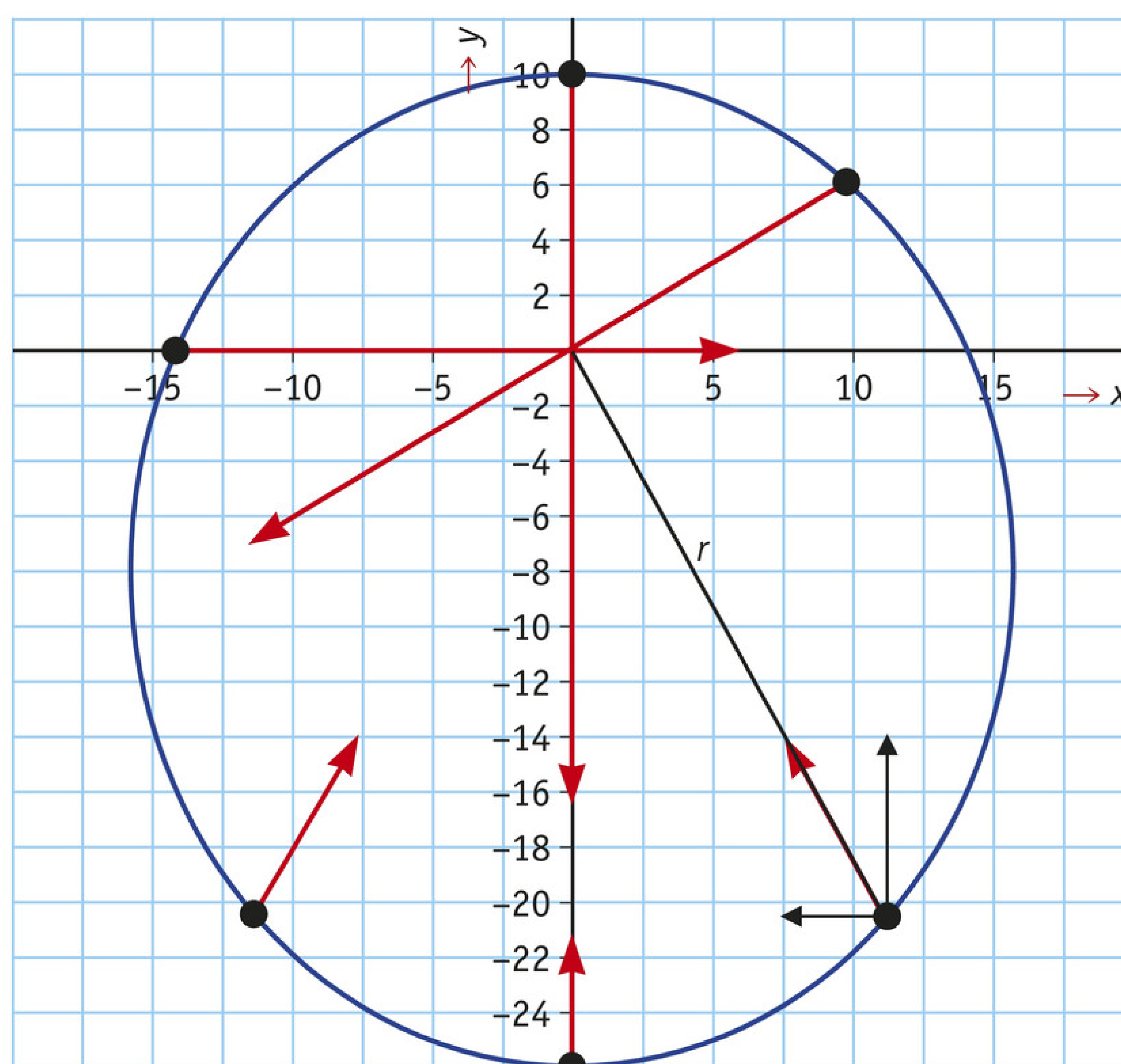
# 5 Zonnestelsels en atomen

In deze paragraaf leer je:
- dat bij bewegingen in twee dimensies de *x* en de *y* apart kunnen worden behandeld;
- dat bij systemen met veel onderdelen die onderling krachten uitoefenen het aantal rekenstappen groot wordt;
- dat er overeenkomsten en verschillen zijn tussen elektronen in een atoom en planeten in een zonnestelsel;
- dat atoommodellen door de eeuwen heen steeds meer verfijnd zijn.

Met computermodellen kunnen zowel heel grote systemen zoals sterrenstelsels, als heel kleine systemen zoals elektronen binnen een atoom worden bestudeerd. Bij modellen van heel veel deeltjes of sterren die onderling krachten op elkaar uitoefenen, gaat de rekencapaciteit van de computer een rol spelen.

## Modellen in twee dimensies

Een planeet beweegt rond de zon onder invloed van de gravitatiekracht. Tot nu toe zag je in computermodellen steeds een kracht en een beweging in één richting. Een planeet verandert echter steeds van richting. Je moet in je model de kracht ontbinden in twee componenten, en de versnelling, de snelheid en de positie in twee richtingen uitrekenen. Wat de verhoudingen tussen de componenten zijn, is geïllustreerd in figuur 28.




▲ **figuur 28** de richting en de grootte van de kracht op een planeet

In het computermodel van voorbeeldopgave 11 is ervoor gezorgd dat de kracht steeds naar de stilstaande zon toe is gericht. In hoofdstuk 13 heb je kunnen lezen dat de planeetbanen ellipsen zijn. In voorbeeldopgave 11 wordt onderzocht of dat alleen klopt als de kwadratenwet geldt, of dat dit ook zo zou zijn als de kracht een beetje zou afwijken van de kwadratenwet.

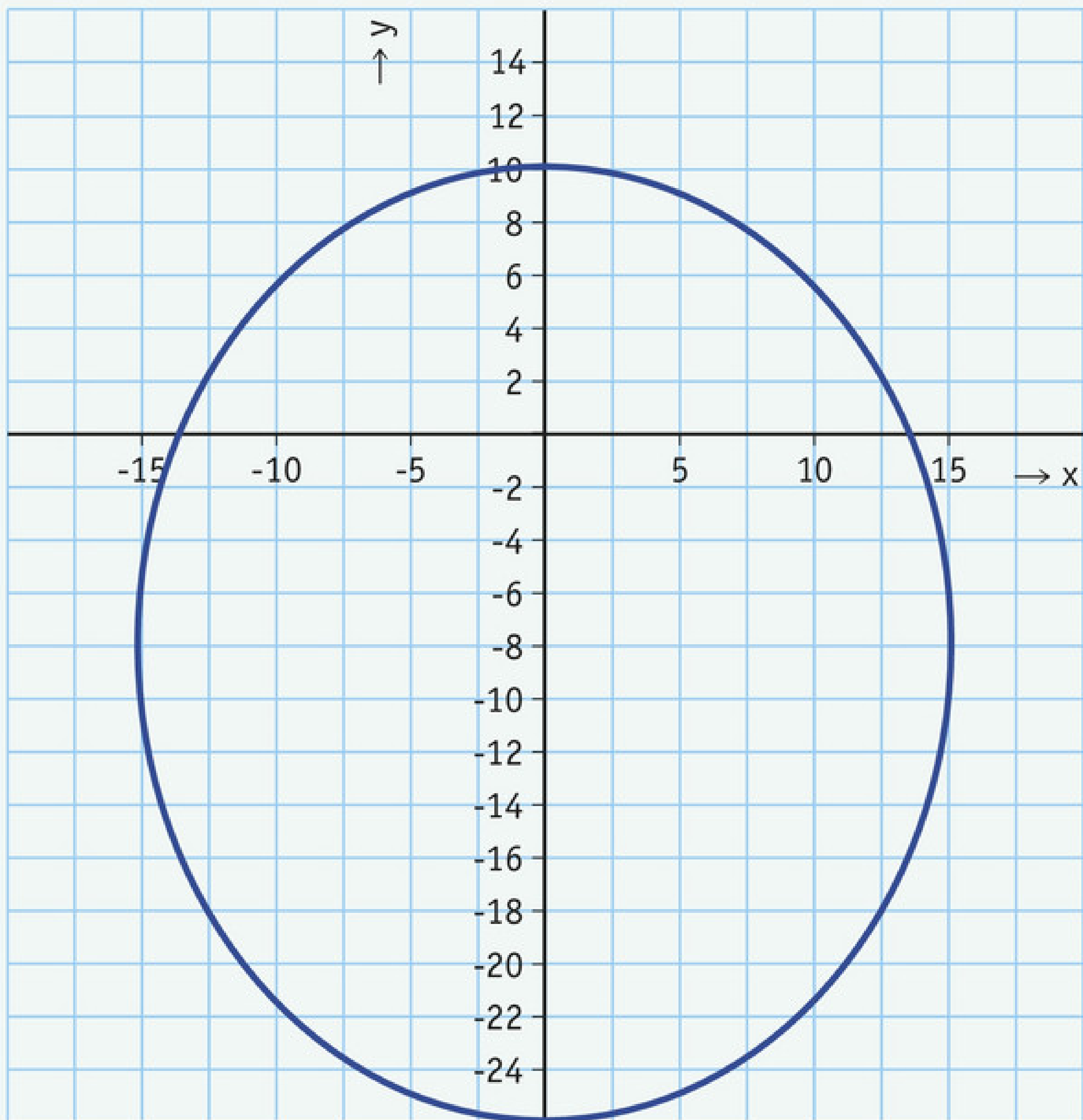
## Voorbeeldopgave 11

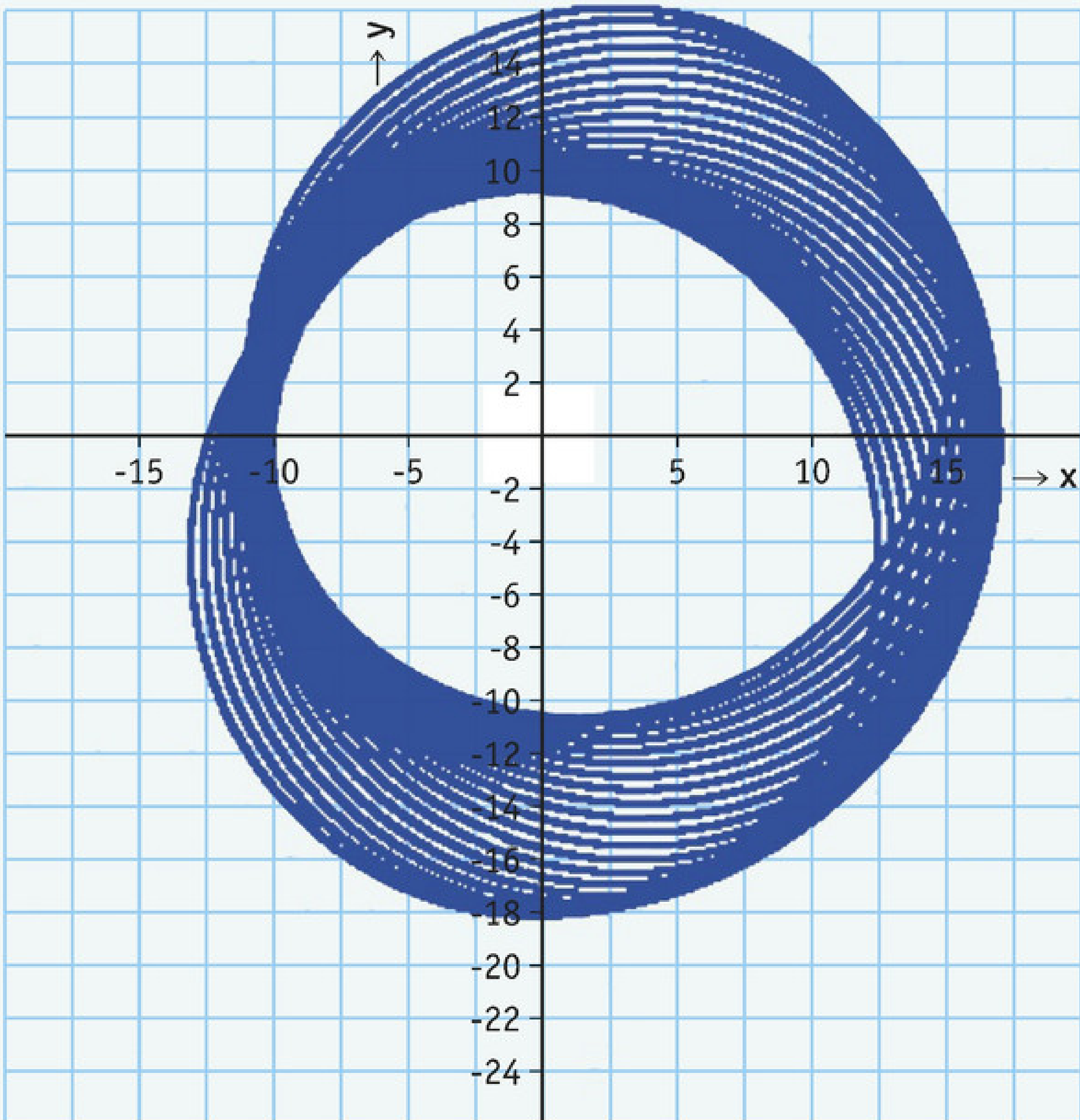
Onderzoek of je voor planeetbanen ook een gesloten ellips zou krijgen als de kwadratenwet niet precies zou gelden, bijvoorbeeld als de gravitatiekracht evenredig zou zijn met $r^{-1{,}96}$.

*Uitwerking*
Laat de planeet bewegen in het ($x$,$y$)-vlak. Dan wordt het model als in figuur 29. Als je voor macht eerst −2 neemt en daarna −1,96, dan kun je aan de hand van de grafieken van figuur 30 antwoord geven op de onderzoeksvraag.

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| `r := sqrt(x^2 + y^2)`<br>`F := constante * r^macht`<br>`a := F/m`<br><br>`ax := -x/r * a`<br>`dvx := ax * dt`<br>`vx := vx + dvx`<br>`dx := vx * dt`<br>`x := x + dx`<br><br>`ay := -y/r * a`<br>`dvy := ay * dt`<br>`vy := vy + dvy`<br>`dy := vy * dt`<br>`y := y + dy`<br><br>`t := t + dt` | `m := 1`<br>`x := 0`<br>`y := 10`<br>`vx := 1.2`<br>`vy := 0`<br>`constante := 1`<br>`macht := -1.96`<br>`dt := 0.005` |

▲ **figuur 29** model voor de beweging rond een zon




▲ **figuur 30** uitkomsten van het model van figuur 29:
(a) de beweging met macht −2; (b) met macht −1,96

Uit de computerberekening volgt dat bij een macht die afwijkt van 2 de beweging niet op haar beginpunt uitkomt. De baan is geen gesloten ellips.

## Veel deeltjes

Sterrenkundigen en ruimtevaartwetenschappers doen vaak berekeningen met de gravitatiekracht. Ruimtevaartuigen worden met behulp van de gravitatie langs planeten gestuurd, zoals je hebt kunnen lezen in hoofdstuk 13. De focus in de computationele sterrenkunde ligt op het doorrekenen van systemen van zeer veel sterren. Men wil zo inzicht verkrijgen in hoe verschillende vormen van sterrenstelsels met honderden miljarden sterren kunnen ontstaan, of begrijpen wat er gebeurt als twee sterrenstelsels door elkaar heen bewegen (figuur 31).



▲ **figuur 31** wisselwerking tussen twee sterrenstelsels

Slim rekenen is hierbij cruciaal, anders kost dit te veel rekentijd. Wanneer je bijvoorbeeld wilt rekenen met tweeduizend sterren, dan duurt dat veel meer dan duizend keer zo lang als een berekening waarbij twee sterren om elkaar heen draaien. Je moet namelijk niet alleen in elke tijdstap de verplaatsing van elke ster uitrekenen, maar ook bij elk van die tweeduizend sterren de totale kracht uitrekenen als som van de krachten van 1999 andere sterren op die ene ster. Dat zijn 1999 afstanden en 1999 krachten. Het resultaat na al die berekeningen is de bewegingsvergelijking van één enkele ster. Je moet dit tweeduizend keer doen om iets te kunnen zeggen over de beweging van alle tweeduizend sterren. Het aantal berekeningen is dus evenredig met het kwadraat van het aantal sterren.
Ook voor veel andere berekeningen geldt dat bij een toename van het aantal deeltjes de computer lang bezig is. Dit geldt bijvoorbeeld voor berekeningen aan moleculen bij de bestudering van faseovergangen, of aan elektronen bij de bestudering van materiaaleigenschappen van metalen, magneten en supergeleiders. Snel rekenen is belangrijk: onderzoekers willen de resultaten van de berekeningen eerder publiceren dan concurrerende onderzoeksgroepen. De **rekencapaciteit** van een computer is het aantal berekeningen dat per seconde kan worden uitgevoerd. Het slim toepassen van de grote rekencapaciteit van de allerbeste computers is een belangrijk specialisme binnen de wetenschap.

## Atoommodellen door de eeuwen heen

Een atoom, bijvoorbeeld van het element ijzer, is net als een sterrenstelsel ook een systeem met veel deeltjes. Bij ijzer is dat een kern met daaromheen 26 elektronen. In bijvoorbeeld een eiwitmolecuul zitten honderden atomen met in totaal duizenden elektronen. Natuurkundigen en chemici doen daar berekeningen aan met supercomputers.

Voor inzicht in hoe elektronen zich gedragen in materialen, is het handig te beginnen met het eenvoudigste atoom: een waterstofatoom, dat bestaat uit een kern met slechts één elektron. Een blik op de geschiedenis laat zien dat wetenschappers met opeenvolgende modellen steeds meer, steeds nieuwere observaties konden verklaren. In figuur 32 is dit schematisch weergegeven.

- In de oudheid had *Demokritos* al het idee dat materie bestaat uit discrete deeltjes. Daarmee verklaarde hij dat dingen kunnen veranderen, terwijl het heelal als geheel volgens hem onveranderlijk moest zijn.
- Het eerste model dat kwantitatief meetbare voorspellingen opleverde, was dat van *Dalton*. Het ging ervan uit dat een atoom een ondeelbaar bolletje is. Hiermee kun je verklaren hoe gasdruk afhangt van volume en temperatuur: je hoeft alleen te zeggen hoe hard de bolletjes tegen de wanden van een vat aanbotsen.
- Toen bleek dat elektronen kunnen worden vrijgemaakt uit een atoom, stelde *Thomson* het 'krentenbolmodel' op. De negatieve elektronen zouden als een soort krenten in een positief, deegachtig materiaal zitten.
- *Rutherford* deed proeven waarbij alfadeeltjes op een heel dun laagje goud werden geschoten; sommige van die positief geladen deeltjes kaatsten terug. Dat werd verklaard met een model waarin een heel harde, massieve kern in een atoom zit, met daaromheen de elektronen bewegend als in een mini-zonnestelsel (hoofdstuk 16).
- *Bohr* nam als volgende stap aan dat de elektronen in een atoom slechts bepaalde 'toestanden' met vaste energieën kunnen bezetten, wat een goede beschrijving gaf van de gemeten absorptie- en emissiespectra. In proeven bleek namelijk dat atomen slechts fotonen met bepaalde golflengten kunnen absorberen en uitzenden. De spectra zijn lijnenspectra (hoofdstuk 9).
- Met de kern leek iets niet te kloppen; die bleek zwaarder dan de massa van het aantal protonen dat nodig is om de lading van de kern te verklaren. *Chadwick* vond de oplossing door te stellen dat er ook neutrale deeltjes zijn die ongeveer evenveel massa hebben als een proton: de neutronen.
- Belangrijker voor het verklaren van het energiespectrum is de eerste echt quantummechanische aanpassing aan het atoommodel. Nadat uit interferentieproeven duidelijk was geworden dat elektronen golfeigenschappen hebben, kwam het beeld naar voren van een elektron als een golfpatroon, dat moet passen in een kleine ruimte. Het deeltje-in-een-doosmodel *beschrijft* niet alleen het spectrum, het *verklaart* ook hoe het komt dat de energieën discreet zijn.

  Het beeld dat nu als het beste atoommodel wordt beschouwd, is opgesteld door *Schrödinger*. Het is een beeld van een elektronengolf die wordt beïnvloed door de aantrekkende kracht van de kern. Er is geen doosje waarvan de afmetingen van tevoren vastliggen. Een waterstofatoom bestaat uit een kern die het elektron aantrekt. Er ontstaat een golfpatroon dat de waarschijnlijkheid beschrijft voor het aantreffen van het elektron op een bepaalde positie (hoofdstuk 12). De energiewaarden die daarbij horen, kunnen worden afgeleid, maar niet met het wiskundig gereedschap van het vwo. Het resultaat voor de mogelijke energiewaarden (in eV) in een waterstofatoom is: $E_n = -\dfrac{13{,}6}{n^2}$

Merk op dat het laatste model de voorgaande modellen omvat: voor sommige eigenschappen van een stof kun je het atoom bijvoorbeeld zien als één object dat tegen de wanden van een vat botst en hoef je je niet druk te maken over wat er binnen in een atoom gebeurt. Atoommodellen zijn op grond van nieuwe waarnemingen steeds verfijnd, waarbij ook de oude waarnemingen steeds correct worden beschreven in het nieuwe model.
De belangrijkste overeenkomst tussen het zonnestelsel en een atoom is dat er in beide gevallen een centraal punt is, dat een aantrekkende kracht uitoefent op respectievelijk de planeten en de elektronen. Die kracht voldoet in beide gevallen aan de kwadratenwet. Het grote verschil is dat een planeet elke baan kan beschrijven, terwijl een atoom zo klein is dat het golfkarakter van quantumdeeltjes dominant is: er zijn slechts bepaalde golfpatronen mogelijk. Dat zijn driedimensionale waarschijnlijkheidsverdelingen, met discrete energieën.

| circa 450 v. Chr. | 1808 | 1897 | 1911 | 1914 | 1926 |
|---|---|---|---|---|---|
| Demokritos | Dalton | Thomson | Rutherford | Bohr | Schrödinger |
| | | | | K-schil<br>M-schil<br>L-schil | |

▲ **figuur 32** de opeenvolgende atoommodellen tot en met Schrödinger

## Onthoud!

- Bij tweedimensionale bewegingen ontbind je in een computermodel de kracht in twee componenten.
- Als zeer veel deeltjes krachten op elkaar uitoefenen, neemt de rekentijd toe met het kwadraat van het aantal deeltjes.
- In een zonnestelsel en in een atoom heeft de aantrekkende kracht dezelfde vorm, maar bij het atoom zorgt het quantumkarakter ervoor dat er een discreet energiespectrum is.
- Steeds nieuwere modellen van wat een atoom is, verklaren steeds meer meetbare eigenschappen. De oudere modellen zijn niet fout, maar hebben een beperkt geldigheidsgebied.

## Opdrachten

**34** Tijdstap
In een dubbelpulsar draaien twee neutronensterren op afstand 1,0 lichtseconde (ls) rond elkaar. De periode is ongeveer 8 uur. De maan staat op ongeveer 1,3 ls van de aarde. Je modelleert beide bewegingen.
Leg uit dat in het ene geval een kleinere tijdstap noodzakelijk is dan in het andere geval.

**35** Aantal rekenstappen
Maak steeds een schatting van het aantal rekenkundige bewerkingen dat je nodig hebt om alle krachten uit te rekenen voor één iteratie van de simulatie van de beweging van:
**a** de sterren in een melkwegstelsel die elkaar allemaal aantrekken;
**b** een ster in een melkwegstelsel die wordt beïnvloed door de gemiddelde dichtheidsverdeling van de andere sterren;
**c** de atomen in een watermolecuul die ten opzichte van elkaar trillen.

**36** Door of om de aarde?
Stel dat er een tunnel van de ene kant van de aarde naar de andere kant wordt gegraven, door het middelpunt van de aarde heen. De zwaartekracht is nul in het middelpunt en neemt recht evenredig met de afstand vanuit het midden toe, tot de bekende waarde op het aardoppervlak. Iemand valt in dit gat. Er is geen luchtweerstand. Zie het model in figuur 33.
**a** Leg uit wat bij de puntjes in de eerste regel moet staan.
**b** Voer het model uit en onderzoek hoelang het duurt voor de persoon de andere kant van de aarde bereikt.
**c** Leg uit dat je dit systeem kunt vergelijken met een massa aan een veer.

**d** Bereken de periode van dat massa-veersysteem en vergelijk die met het antwoord van opdracht b.
**e** Bereken de maximale snelheid van een dergelijk massa-veersysteem en vergelijk die snelheid met de maximale snelheid in de simulatie.
**f** Bereken de tijd die het voorwerp nodig zou hebben om de andere kant te bereiken als het vlak over het aardoppervlak een cirkelbaan zou beschrijven met de zwaartekracht als middelpuntzoekende kracht.

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| F := -m * g * (x/…)<br>a := F/m<br>v := v + a * dt<br>x := x + v * dt<br>t := t + dt | m := 80<br>g := 9.81<br>R := 6370000<br>x := R<br>v := 0<br>t := 0<br>dt := 1 |

▲ **figuur 33** model voor het vallen door een gat in de aarde

**37** Langs een kern
Als je de proef van Rutherford – waarbij een alfadeeltje langs een kern schiet – in een computermodel wilt beschrijven, dan is het belangrijkste verschil met het model in figuur 29 dat twee mintekens verdwijnen.
**a** Leg dat uit.
**b** Maak een tekening van de kern, het alfadeeltje en de krachten die werken.
**c** Voer de modelregels en de startwaarden in en zoek de juiste waarden voor de massa, de ladingen en de grootte van de kracht op in Binas.
**d** Voer het model uit en maak een afbeelding van de baan van een deeltje dat langs de kern schiet.
**e** Vergelijk twee banen van deeltjes die met dezelfde snelheid beginnen, maar het ene verder naast de kern dan het andere.
**f** Vergelijk banen die op hetzelfde punt en in dezelfde richting beginnen, maar met verschillende snelheid.

**38** Twee formules
Het model voor het deeltje in een doosje geeft als energieën: $E_n = \dfrac{n^2 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot L^2}$

**a** Noem twee dingen die kloppen met de gemeten eigenschappen van het spectrum van een waterstofatoom.
**b** Noem één aspect dat niet klopt.

Deze formule beschrijft de energieniveaus van een waterstofatoom goed: $E_n = -\dfrac{13{,}6}{n^2}$ .

Op het eerste gezicht lijken de formules heel verschillend. Toch zijn er overeenkomsten.
**c** Leg uit dat in beide gevallen de laagste energie hoort bij $n = 1$.
**d** Leg uit dat de tweede formule correct het aspect van het spectrum beschrijft dat incorrect is in het deeltje-in-een-doosmodel.

**+39** GaAs

In atomen zijn er meerdere elektronen, behalve in waterstof. Het blijkt zo te zijn dat meerdere elektronen in hetzelfde energieniveau kunnen zitten: 2 in het eerste, 8 in het tweede. In een horizontale rij van het periodiek systeem wordt zo'n niveau opgevuld met steeds meer elektronen.

**a** Leg uit dat als je verder naar rechts gaat, de atomen kleiner worden, ondanks het feit dat ze meer deeltjes bevatten.

Er bestaan halfgeleiders die worden afgekort als GaAs. De twee elementen vormen een rooster.

**b** Zoek de atoomstraal van beide op en vergelijk de waarden met wat je verwacht op grond van het antwoord van opdracht a.

**+40** Drie modellen

In figuur 34 zie je drie potentiaalputten met daarin de energieniveaus die met computermodellen zijn berekend.

**a** Beschrijf in alle gevallen de verhouding tussen de waarden van de energie.

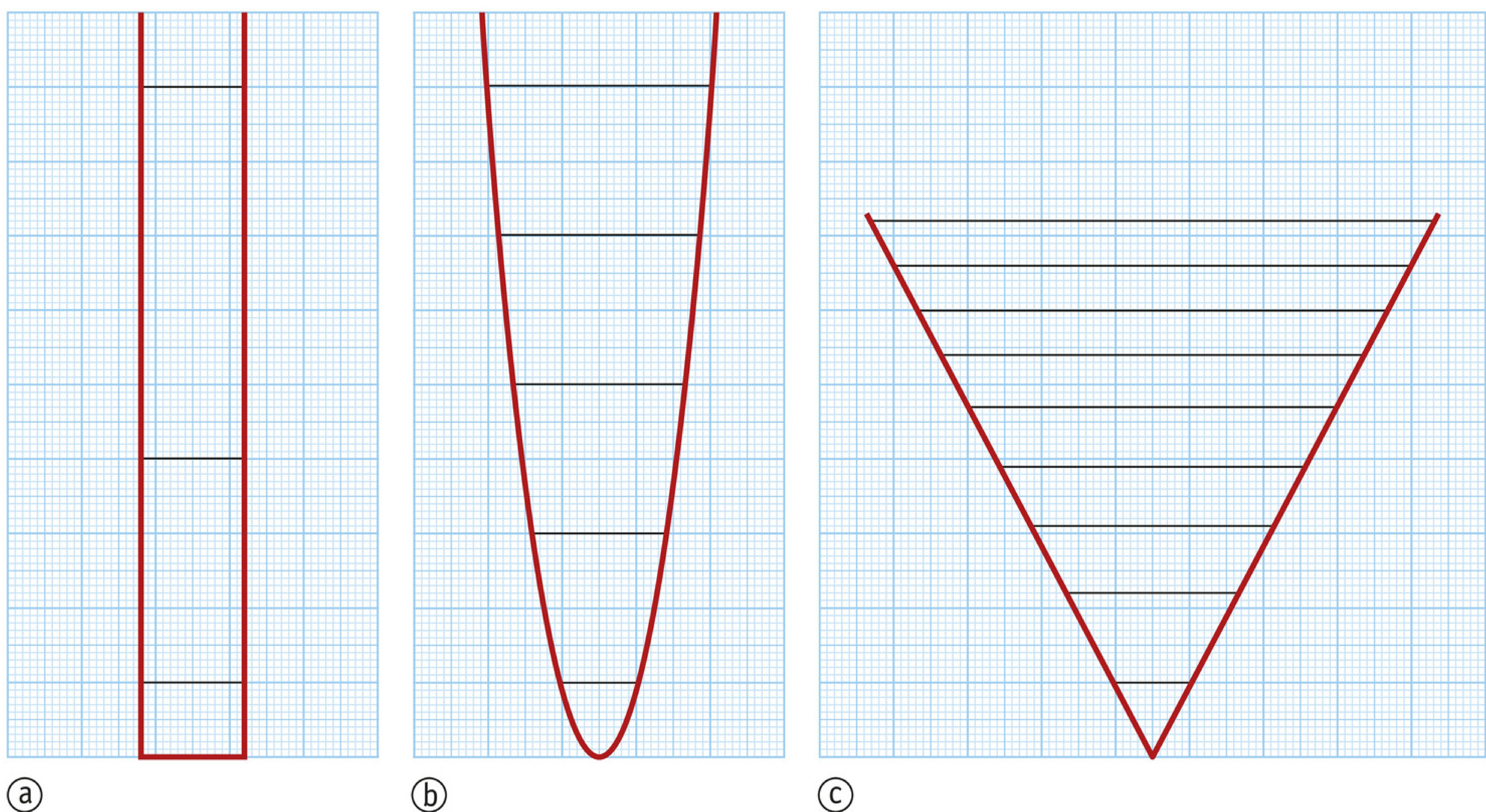
**b** Beschrijf in alle gevallen de verhouding van de energiesprongen van een niveau naar het niveau erboven.

**c** Leg uit hoe de berekening van de energieniveaus in figuur 34a verloopt.

In alle potentiaalputten hebben de golffuncties van onder naar boven één, twee, drie, enzovoort 'toppen en dalen'. In figuur 34a heeft de tweede golffunctie een twee keer zo kleine golflengte als de eerste.

**d** Leg uit dat in figuur 34b en 34c de 'golflengte' van de tweede golffunctie wel kleiner is dan de golflengte van de eerste golffunctie, maar dat deze minder dan twee keer zo klein is.

**e** Leg uit wat de consequenties daarvan zijn voor het energieniveauschema.




▲ **figuur 34** drie potentiaalputten

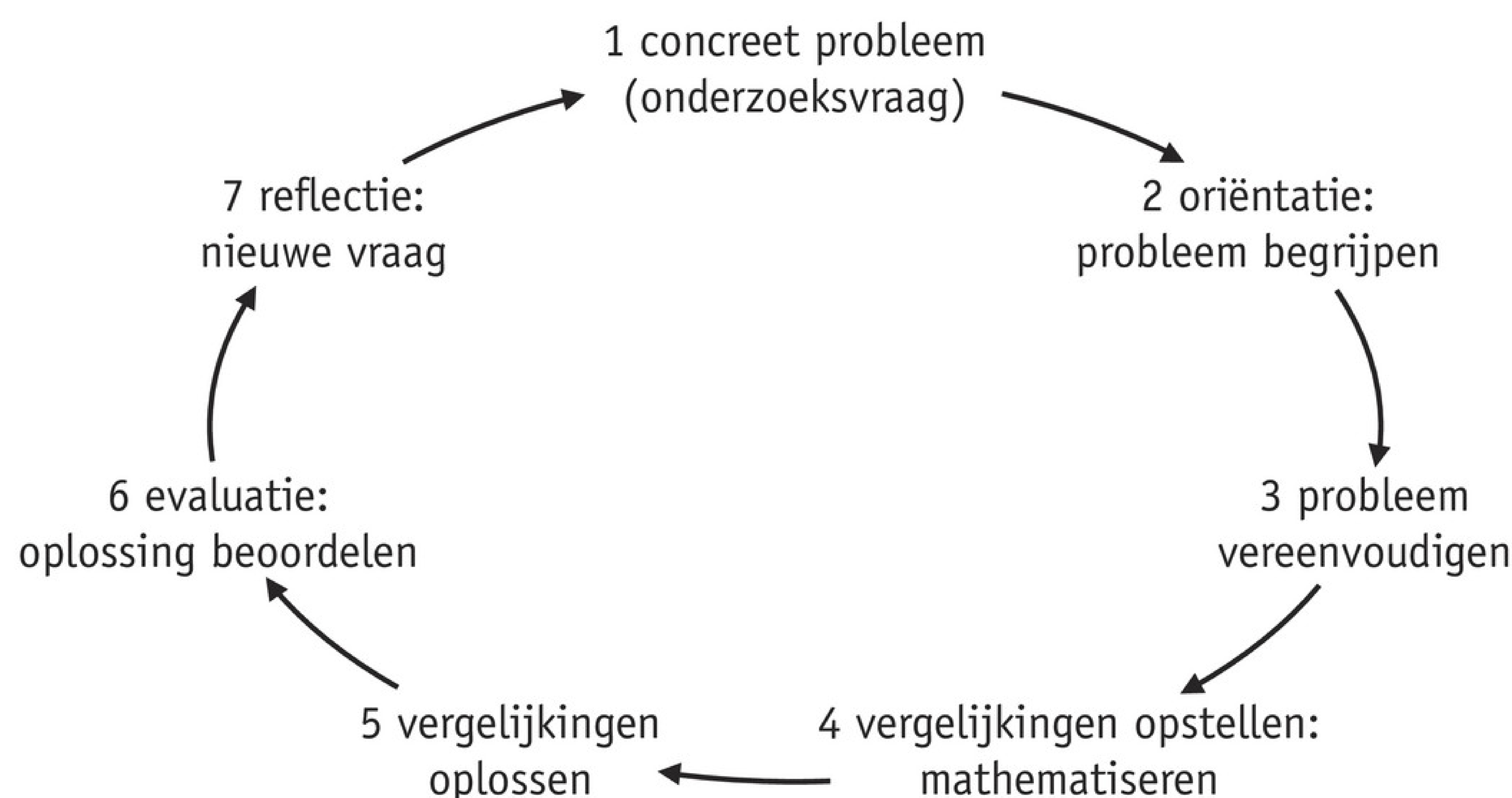
# 6 Verdiensten en beperkingen van modellen

In deze paragraaf leer je:
- dat er een verband is tussen de aannamen die je doet en de beperkte geldigheid van een model;
- dat modellen worden verbeterd via een cyclisch proces.

In de vorige paragraaf zag je dat het atoommodel in de loop van de geschiedenis voortdurend is verbeterd. Dat geldt algemener: een model beschrijft waarnemingen. Zodra een nieuwe waarneming niet klopt met het oude model, moet er een nieuw model komen dat de nieuwe en de oude waarnemingen correct beschrijft. Dat geldt zowel in de klassieke natuurkunde als in de quantumwereld.

## Modelleercyclus

In figuur 35 zie je de stappen van de modelleercyclus. De voorbeeldopgaven geven twee voorbeelden.




▲ **figuur 35** modelleercyclus

**Voorbeeldopgave 12**

Blaadjes die bij rustig herfstweer van de bomen vallen, doen daar veel langer over dan eikels die van dezelfde hoogte vallen (figuur 36). Bij het dalen lijken de blaadjes een constante snelheid te hebben. Die snelheid is ongeveer gelijk voor kleine berkenblaadjes en grote esdoornbladeren.

**a** Stel een model op waarmee je uit de daalsnelheid de dikte van een boomblad (of van een vel papier) kunt berekenen. Geef daarbij aan wat de aannamen in het model zijn en welke wetten van Newton je gebruikt.

**b** Controleer of in je uitdrukking voor de dikte $d$ de eenheden links en rechts van het gelijkteken gelijk zijn.

**c** Wat voorspelt het model voor het laten vallen van een vel papier boven op Mount Everest, vergeleken met het laten vallen in Nederland?

**d** Formuleer zo veel mogelijk voorspellingen die uit je model volgen. Begin kwalitatief en eindig kwantitatief.

**e** Noem twee beperkingen van je model.



▲ **figuur 36** een vallend blad

*Uitwerking*

**a** De aannamen van het model zijn:
- De blaadjes dalen met een constante snelheid.
- De blaadjes dalen in een horizontale stand.
- Omlaag werkt de zwaartekracht $F_z = m \cdot g$, met $m$ de massa van het vallende blad.
- De luchtweerstand werkt omhoog en is gelijk aan: $F_{w,l} = ½ \cdot C \cdot \rho_{lucht} \cdot A \cdot v^2$
- De waarde van $C$ is voor niet-gestroomlijnde voorwerpen ongeveer gelijk aan 1.

Omdat de daalsnelheid constant is, volgt uit de *eerste wet van Newton* dat de resulterende kracht nul is. De zwaartekracht, die naar beneden werkt, en de luchtweerstand, die omhoog werkt, zijn dus even groot zodra de constante daalsnelheid is bereikt. Je stelt de krachten aan elkaar gelijk, met als doel uit te komen op een vergelijking die begint met $d = \ldots$

Dit geeft: $m \cdot g = ½ \cdot \rho_{lucht} \cdot A \cdot v^2$. Oppervlakte en massa zijn niet onafhankelijk van elkaar. Met $m = \rho \cdot V$ en $V = A \cdot d$ krijg je: $\rho_{blad} \cdot d \cdot A \cdot g = ½ \cdot \rho_{lucht} \cdot A \cdot v^2$. De oppervlakte deel je weg en je houdt over:

$$d = ½ \cdot \frac{\rho_{lucht} \cdot v^2}{g \cdot \rho_{blad}}$$

**b** $[d] = \text{m}$

Het quotiënt van de twee dichtheden heeft geen eenheid.

$[g^{-1}] = \text{m}^{-1}\ \text{s}^2$

$[v^2] = \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$

Als je die laatste twee met elkaar vermenigvuldigt, krijg je m. Het klopt.

**c** De dikte $d$ en $\rho_{blad}$ zijn in beide situaties hetzelfde, $g$ is vrijwel hetzelfde, maar $\rho_{lucht}$ is op Mount Everest veel kleiner dan in Nederland. De vergelijking is alleen nog kloppend als de snelheid hoog in de bergen groter is. Je kunt dit resultaat ook krijgen door de vergelijking om te schrijven naar $v = \ldots$ Je deelt dan door $\rho_{lucht}$ zodat je een grotere uitkomst krijgt op Mount Everest.

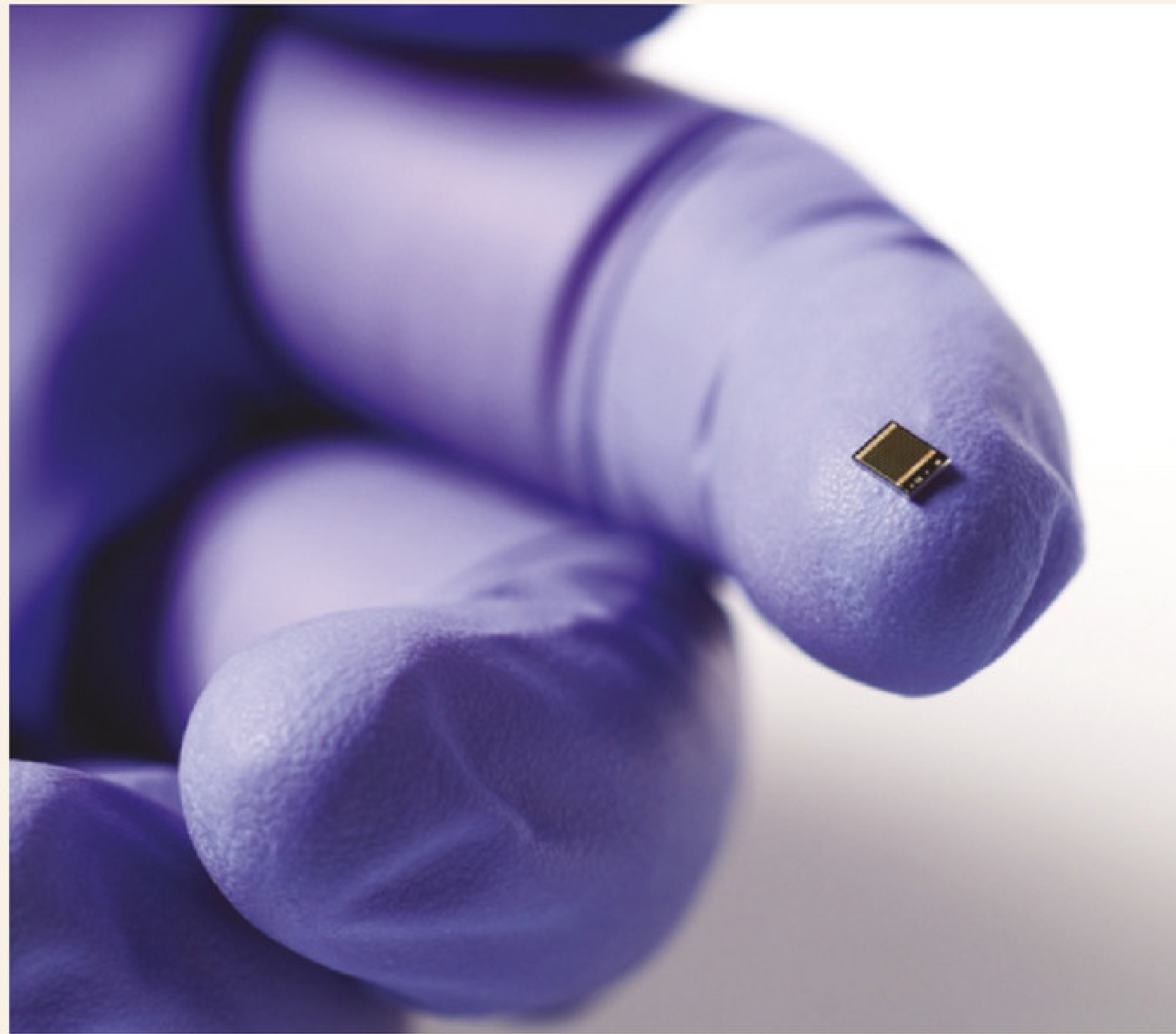
**d** Uit het model volgt:
- dat de snelheid van een vallend blad niet afhankelijk is van de oppervlakte van het blad. Dit is een verdienste van het model, want dat klopt met de waarneming dat grote en kleine bladeren ongeveer even snel dalen;
- (kwalitatief) dat een dubbelgevouwen vel papier sneller daalt dan een enkel vel;
- (kwantitatief) dat het dubbelgevouwen vel een $\sqrt{2}$ keer zo grote snelheid zal hebben.

**e** Er is niet meegenomen dat een blad in werkelijkheid niet horizontaal daalt, maar dwarrelt. Ook is niet meegenomen hoe de lucht langs de randen stroomt.

▶ **EXPERIMENT 1** Verband tussen de lengte van een slinger en de periode (onderzoekspracticum)

## Voorbeeldopgave 13

Lees het krantenartikel.



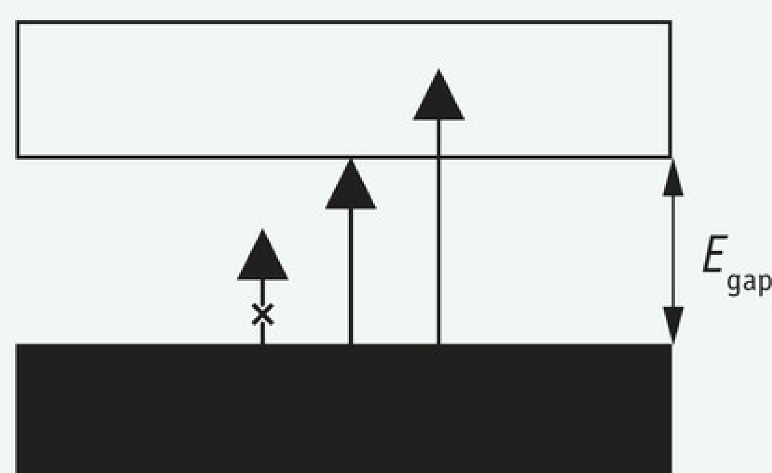
In het Duitse Fraunhofer Institut is een nieuw wereldrecord gevestigd voor het rendement van zonnecellen: liefst 44,7% van het opvallende zonlicht werd daarbij omgezet in elektrische energie. Ter vergelijking: het rendement van 'gewone' moderne PV-cellen ligt rond 17%.

De gebruikte cel is slechts 5,2 $mm^2$ groot en bestaat uit vier lagen van verschillende halfgeleidercombinaties. Deze kunnen zonlicht over een breed spectrum van golflengten omzetten, van uv tot en met infrarood.

*Bron: de Volkskrant*

▲ **figuur 37** een wereldrecord

Je hebt twee ingrediënten nodig om met een model te beschrijven wat er in een zonnecel gebeurt:
- Energieniveaus zijn gequantiseerd. Elektronen binnen een atoom hebben precieze energieniveaus. In een vaste stof worden deze toegestane niveaus banden in plaats van lijnen. Het energieniveauschema van een halfgeleider staat weergegeven in figuur 38. Een energiewaarde die valt binnen de 'gap' kan een elektron niet aannemen.
- De energie van het zonlicht wordt geabsorbeerd in pakketjes met energie $E = h \cdot f$.




▲ **figuur 38** energiebanden

In figuur 38 staat verticaal de energie van elektronen in een halfgeleider. De onderste band is gevuld en er is een kloof (*gap*) naar de volgende band met mogelijke energieën, die leeg is. De energie die je minstens aan een elektron moet geven om van de ene naar de andere band te gaan, noem je $E_{gap}$.
Als een foton op dit materiaal valt, zijn er drie mogelijkheden, gevisualiseerd door de drie pijlen in figuur 38:
- $E_{foton} < E_{gap}$: Het foton wordt niet geabsorbeerd.
- $E_{foton} = E_{gap}$: Het foton wordt geabsorbeerd en bevindt zich daarna aan de onderkant van de geleidingsband. De totale energie $E_{gap}$ is beschikbaar als elektrische energie.
- $E_{foton} > E_{gap}$: Het foton wordt geabsorbeerd en komt hoger in de geleidingsband. Binnen deze band zijn er energieniveaus vlak onder waar het elektron is terechtgekomen. Het elektron gaat in kleine stapjes naar die lagere niveaus en daarbij ontstaat warmte. Het elektron bevindt zich uiteindelijk aan de onderkant van de band. De hoeveelheid energie die beschikbaar is als elektrische energie, bedraagt $E_{gap}$.

Met deze kennis kun je een verband leggen met de uitdrukking voor het omgezette elektrisch vermogen $P = U \cdot I$. Op de zonnecel valt wit licht.

**a** Leg uit dat bij een halfgeleider met een grote $E_{gap}$ de stroomsterkte die de zonnecel levert klein zal zijn.

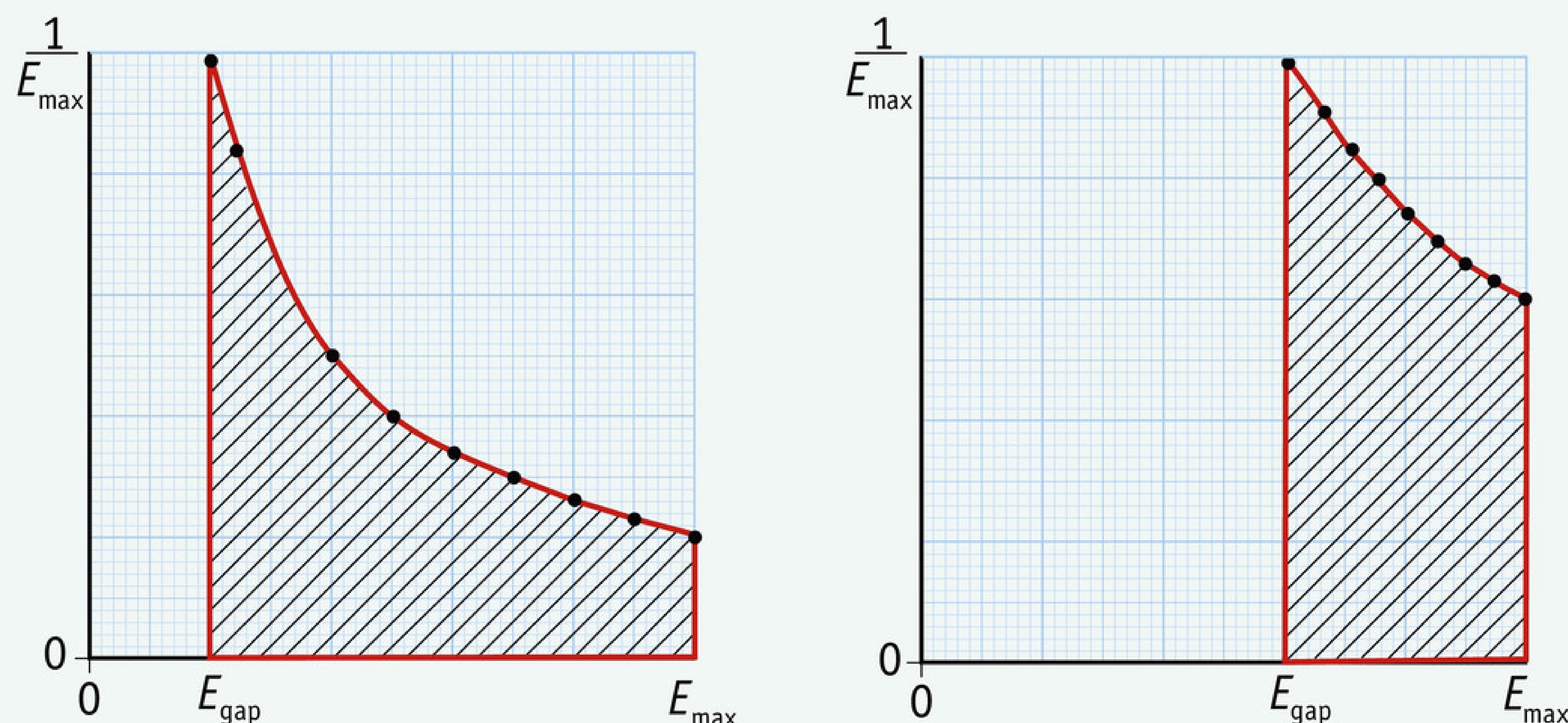
**b** Leg uit dat bij een kleine $E_{gap}$ de spanning die de zonnecel afgeeft klein zal zijn.

**c** Leg uit dat er een optimale waarde voor $E_{gap}$ zal zijn.

Stel nu dat het spectrum dat je op de zonnecel 'afstuurt', loopt van frequentie 0 tot $f_{max}$, met gelijke intensiteit voor alle frequenties. De fotonenergie loopt dan van 0 tot $E_{max} = h \cdot f_{max}$. In figuur 39 staat horizontaal de fotonenergie, verticaal de intensiteit. Als je de intensiteit overal gelijk neemt aan $\frac{1}{E_{max}}$, dan is de hele oppervlakte gelijk aan '1'. De oppervlakte van de hele grafiek stelt alle opvallende energie voor. Gearceerd is het deel van de opvallende energie dat wordt omgezet in elektrische energie: links voor een zonnecel met een kleine gap, rechts met een grote gap.

**d** Wat stelt het niet-gearceerde deel links van $E_{gap}$ voor?

**e** Leg uit hoe je in figuur 39 kunt zien in welk van de twee gevallen de meeste warmte ontstaat.




▲ **figuur 39** De opvallende energie van het licht wordt in drie delen verdeeld.

*Uitwerking*

**a** Een zonnecel met een grote $E_{gap}$ zal alleen de fotonen met een korte golflengte (en dus hoge energie) absorberen. Per seconde worden er dus weinig fotonen geabsorbeerd en dat zorgt ook voor weinig elektronen die in de zonnecel bruikbare elektrische energie krijgen. Dat komt overeen met een lage stroomsterkte.

**b** Als de $E_{gap}$ klein is, dan is de beschikbare elektrische energie per geëxciteerd elektron klein. Dat komt overeen met een lage spanning, want spanning is de energie per lading.

**c** Het vermogen wordt gegeven door $P = U \cdot I$. De effecten bij opgave a en b zorgen voor verlies aan beschikbaar elektrisch vermogen. Bij $E_{gap} = 0$ is het vermogen nul (want de spanning is dan nul), bij $E_{gap}$ = 'heel groot' is het vermogen ook nul, want de stroom is dan nul omdat er vrijwel geen fotonen zijn met voldoende energie om een elektron naar de bovenste band te brengen. Er zal ergens een optimum zijn waarbij het vermogen maximaal is.

**d** Het niet-gearceerde deel links van $E_{gap}$ komt overeen met energie uit het licht dat niet wordt geabsorbeerd door de zonnecel, de fotonen hebben een energie die lager is dan $E_{gap}$.

**e** Het gearceerde deel komt overeen met elektrische energie. Het deel rechtsboven in de grafiek komt overeen met warmte. De grafiek links in figuur 39 heeft het grootste niet-gearceerde gebied rechtsboven. Daar ontstaat dus ook de meeste warmte.

## Schets van de ontwikkeling van de natuurkunde

In de afgelopen drie jaar heb je belangrijke stukken natuurkunde bestudeerd. Dat zijn geen losse stukken, er zit een lijn in: in de loop van de geschiedenis is de beschrijving van de natuur minder magisch geworden. De manier waarop oorzaken tot gevolgen leiden, wordt nu beter begrepen dan in de tijd van Galilei en Newton. De natuurwetten die op een modelmatige manier de natuur beschrijven, worden steeds geavanceerder.

Galilei begon met het beschrijven van bewegingen. Newton vond diepere verklaringen voor bewegingen, zoals de gravitatiewet. Die wet is een triomf van de natuurkunde. Zowel bewegingen in het zonnestelsel, de vorm van planeten, eb en vloed, schommels en valbewegingen werden hiermee onder één noemer gebracht. Toch was er iets onbevredigends aan Newtons theorie, want die houdt in dat op onverklaarbare wijze de ene massa een kracht kan uitoefenen op een massa een eind verderop.

In die zin is de theorie van elektrische en magnetische velden moderner. Een lading verandert de ruimte om zich heen, zodanig dat een andere lading wordt aangetrokken of afgestoten. Een elektrische stroom heeft een magnetisch veld om zich heen. Ladingen bewegen in elkaars veld. Door die beweging veranderen de velden en daardoor veranderen op hun beurt de bewegingen weer.

De algemene relativiteitstheorie van Einstein, overigens geen examenstof, past in dit beeld van de ontwikkeling van de natuurkunde. Ook deze theorie is een ‘veldentheorie’: een massa verandert de ruimte om zich heen, daardoor bewegen massa’s door de ruimte en daardoor verandert de ruimte op haar beurt. Er is in de algemene relativiteitstheorie geen onmiddellijke invloed op afstand van massa’s op elkaar, de massa’s beïnvloeden elkaar via de vervorming van de ruimte.

De modellen die beschrijven wat er op fundamenteel niveau aan de hand is, zijn op veel terreinen vrij compleet. De ontwikkeling van veel deelgebieden in de natuurkunde bevindt zich in de fase van het steeds beter leren beheersen van de technieken. Toepassing van de quantummechanica leidt tot de ontwikkeling van betere lasers voor informatietechnologie en medische toepassingen. Beter inzicht in de quantummechanica van materialen, vooral halfgeleiders, leidt tot snellere computers en betere camera’s. Dat is nuttig voor iedereen, maar vooral ook biedt dit de mogelijkheid voor betere waarnemingen aan bijvoorbeeld sterren en betere berekeningen aan bijvoorbeeld elementaire deeltjes.

Zo heeft de mensheid veel natuurkunde goed in de vingers. Maar niet alles. De algemene relativiteitstheorie en de quantummechanica zijn niet met elkaar in overeenstemming. Op hun eigen terrein werken ze allebei uitstekend: de algemene relativiteitstheorie geeft inzicht in zwarte gaten en de uitdijing van het heelal en met de quantummechanica worden atomen, moleculen, reacties, materialen en subatomaire deeltjes perfect beschreven. Maar over het hele plaatje waarin deze theorieën samenkomen, wordt nog hard nagedacht.

**Onthoud!**

- Modellen leveren voorspellingen op.
- Als nieuwe waarnemingen niet kloppen met het oude model, dan moet het model worden verbeterd.

**Opdrachten**

**41** Aannamen bij vallen

De voorspellingen van het model uit voorbeeldopgave 12 kun je testen.

**a** Laat een vel 80-grams papier zo goed mogelijk in horizontale stand vallen en maak een schatting van de snelheid.

**b** Zoek de andere benodigde gegevens op en bereken de dikte van een vel papier zoals die volgt uit de formule in voorbeeldopgave 12.

**c** Bereken hoe dik een pak printerpapier volgens deze berekening zou zijn en ga in op de betrouwbaarheid van het model. Klopt de orde van grootte?

**d** Stel een model op voor de manier waarop de daalsnelheid van bolvormige regendruppels afhangt van de straal.

**e** Door welke veranderde aanname is nu de daalsnelheid *niet* onafhankelijk van de grootte, zoals dat bij papier wel het geval was?

**42** Donkere materie

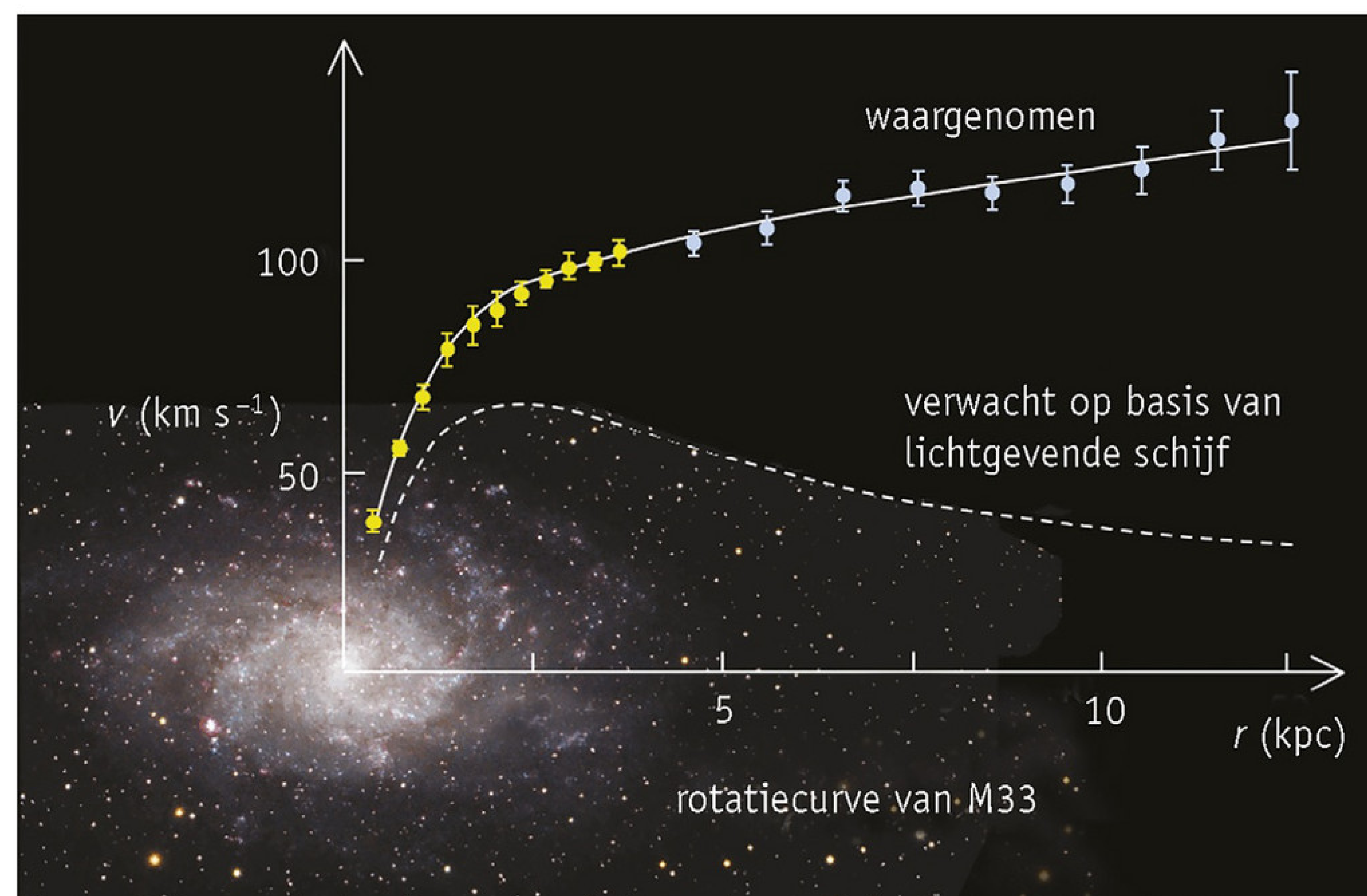
Astronomen ervaren een probleem als ze een model maken van een bolvormig sterrenstelsel. Ze zien sterren en ze zien hoeveel licht die geven als functie van de afstand van het centrum van het sterrenstelsel. Dat levert een model voor de massaverdeling op. Aan de andere kant meten ze hoe snel sterren bewegen. Op grond van de hoeveelheid materie in de lichtgevende schijf, zou je een bepaald verband verwachten tussen de snelheid en de afstand van een ster tot het centrum. Losse sterren aan de buitenkant zouden steeds langzamer moeten gaan hoe verder ze van het centrum vandaan zijn. Je gaat er dan vanuit dat alle massa zich bevindt binnen de baan van die enkele ver van het midden af gelegen sterren.

**a** Leid af met welke macht van de afstand die snelheid kleiner zou worden, als de afstand *r* groter is dan de straal van het sterrenstelsel. Stel daartoe de middelpuntzoekende kracht gelijk aan de gravitatiekracht.

De waargenomen snelheid als functie van de afstand is anders. Zie figuur 40.

**b** Omschrijf wat er anders is.

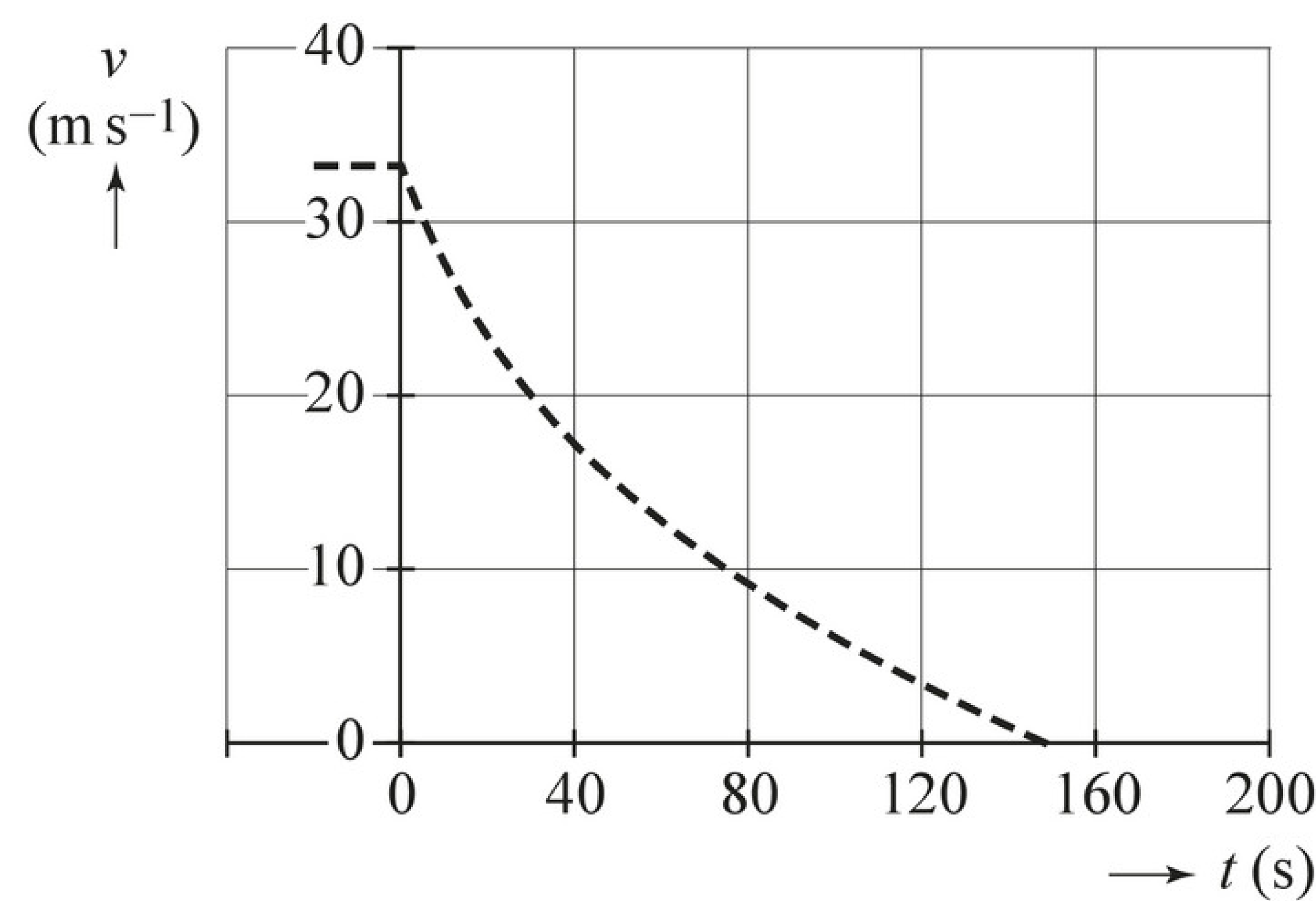
**c** Leg uit dat het model kloppend kan worden gemaakt door te postuleren dat zich in het sterrenstelsel donkere materie bevindt: extra massa die wel aantrekkingskracht uitoefent op andere massa's, maar geen licht geeft.




▲ **figuur 40** snelheid van sterren als functie van de afstand tot het centrum van een sterrenstelsel

**43** Uitrijden auto

Een auto ($m$ = 1520 kg) rijdt met een snelheid van 33,3 m s$^{-1}$ (= 120 km h$^{-1}$) over een vlakke weg bij windstil weer. Op $t$ = 0 s trapt de bestuurder het koppelingspedaal in, zodat de motor niet meer met de wielen verbonden is. Nu 'rijdt de auto uit' en komt een tijdje later tot stilstand. Het ($v$,$t$)-diagram van het uitrijden staat in figuur 41.



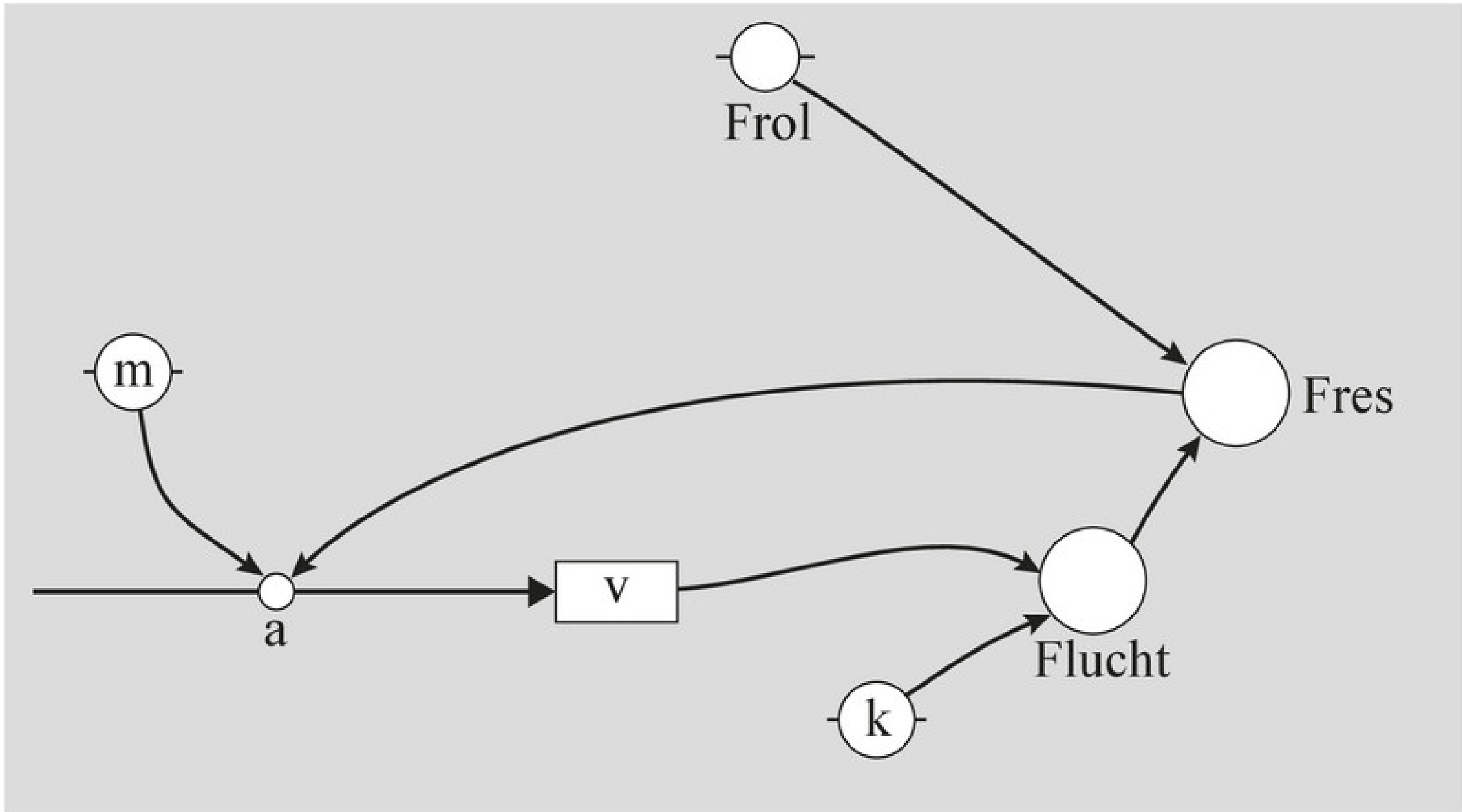

▲ **figuur 41** snelheid tegen tijd

De uitrijafstand is de afstand die de auto aflegt vanaf het moment dat het uitrijden begint tot het moment dat hij stilstaat.

**a** Bepaal met behulp van figuur 41 de uitrijafstand.

Om inzicht te krijgen in de beweging van de auto, is een computermodel gemaakt. Het model is weergegeven in figuur 42.
(In dit boek gebruiken we steeds de 'tekstmodus' links, op examens wordt daarnaast ook altijd de 'grafische modus' gegeven; als je daar niet mee hebt geoefend, mag je die negeren.)

| model | startwaarden (in SI-eenheden) |
|---|---|
| Flucht = k · v² | t = 0 |
| Fres = Flucht + Frol | dt = 0,01 |
| a = –Fres / m | v = 33,3 |
| dv = a · dt | m = 1520 |
| v = v + dv | k = 1,62 |
| t = t + dt | Frol = 76 |




▲ **figuur 42** model voor uitrijden

**b** Leid de eenheid van de evenredigheidsconstante $k$ af in basiseenheden (grondeenheden) van het SI, zoals ze staan in Binas tabel 3A.

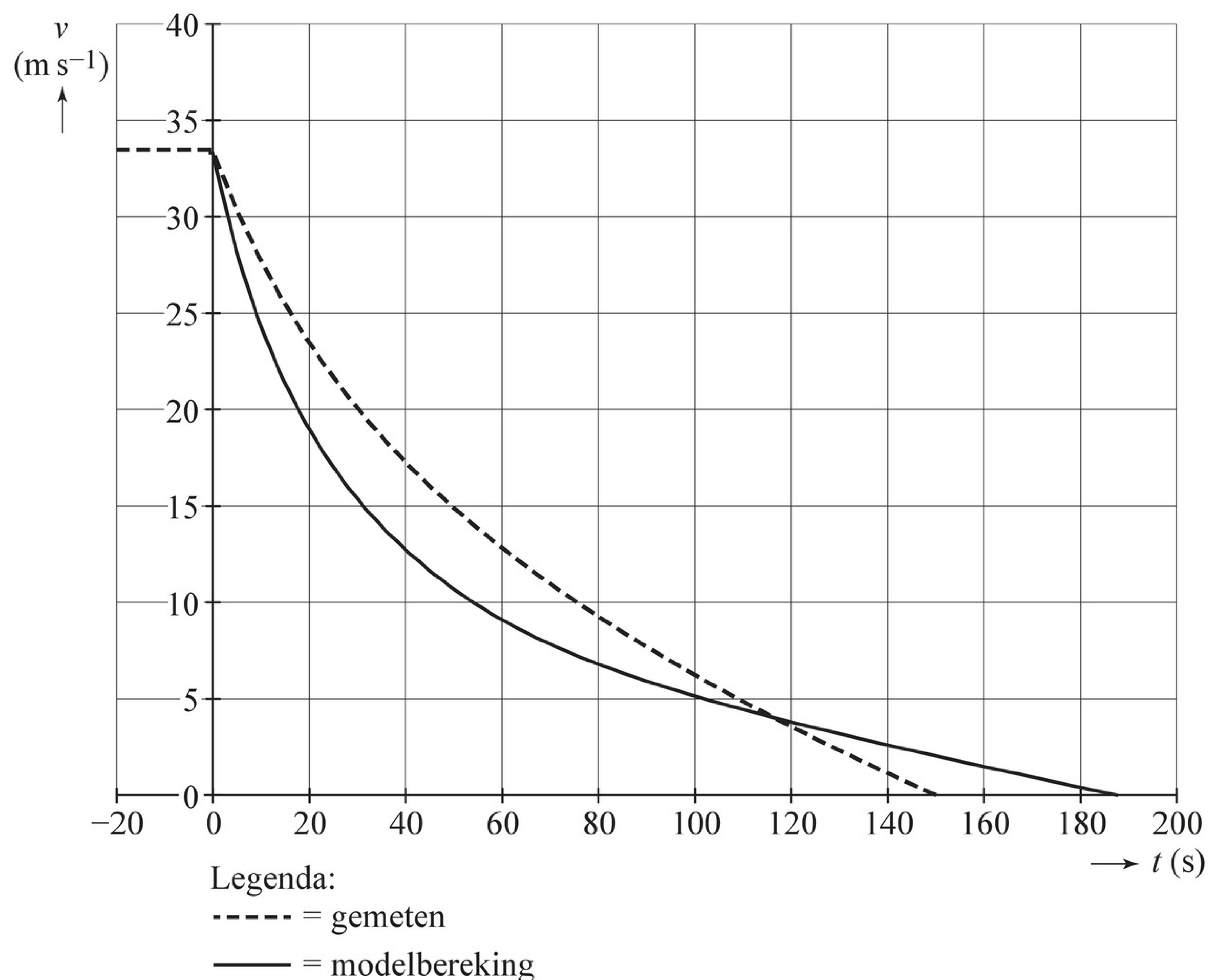
De resultaten van dit model zijn weergegeven in figuur 43. In figuur 43 staat ook de grafiek van figuur 41.

De waarden van de parameters $k$ en $F_{rol}$ zijn nog niet goed gekozen, zodat de grafiek met de resultaten van het model niet goed overeenkomt met de gemeten grafiek van figuur 41.

**c** Voer de volgende opdrachten uit.
- Leg uit of de startwaarde van $k$ groter of kleiner moet worden gekozen om de waarden wel goed overeen te laten komen.
- Leg uit of de startwaarde van $F_{rol}$ groter of kleiner moet worden gekozen om de waarden wel goed overeen te laten komen.

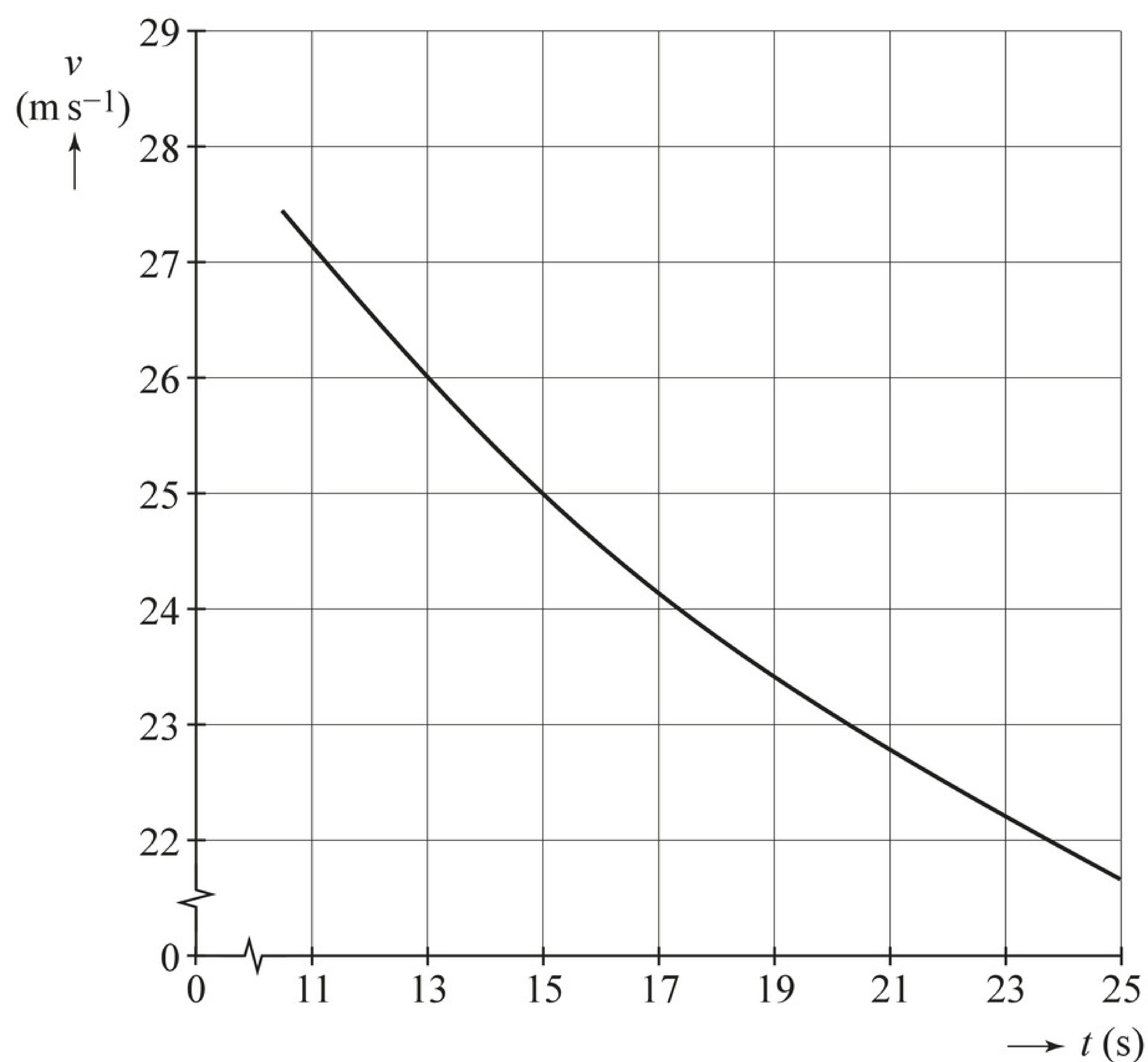
Het model van figuur 42 kan worden uitgebreid om ook de uitrijafstand te berekenen, waarbij het model stopt als de uitrijafstand is bereikt.

**d** Voer de volgende opdrachten uit.
- Beschrijf welke modelregel(s) moet(en) worden toegevoegd.
- Beschrijf welke stopvoorwaarde moet worden toegevoegd.




▲ **figuur 43** snelheid tegen tijd van model en meting

Met de nieuwe, aangepaste startwaarden voor $k$ en $F_{rol}$ past de uitkomst van het model wel bij de metingen. Figuur 44 laat een deel van de $(v,t)$-grafiek zien die het aangepaste model geeft.




▲ **figuur 44** uitkomst met juiste parameters

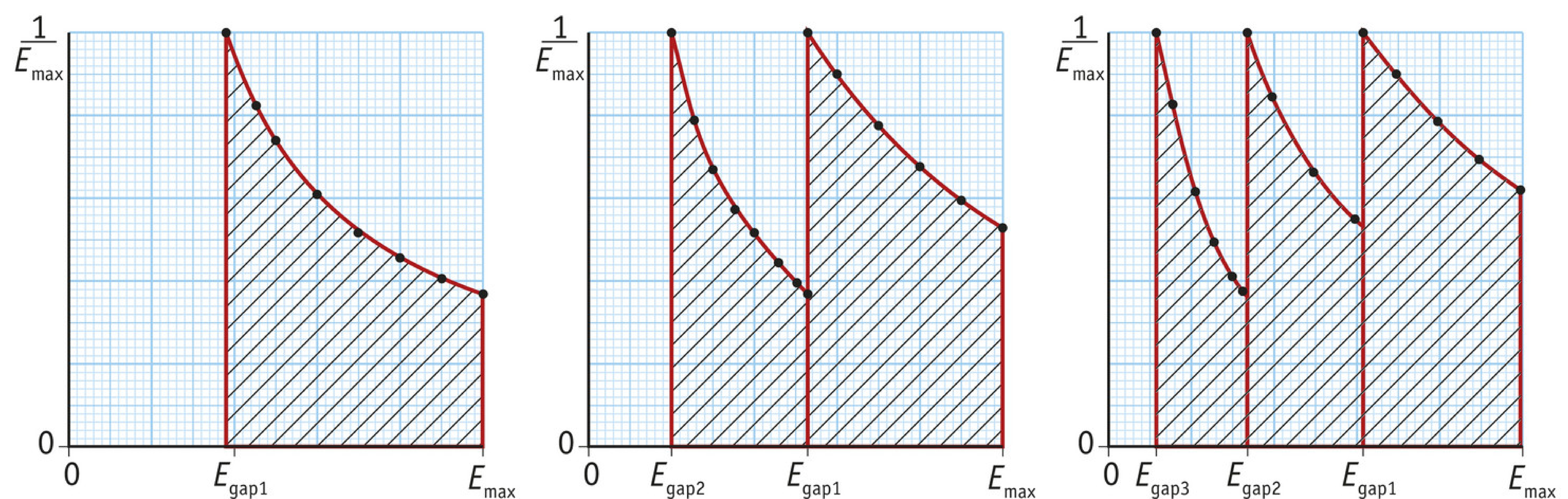
Uit deze figuur is het vermogen te bepalen dat de auto moet leveren om met een bepaalde constante snelheid te rijden.

**e** Bepaal met behulp van de figuur het vermogen dat de motor moet leveren bij een constante snelheid van 25 m $s^{-1}$ (90 km $h^{-1}$).

*naar: examen 2018-I*

**44** Licht oogsten in laagjes

Bij een zonnecel met meerdere lagen zet elk volgend laagje een ander deel van het opvallende licht om in elektrische energie. In figuur 45 zie je de verdeling van de energie bij een zonnecel met respectievelijk één, twee en drie lagen. De betekenis van de oppervlakten is uitgelegd in voorbeeldopgave 13.




▲ **figuur 45** doorgelaten energie, elektrische energie en warmte die ontstaat bij één, twee en drie lagen

**a** Leg uit hoe je ziet dat een zonnecel met meerdere lagen meer rendement oplevert dan een zonnecel met een enkele laag.

**b** Leg uit welk laagje bovenop moet zitten, dus aan de kant waar het zonlicht vandaan komt.

In voorbeeldopgave 13 en in deze opdracht is een aanname gedaan voor het op de zonnecel vallende spectrum: er is een constante intensiteit tot aan een bepaalde maximumfrequentie.

**c** Leg uit dat je met deze aanname kunt zeggen dat het model voor de tweede laag hetzelfde is als voor de eerste laag, alleen met een andere bovengrens voor het opvallende spectrum.

Het maximale rendement voor een zonnecel met één laag dat je met het hier gebruikte model vindt, is 36%. In de literatuur vind je 33,7%.

**d** Leg uit hoe de aanname over het opvallende spectrum, namelijk dat alle frequenties tussen nul en een maximum evenveel voorkomen, zou kunnen worden aangepast om tot een realistischer model te komen.

**+45** Model voor meteoorspoor

Een satelliet of meteoor die naar de aarde valt, ondervindt wrijvingskracht van de lucht en wordt daardoor heet. In eerste instantie ga je uit van een constante dichtheid van de lucht en een constante waarde voor de valversnelling. De constante eindsnelheid is al snel bereikt. In je berekeningen gebruik je een bolvormig massief metalen voorwerp als model.

**a** Laat zien dat voor de constante eindsnelheid geldt: $v \sim m^{\frac{1}{6}}$

De metalen bol neemt vermogen op doordat er wrijving is en straalt warmte uit als een zwarte straler. Ga ervan uit dat de warmte die ontstaat door wrijving voor de helft ten goede komt aan de bol en voor de helft aan de lucht. Er is een evenwichtstemperatuur bereikt als de twee vermogens gelijk zijn.

**b** Laat zien dat geldt: $T \sim m^{\frac{1}{8}}$. Tip: voor het vermogen dat de wrijvingskracht levert, kun je gebruikmaken van de kracht en de snelheid, van beide weet je hoe ze van de straal van de bol afhangen.

Voordat de eindtemperatuur is bereikt, moet de bol eerst opwarmen. Als het vallen te kort duurt, is de bol nog niet warm.

**c** Leg uit dat twee materiaaleigenschappen van lood dit materiaal bijzonder geschikt maken om ook bij beperkte hoogte een meetbare temperatuurstijging te krijgen.
**d** Noem een aspect waarin een echte terugvallende satelliet afwijkt van het model dat je hebt gebruikt.

Een bepaalde meteoor straalt dicht bij de aarde voornamelijk geel licht uit. Hoger in de atmosfeer is de lucht ijler en de zwaartekrachtversnelling nauwelijks anders dan bij het aardoppervlak.
**e** Beredeneer of deze meteoor hoog in de atmosfeer roder licht uitzond, of juist blauwer licht.

## Eindopdracht

**46** Rijden in de zon
Op 4 januari, als het in Australië zomer is, staat de aarde 3,3% dichter bij de zon dan een halfjaar later, als het in Europa zomer is.
**a** Wat is de naam van het verband dat geldt tussen uitgestraald vermogen, afstand en intensiteit?
**b** Bereken hoeveel procent meer licht de aarde per seconde bereikt, gemeten loodrecht op de richting van de lichtstralen, als gevolg van de kleinere afstand.

In januari heeft het zonlicht buiten de atmosfeer een intensiteit van $1{,}4 \cdot 10^3$ W m$^{-2}$. Dat is niet het vermogen dat een zonnecel per vierkante meter kan leveren.
**c** Geef vier redenen hiervoor.

Stel dat het vermogen als functie van de tijd wordt gegeven door $P = 300 \cdot \sin(6{,}23 \cdot 10^{-5} \cdot t)$. De tijd $t$ wordt gerekend in seconden vanaf het moment dat de zon opkomt.
**d** Bereken hoelang de zon volgens dit model op is.

Ga ervan uit dat de rolweerstand verwaarloosbaar is en dat de weg horizontaal is. De enige tegenkracht is een luchtweerstand $0{,}060 \cdot v^2$. Stel dat het vermogen dat de zonnecellen leveren onmiddellijk wordt gebruikt.
**e** Geef een formule voor de snelheid als functie van de tijd.

Voor het op gang komen van een auto vanuit stilstand op het moment dat het vermogen maximaal is, probeer je een model op te stellen. Het niet-complete model staat in figuur 46.
**f** Vul het model aan op de puntjes in de derde regel en leg uit dat bij de startwaarden een grootheid moet worden toegevoegd.

In het begin is niet het *vermogen* de beperkende factor, maar de maximale *kracht* tussen de banden en de weg.
**g** Verander het model zo dat hiermee rekening wordt gehouden.
**h** Voer het model uit en maak een grafiek van de snelheid als functie van de tijd.

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| Fmotor := P/v<br>Flucht := k * v^2<br>a := …<br>v := v + a * dt<br>x := x + v * dt<br>t := t + dt | P : = 300<br>k := 0.1<br>v := 0<br>x := 0<br>t := 0<br>dt := 0 |

▲ **figuur 46** incompleet model voor op gang komen

# 7 Practicum

## EXPERIMENT 1 Verband tussen de lengte van een slinger en de periode (onderzoekspracticum)

**Inleiding**
Een massa die aan een dun touw heen en weer slingert, heeft een periode $T$. Slingeruurwerken zijn hierop gebaseerd.
In dit experiment ga je onderzoeken hoe de periode afhangt van de massa, van de lengte en van de beginuitwijking.
De theorie voorspelt dat de massa niet van belang is, dat het verband tussen periode en lengte luidt $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ en dat dit resultaat voor kleine uitwijkingen onafhankelijk is van de beginuitwijking.

**Onderzoeksvraag**
Hoe hangt de periode van een slinger af van de massa, van de lengte en van de beginuitwijking?

**Benodigdheden**
statief; massa, dun touw waarvan je de lengte kunt variëren; stopwatch (of telefoon)

**Uitvoering**
- Meet steeds een flink aantal perioden en deel door dat aantal; zo maak je de fout die optreedt bij het hanteren van de stopwatch klein.
- Varieer één parameter tegelijk, dus als je de invloed van de lengte onderzoekt, houd je de hoek van de beginuitwijking constant.

**Verwerking**

**1** Bedenk een coördinatentransformatie waarmee het verband uit de theorie een rechte lijn door de oorsprong zou opleveren en teken de overeenkomstige grafiek.
**2** Teken de best passende rechte lijn en bepaal de waarde van $g$ die daaruit volgt.

De terugdrijvende kracht is eigenlijk evenredig met de sinus van de uitwijking, niet met de uitwijking zelf. Voor kleine uitwijkingen (die je moet uitdrukken in radialen) geldt $\sin(\alpha) \approx \alpha$, maar voor grote uitijkingen is dat niet meer zo.
**3** Ga met behulp van een grafiek na of het klopt dat voor kleine uitwijkingen de periode gelijk blijft, maar dat voor grote uitwijkingen een afwijking ontstaat.
**4** Maak een computermodel met een kracht die evenredig is met de sinus van de uitwijking en kijk of je de trillingstijden uit het experiment kunt reproduceren.

**Conclusie**
**5** Beantwoord de onderzoeksvraag.




HOOFDSTUK 15

# Relativiteit

De beroemdste formule van Albert Einstein is $E = m \cdot c^2$. Einstein beschreef hiermee hoe de energie van een voorwerp samenhangt met de lichtsnelheid. Ook over ruimte en tijd had hij nieuwe inzichten. Bij extreem hoge snelheden, zoals die voorkomen in deeltjesversnellers, zie je verschijnselen die niet verklaard kunnen worden met de wetten van Newton. Dan heb je Einsteins relativiteitstheorie nodig. Daarmee kun je ook begrijpen dat licht geen massa heeft en zich altijd voortbeweegt met de maximumsnelheid die in het heelal bestaat.

## Praktijk



## Theorie



## Maatschappij



**Maak de online Voorkennistoets voordat je aan dit hoofdstuk begint.**

Praktijk

# Celia's langdurige dag

Celia blijft tijdens de eerste maanden van haar psychologiestudie bij haar ouders wonen. Ze wil goed starten met de studie én plezier maken. Dat lukt. De faculteit is op fietsafstand, ze is meestal aanwezig bij colleges en werkgroepen. Ze haalt al haar vakken en er is tijd genoeg voor feestjes. Volgend jaar, zo is het plan, zal ze een kamer gaan zoeken. Maar op 20 november van dat eerste studiejaar verandert alles. Op die ochtend heeft Celia last van een lage lichtsnelheid.



## Haperende apparaten

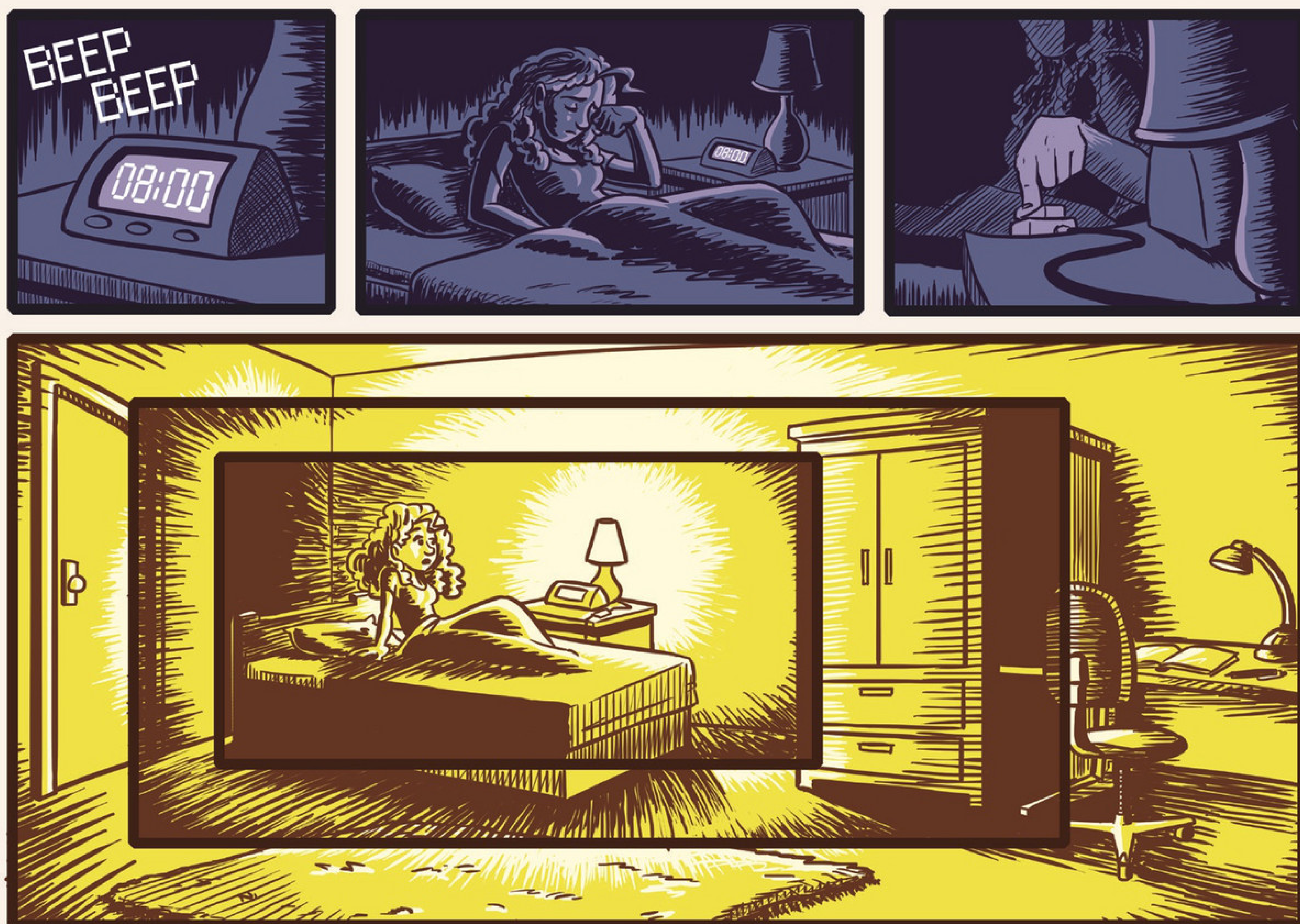
De wekker gaat om acht uur. Celia rekt zich uit en knipt het licht aan. Het duurt een halve seconde voor ze de lamp ziet. Na ongeveer een seconde ziet ze haar kamer oplichten. Eerst de spullen vlak bij haar, de muur het laatst.

Celia is te slaperig om hierover na te denken en doet rustig de normale ochtenddingen. Douchen, aankleden, mobieltje bij zich steken, theezetten. Vreemd: terwijl ze even brood uit de kast ging pakken, is de thee helemaal koud geworden, in een paar seconden. Opwarmen in de magnetron lukt niet. Die slaat wel aan, maar de thee wordt niet warmer.

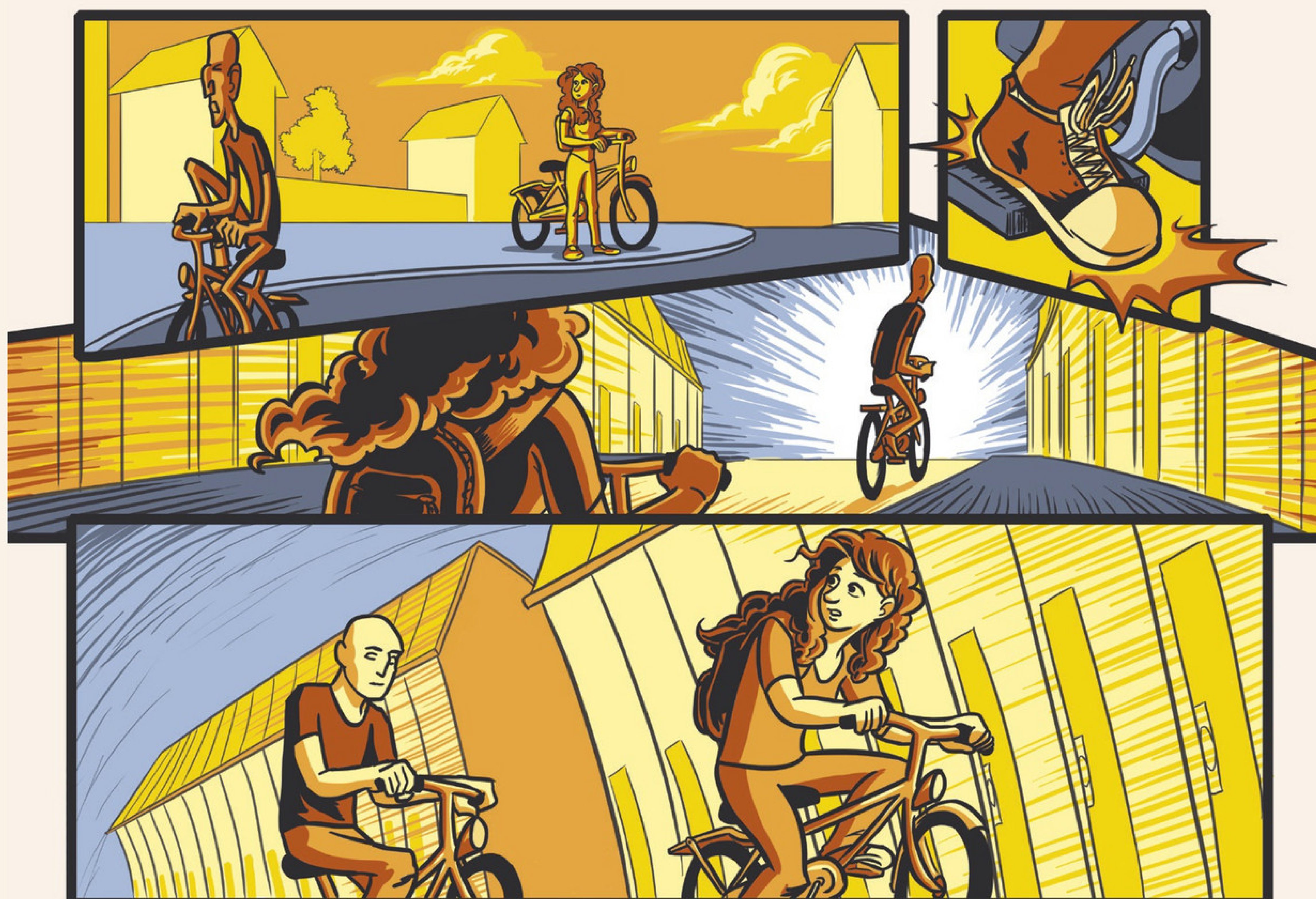
Even kijken of er berichtjes zijn. Celia's vriendje Helios heeft twee appjes gestuurd. Een kwam om tien voor twaalf gisteravond binnen. Het andere om vier uur. Even denkt Celia: raar dat Helios zo vroeg wakker was. Maar dan ziet ze dat het tweede berichtje precies om middernacht is verstuurd. Geen tijd om dit uit te zoeken. Ze moet weg. Ze schrikt als ze de klok in de kamer ziet. Hoezo elf uur? Ze haalt haar mobieltje uit haar zak. Gelukkig is het pas half negen. Ze kan het college van negen uur nog wel halen. Celia wil nog snel een briefje op de koelkast hangen met 'magnetron doet raar', maar ze krijgt het magneetje waar het briefje onder moet met geen mogelijkheid los. Op pad dan maar.

## Een vreemde fietstocht

Terwijl Celia haar fiets pakt, ziet ze een erg dunne man fietsen. Hij komt maar langzaam vooruit. Hij duwt hard op de pedalen, maar versnelt nauwelijks. Hij wordt nog dunner.




Celia besluit hem achterna te fietsen. Ze denkt dat ze die slakkengang van die dunne kerel gemakkelijk aankan, maar dat valt tegen. Ze komt nauwelijks dichterbij. Celia ziet nu dat de man eigenlijk best normaal is. Helemaal niet dun. Ze kijkt naar zichzelf. Normaal. Maar als ze weer opkijkt, valt haar op dat alle huizen supersmal zijn. De straat is veel korter dan ze zich herinnert.
De man remt, stapt af en blijkt weer superdun te zijn. Bezorgd vraagt Celia zich af bij welke psychische afwijkingen je de werkelijkheid vervormd waarneemt. Ze was altijd okay, best opgewekt en zo. Maar misschien moet ze zich nu toch eens laten nakijken.
Celia fietst zo snel ze kan over de rechte weg naar de faculteit. Ze wil weten of de anderen vandaag ook rare dingen meemaken. Op haar mobieltje is het vijf voor negen. De straatlantaarns gaan uit. De ruimte waarin het donkerder wordt rond de uitgezette lampen breidt zich net zo langzaam uit als het licht in haar kamer deed. Een soort prikkende rugwind lijkt wel van de zon te komen, die recht achter haar staat. Dat is mooi, ze gaat daardoor iets sneller. De steeds smallere gebouwen flitsen voorbij. Ze herkent niets. Dit is zorgwekkend. Waar is ze? Ze rijdt nog een tijd door, maar remt dan af en constateert dat alles een normale afmeting krijgt, behalve een heel langzaam overvliegend vliegtuig: dat lijkt te zijn samengeperst. Ze kijkt rond. Dit is niet het universiteitsterrein.
Ze is verdwaald. Is ze te ver gefietst, de faculteit voorbijgereden? Ze keert om en gaat steeds sneller terugfietsen. Hier was ze net ook. Even kijken. Dat straatnaambordje, dat klopt toch? Daar is toch de faculteit? Maar er staat een heel ander gebouw. Er is een display. Hè? 12.09 uur? Dan verschijnen de nieuwsberichten: ‘Vanaf aanstaande dinsdag 1 januari 2032 benzineauto’s verboden ...’, ‘Frenkie de Jong speelt afscheidswedstrijd ...’, ‘President Malia Obama op bezoek in Frankrijk’.
Terug naar huis, denkt Celia. Naar de huisarts. Gelukkig kan ze de rechte weg terug naar huis vinden. Er zijn heel wat nieuwe gebouwen, waardoor ze toch nog haar eigen straat een eind voorbijrijdt en weer moet omdraaien. Maar ze vindt het. Als haar mobieltje elf uur aangeeft, is ze thuis.






## Thuis zijn ze verder

"Mijn vriendin heeft een lage lichtsnelheid om zich heen."

Op de deur zit niet het vertrouwde bordje met 'Ivar, Marit, Celia en Eric de Bruijn'. Er staat 'Eric, Roos, Rocelia en Cedric de Bruijn'. Haar broer Eric doet open. Een knappe veertiger, niet de tiener die ze kent. Maar hij is het onmiskenbaar. Eric is helemaal van slag. "Na al die jaren ... ongelooflijk, je bent geen spat veranderd." Nou, hij wel, vindt Celia.

Ze hadden het nooit begrepen. Helios had haar zien langsflitsen die ochtend, tientallen jaren geleden. Harder en harder wegfietsend. Toen ze maar niet terugkwam, was Helios zich gaan verdiepen in hoge snelheden. Hij was nog bekend geworden als singer-songwriter met *Een meisje als een lichtstraal*. Het was een raadselachtig lied over sneller gaan door de ruimte en vertragen in de tijd, dat eindigde met 'Als ze terugkomt is ze jaren van me vandaan'. Toen hij bleef volhouden dat zijn vriendin 'een lage lichtsnelheid om zich heen had' was hij onder psychiatrische behandeling gesteld. Eric zegt: "Ik heb me erbij neergelegd dat je weg was en ben verdergegaan met mijn leven. Onze ouders bleven natuurlijk altijd denken aan jou en je verdwijning. En nu ben je er ineens weer!"

Na een rustig nachtje slapen lijkt er niets aan de hand. Het licht gaat normaal aan, de magnetron doet het. Ze kan niet nalaten een magneetje los te trekken van de koelkast. Dat lukt gewoon. Maar iedereen is nog steeds dertig jaar ouder dan hij gisteren was. Behalve zijzelf.

Celia zou best nog lang en gelukkig kunnen leven. Maar ze loopt dertig jaar uit de pas met haar omgeving. Eric concludeert: "Bij onze oude ouders in de verzorgingsflat durf ik wel met je langs te gaan. Voor hen is het 'eind goed, al goed'. Maar bij Helios in de inrichting ... Hij zich zal realiseren dat jullie nu dertig jaar in leeftijd verschillen. Ik weet niet of dat een goed idee is."

## Opdrachten

Bestudeer eerst de theorie van dit hoofdstuk voordat je de volgende opdrachten uitvoert.

**1** Lage lichtsnelheid
Het duurt een halve seconde voor Celia de lamp ziet als ze ’s ochtends het licht aandoet.

- **a** Maak een beredeneerde schatting van de lichtsnelheid die Celia op dat moment ervaart.
- **b** Leg uit dat je met een lage lichtsnelheid de lamp het eerst ziet en daarna pas de spullen in de kamer.
- **c** Welke afstand heeft het signaal van Helios’ tweede appje afgelegd van zijn mobieltje, via de antenne van de provider, naar Celia’s mobieltje? Ga uit van de lichtsnelheid die je bij opdracht a hebt genoteerd.

**2** Lichtsnelheid en golven
In het fantasieverhaal heeft Celia tijdelijk een lage persoonlijke lichtsnelheid om zich heen. Behalve de veranderingen in tijdsduren en lengten heeft dit gevolgen voor de werking van apparaten. Deze gevolgen kun je begrijpen met stof uit eerdere hoofdstukken.

- **a** Leg uit waarom een magnetron niet goed werkt als elektromagnetische trillingen de normale frequentie hebben, terwijl de lichtsnelheid ter plaatse anders is dan normaal.

Sprookjes en fantasieverhalen zijn soms niet helemaal geloofwaardig en consistent.

- **b** Leg uit dat het niet logisch is dat Celia’s mobieltje het tweede appje van Helios goed ontvangt.

**3** Rek en krimp
Celia ervaart tijdrek en lengtekrimp bij voorwerpen en personen in haar omgeving.

- **a** Hoe snel moet iemand met een constante snelheid ten opzichte van jou bewegen zodat wat Celia ervaart als 2,5 uur op jou overkomt als 30 jaar?
- **b** Een huis is 6 m breed. Hoe breed zal het eruitzien als je er met de snelheid van opdracht a langs beweegt?
- **c** Teken in een ruimtetijddiagram de lijn die hoort bij een beweging met de snelheid van opdracht a.
- **d** Teken in het diagram ook de lijn van de terugweg.

**4** Hogere lichtsnelheid
De lichtsnelheid is voor aardse begrippen heel groot. Maar op de schaal van het heelal is dat niet zo. In plaats van bedenken wat er gebeurt als de lichtsnelheid lager is, kun je ook in gedachten de lichtsnelheid tien keer groter maken dan in werkelijkheid.

- **a** Beschrijf de gevolgen van deze aanname voor de vraag hoe ver je terugkijkt in de tijd bij astronomische wa arnemingen.
- **b** Welke twee mogelijke aanpassingen kun je aan een magnetron doen zodat deze toch goed blijft werken bij een hogere lichtsnelheid?
- **c** Welke aanpassing zou je aan antennes van mobiele telefoons moeten doen?
- **d** Leg uit hoe je aan de formules kunt zien dat een voorwerp dat met snelheid $v$ van ons vandaan beweegt, minder tijdrek en lengtekrimp vertoont bij de tien keer zo grote lichtsnelheid dan bij de gewone waarde voor $c$.
- **e** Leg uit wat er met magneten zou gebeuren als $c$ nog groter zou zijn.

**5** Impuls van licht
Celia voelt stralingsdruk van de zon. Dat is de overdracht van impuls door licht. Neem aan dat het vermogen van de zon in Celia’s vreemde wereld hetzelfde is als normaal.
Leg uit waarom het effect van stralingsdruk groter is dan normaal.

**6** Vreemde werelden
De boeken met de helden Gulliver, Alice, de Kleine Prins en Mr. Tompkins beschrijven allemaal hoe iemand terechtkomt in een wereld waarin de natuurkundige wetten of de omstandigheden anders zijn dan in het heelal dat we kennen.
Kies een held, bestudeer een boek waarin deze voorkomt en omschrijf in natuurkundige termen wat er anders is dan anders.

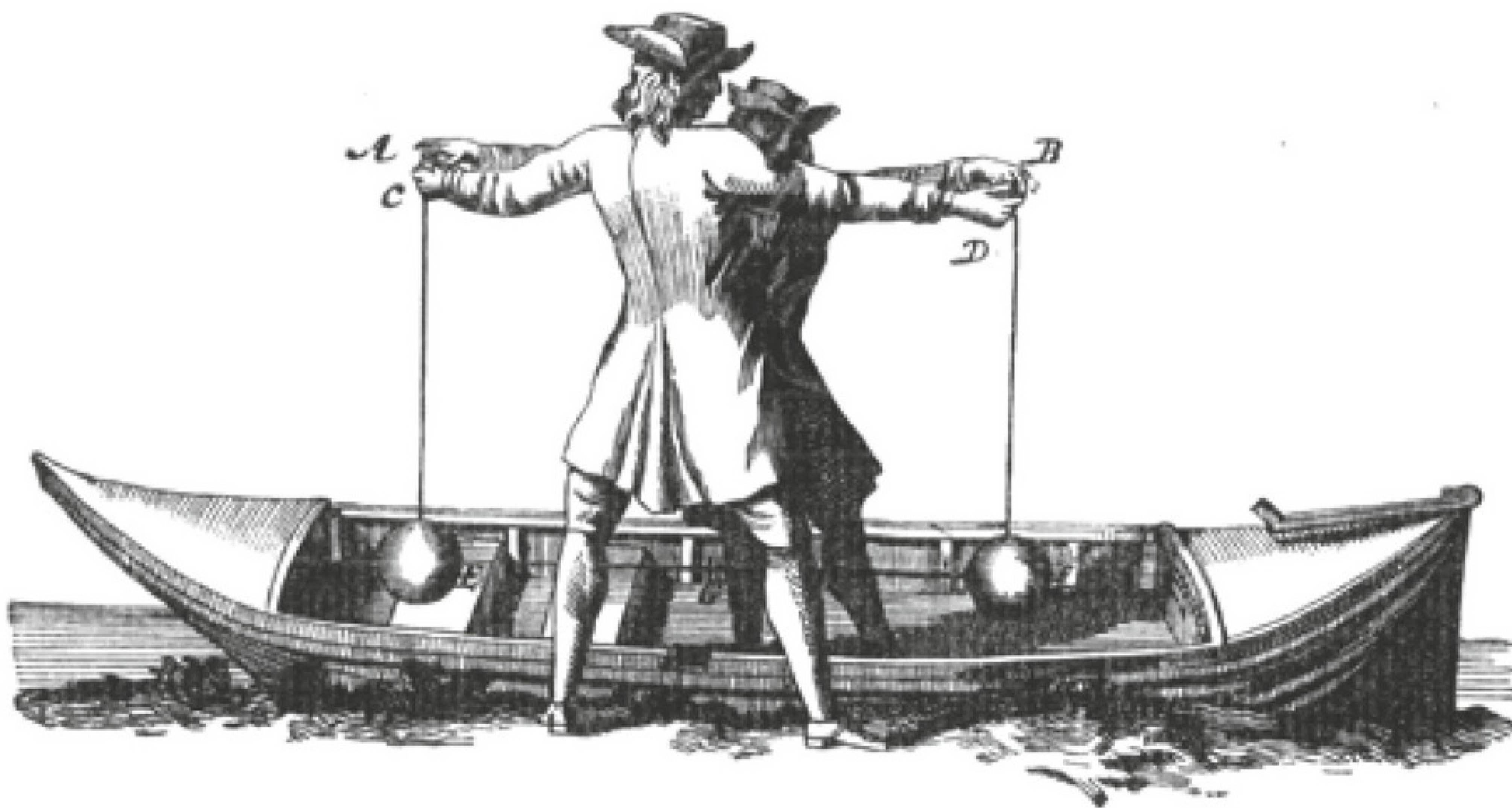
# 1 De relativiteit van Galilei, Huygens en Newton

In deze paragraaf leer je:
- uitleggen dat plaats en snelheid in de klassieke mechanica verschillend zijn voor verschillende waarnemers;
- uitleggen wat het relativiteitsbeginsel inhoudt en hoe het een rol speelt in de klassieke mechanica;
- in een diagram een beweging tekenen, gezien vanuit het referentiestelsel van verschillende waarnemers;
- via een galileitransformatie plaats en tijd omzetten van het ene naar het andere referentiestelsel.

Albert Einstein (1879–1955) zag in dat Isaac Newtons (1643–1727) beschrijving van bewegingen niet helemaal klopte. De fouten merk je in experimenten pas op bij hoge snelheden, maar Einstein besefte dat de beschrijving van mechanica fundamenteel moest veranderen. Hij nam daarbij twee uitgangspunten. Een van de twee ingrediënten die hij in 1905 gebruikte om bewegingen in ruimte en tijd te beschrijven, was het ‘relativiteitsbeginsel’. Dat was op dat moment al eeuwen oud. Deze paragraaf gaat over dat beginsel dat al correct is in Newtons mechanica. Het andere uitgangspunt van Einstein heeft met de lichtsnelheid te maken en komt later aan de orde.

## Relativiteit van plaats en van snelheid

Je loopt van je vliegtuigstoel naar de wc en even later weer terug. Ben je op dezelfde positie teruggekomen? Het antwoord op deze vraag hangt af van hoe je jouw positie bepaalt. Ja, je zit weer op dezelfde stoel. Of nee, je bent niet meer boven Maastricht, maar boven Luxemburg. Ook het antwoord op de vraag hoe snel je gaat hangt af van hoe je jouw positie definieert. Zittend in je stoel is je snelheid 0 km $h^{-1}$. Maar het vliegtuig gaat $7{\cdot}10^2$ km $h^{-1}$ ten opzichte van de grond en jij beweegt mee. De aarde beweegt rond de zon, dus je gaat nog veel sneller. Het is maar hoe je het bekijkt!
Of het voertuig waarin je zit beweegt, kun je pas zeggen als je uit het raampje naar de omgeving kijkt. Beweegt jouw trein of sta je stil en beweegt de trein naast je? Dat weet je pas als




▲ **figuur 1** Waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen, komen veel voor in Huygens’ werk: hier geeft de man in de varende boot twee slingers over aan de man op de kant.

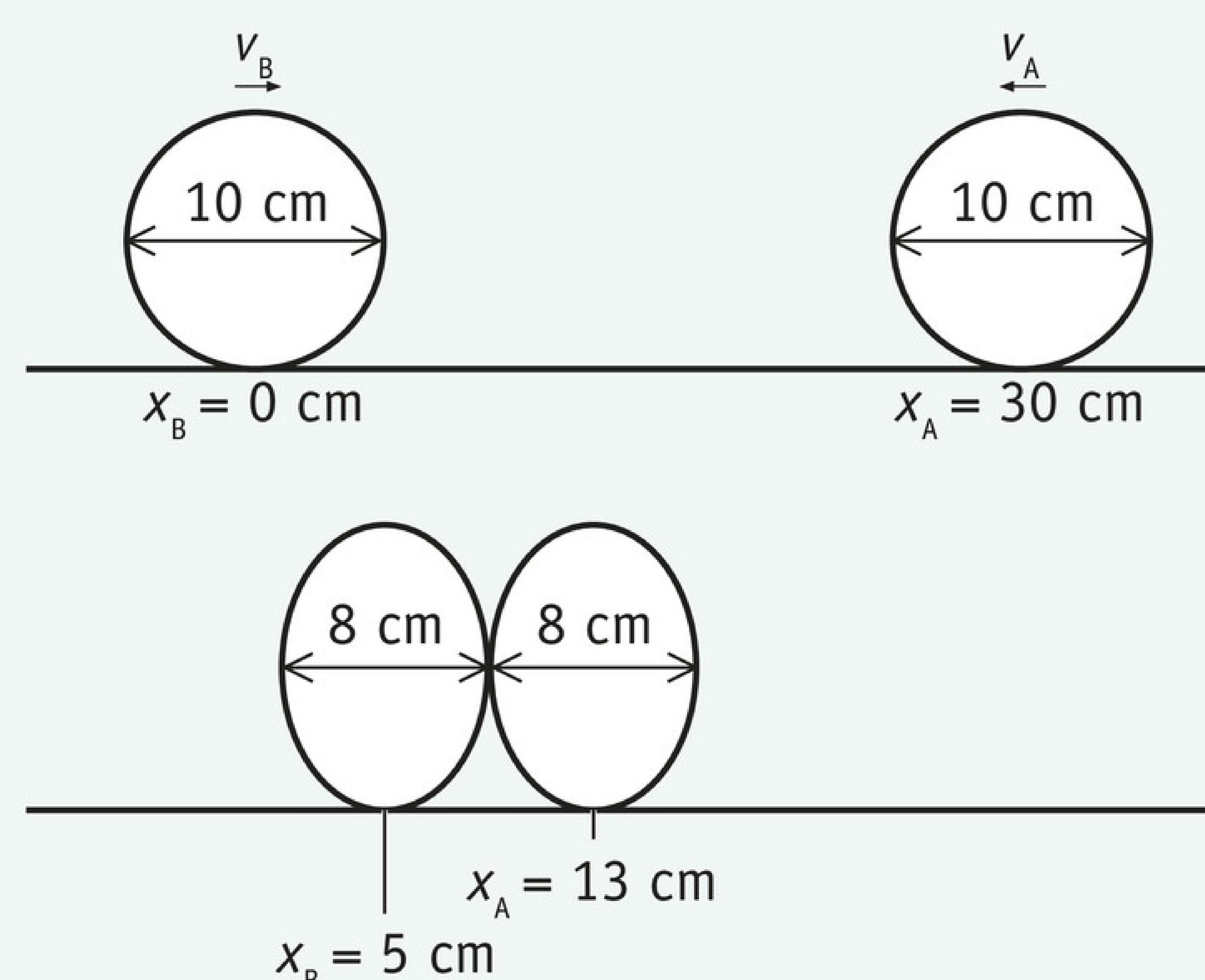
je naar het perron kijkt. Je voelt het niet. En je kunt ook niet onderzoeken of jouw trein met constante snelheid beweegt door iets te laten vallen. Dat voorwerp valt hoe dan ook vlak voor je voeten op de grond.
De volgende tekst is van Galileo Galilei (1564–1642). Hij beschrijft hoe je op een schip benedendeks allerlei proeven kunt doen, zonder dat daaruit blijkt of het schip wel of niet beweegt: 'Observeer in het stilliggende schip nauwgezet hoe de beestjes met dezelfde snelheid naar alle kanten van het ruim vliegen, […], hoe je in alle richtingen even ver kunt springen met beide voeten bij elkaar, […]. Als je dit allemaal nauwgezet hebt geobserveerd, laat het schip dan voortbewegen met elke snelheid die je maar wilt, zolang de beweging maar gelijkmatig is, zonder schommelingen. Je zult geen enkel verschil ontdekken bij al die effecten en je kunt uit geen van de proeven opmaken of het schip stilligt of beweegt.'
Galileo Galilei en Christiaan Huygens (1629–1695) hebben deze observaties centraal gesteld in de theorie van bewegingen. Er bestaat geen absolute snelheid. Je kunt alleen zeggen dat iets een snelheid heeft *ten opzichte van iets anders*. Of in de woorden van Huygens: 'De onderlinge beweging van voorwerpen is in alle opzichten relatief' (figuur 1).

Dit 'principe' heeft consequenties voor de manier waarop twee waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen natuurverschijnselen beschrijven. Omdat je absolute snelheid niet *kunt* opmerken, *mag* de beschrijving van verschijnselen niet afhankelijk zijn van de snelheid waarmee de waarnemer beweegt. Je noemt dit het **relativiteitsbeginsel**, ook wel galilei-invariantie. Dit beginsel is in de klassieke mechanica ingebouwd en het blijft overeind in de beschrijving die Einstein later geeft van bewegingen.

### Voorbeeldopgave 1

In een computermodel voor het botsen van biljartballen (figuur 2) staat een regel die zegt dat de ballen een kracht op elkaar uitoefenen als de middelpunten zo dicht op elkaar zitten dat beide ballen moeten zijn ingedeukt. Die kracht is groter als de indeuking groter is:

```
ALS sqrt((XA-XB)^2) < 10 DAN Fveer_van_B_op_A = C*(10-XA+XB) EINDALS
```




▲ **figuur 2** Deze ballen hebben een kleinere veerconstante dan biljartballen.

Het lijkt alsof de beschrijving afhangt van de plaats, want in deze modelregel waarmee de kracht wordt uitgerekend, worden de posities van beide ballen genoemd. Maar in Den Haag botsen de biljartballen op dezelfde manier als in Hilversum.

**a** Leg uit dat zowel bij de voorwaarde die bepaalt wanneer er een kracht is, als bij de berekening van de grootte van de kracht wel degelijk is voldaan aan de eis van relativiteit van plaats.

In het rekenmodel staan verderop de regels voor achtereenvolgens de versnelling, de verandering van de snelheid en de nieuwe snelheid van bal A:

```
aA = Fveer_van_B_op_A / m
dvA = aA*dt
vA = vA + dvA
```

**b** Leg uit dat deze regels galilei-invariant zijn.
**c** Welke grootheden in het model zijn *niet* relatief, ofwel: bij welke grootheid kun je niet een vaste waarde optellen zonder dat dit meetbare gevolgen heeft? Leg ook uit hoe je dat aan de formules ziet.

*Uitwerking*
**a** Er komt zowel bij de voorwaarde als bij de berekening van de veerkracht alleen het *verschil* in positie voor: de ene `x` heeft een +, de andere een −. Als je bij beide `x`-en dezelfde waarde optelt, is de uitkomst gelijk.
**b** `aA` wordt berekend uit de kracht en uit de massa, die beide niet afhangen van de positie of de snelheid *van het geheel*.
`dvA` is de verandering van de snelheid. Deze wordt berekend met `aA` en `dt`, die beide niet afhangen van de snelheid van het geheel.
De laatste regel kun je lezen als ‘de nieuwe snelheid van de bal is de oude snelheid plus de snelheidsverandering in deze tijdstap’. Dit klopt nog steeds als bij de oude en de nieuwe snelheid dezelfde waarde wordt opgeteld.
**c** De kracht en de massa zijn niet relatief: als je daar een vaste waarde bij optelt, veranderen de uitkomsten. Ook de versnelling is niet relatief. Dit zie je doordat je deze direct uitrekent uit `Fveer` en `m`, en niet via een verschil met de oude waarde voor `aA`.

## De versnelling is absoluut

Tijdens een vlucht merk je niets van een beweging in een rechte lijn met constante snelheid zonder turbulentie. Er is, zoals eerder gezegd, niet zoiets als een absolute snelheid die je met de ramen afgeplakt zou kunnen bepalen. Een verandering van beweging, een versnelling, die voel je wel (figuur 3)! Je voelt de leuning in je rug duwen bij de start van een vliegtuig. Je wordt zeeziek van schommelingen. Kermisattracties zijn gebaseerd op snelle veranderingen in de grootte of de richting van de snelheid.



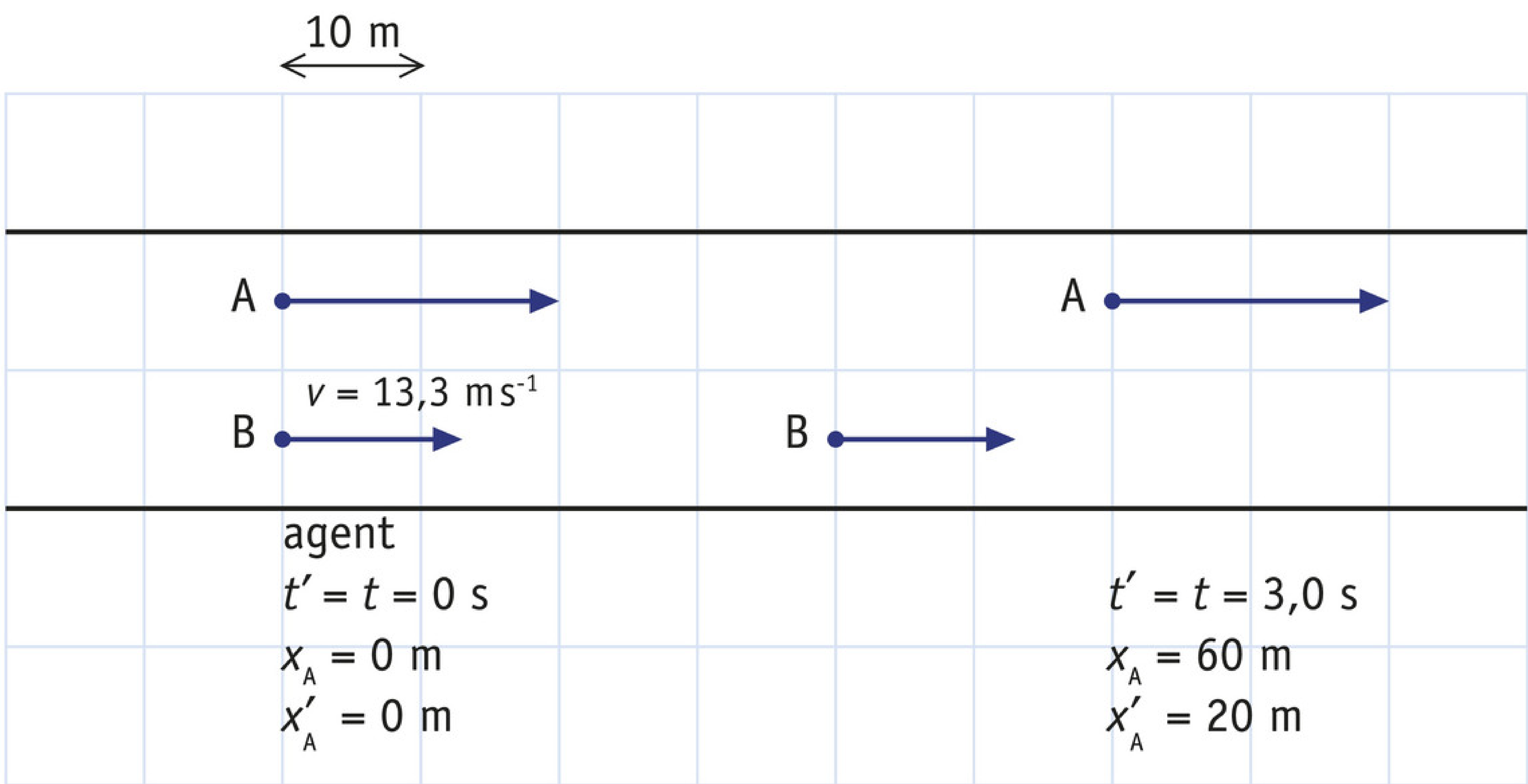
▲ **figuur 3** Deze testpiloot bemerkt dat versnelling absoluut waarneembaar is.

## Wiskundige beschrijving

In de wetten van Newton wordt nergens een uitspraak gedaan over de waarde van de plaatscoördinaat of de waarde van de snelheid van het systeem.
De eerste wet van Newton zegt: 'Als op een voorwerp geen resulterende kracht werkt, dan beweegt dat voorwerp met constante snelheid in een rechte lijn. En andersom: als een voorwerp met constante snelheid in een rechte lijn beweegt, dan weet je dat de resulterende kracht nul is.'
Twee waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen, zullen elk een verschillende snelheid toekennen aan een ten opzichte van hen bewegend voorwerp. Maar dat doet er niet toe. Ze zien allebei een constante snelheid en daar gaat de uitspraak over. De waarde is onbelangrijk. Dit betekent in het bijzonder dat je altijd een waarnemer mag kiezen ten opzichte van wie het voorwerp stilstaat. Die waarnemer beweegt dus met dezelfde constante snelheid mee. Een *constante* snelheid van een voorwerp is daarom in essentie hetzelfde als *geen* snelheid.
De tweede wet van Newton luidt: $F_{res} = m \cdot a$. Hier staat alleen iets over de verandering van de snelheid, niet over de snelheid zelf, want $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Als je bij begin- en eindsnelheid dezelfde constante snelheid optelt, verandert er niets in de tweede wet van Newton.
De derde wet van Newton zegt dat twee voorwerpen even grote, tegengesteld gerichte krachten op elkaar uitoefenen. Dat heeft gevolgen voor de versnellingen van de voorwerpen, maar niet voor de gezamenlijke snelheid van het hele systeem van twee voorwerpen.

## Meetgegevens voor elkaar vertalen

Het komt vaak voor dat twee personen die ten opzichte van elkaar bewegen, allebei naar hetzelfde kijken. Als zij willen bespreken wat ze zagen gebeuren, is het nodig dat ze aan elkaar kunnen uitleggen welke waarden ze hebben gemeten en wat dat vanuit het oogpunt van de ander betekent. Ze hebben elk hun eigen **referentiestelsel**. Dat wil zeggen dat ze hun eigen afspraak hebben over de plek ten opzichte waarvan ze posities meten en over de klok die ze gebruiken. De vertaling van gemeten posities, tijden en snelheden gaat via een **galileitransformatie**.
Bekijk het volgende voorbeeld. Een Audi rijdt snel op de linkerbaan en haalt een Bentley in die op de rechterbaan rijdt. Langs de kant van de weg staat een politieagent precies op die positie waar de ene auto de andere passeert. Vanuit de agent gezien gaat de Bentley met snelheid $v = 13{,}3\ \text{m s}^{-1}$.




▲ **figuur 4** bovenaanzicht van de weg waarop een Audi een Bentley inhaalt

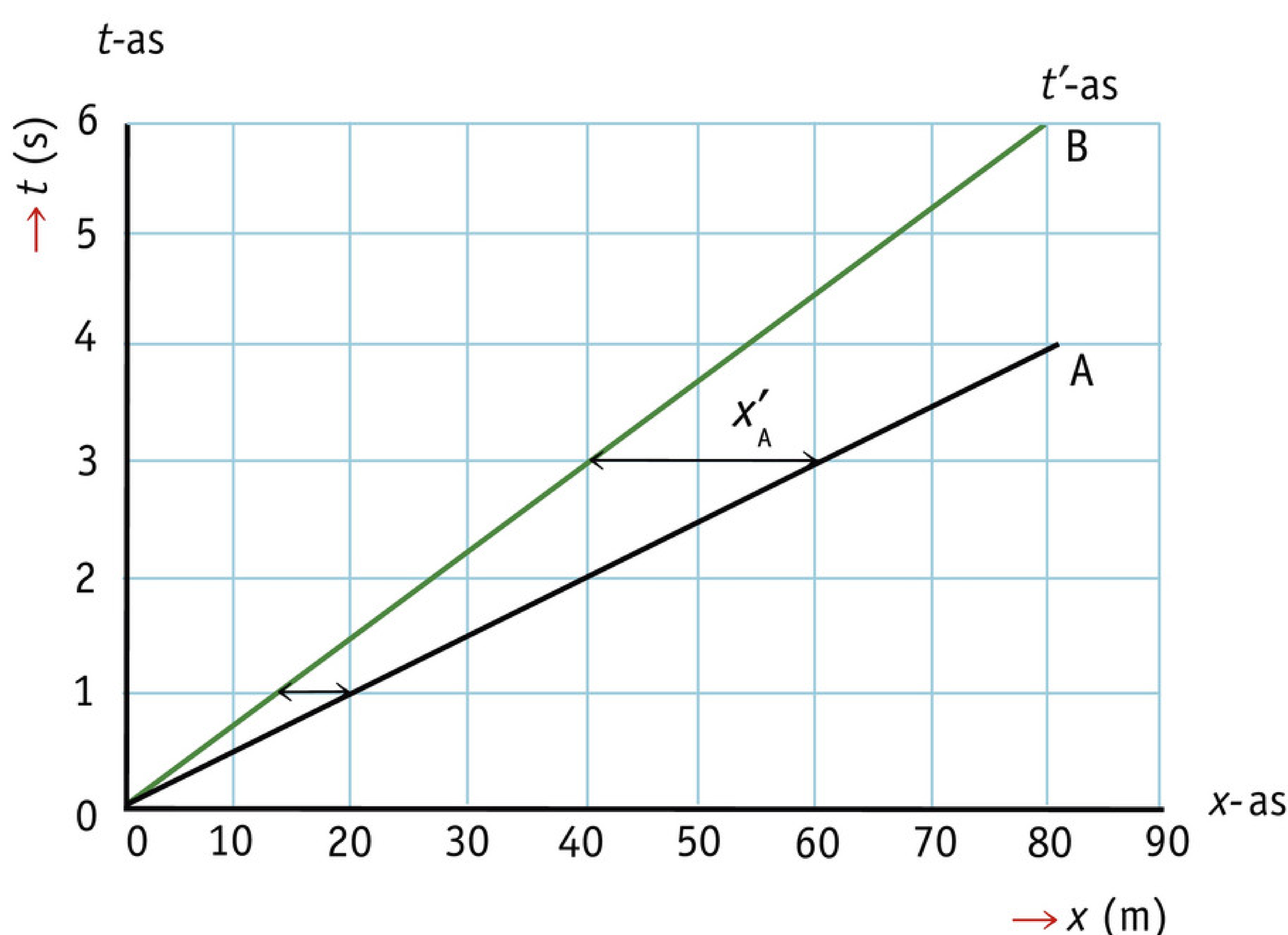
De agent noemt de positie van de Audi $x_A$. Dit is de afstand tussen hem en die auto, gemeten in de richting langs de weg. Hij drukt zijn stopwatch in op het moment van passeren en noemt de tijd die hij afleest $t$.

In de Bentley drukt de bijrijder op hetzelfde moment een stopwatch in. De afstand van de snelle Audi ten opzichte van de Bentley-bijrijder neemt minder snel toe dan de afstand ten opzichte van de agent, omdat de bijrijder in dezelfde richting rijdt. De bijrijder noemt de afstand die hij zelf meet tot de Audi $x'_A$ en de tijd die hij meet $t'$.

Op de volgende manier volgt wat de een waarneemt uit wat de ander waarneemt:

$x'_A = x_A - v \cdot t$
$t' = t$

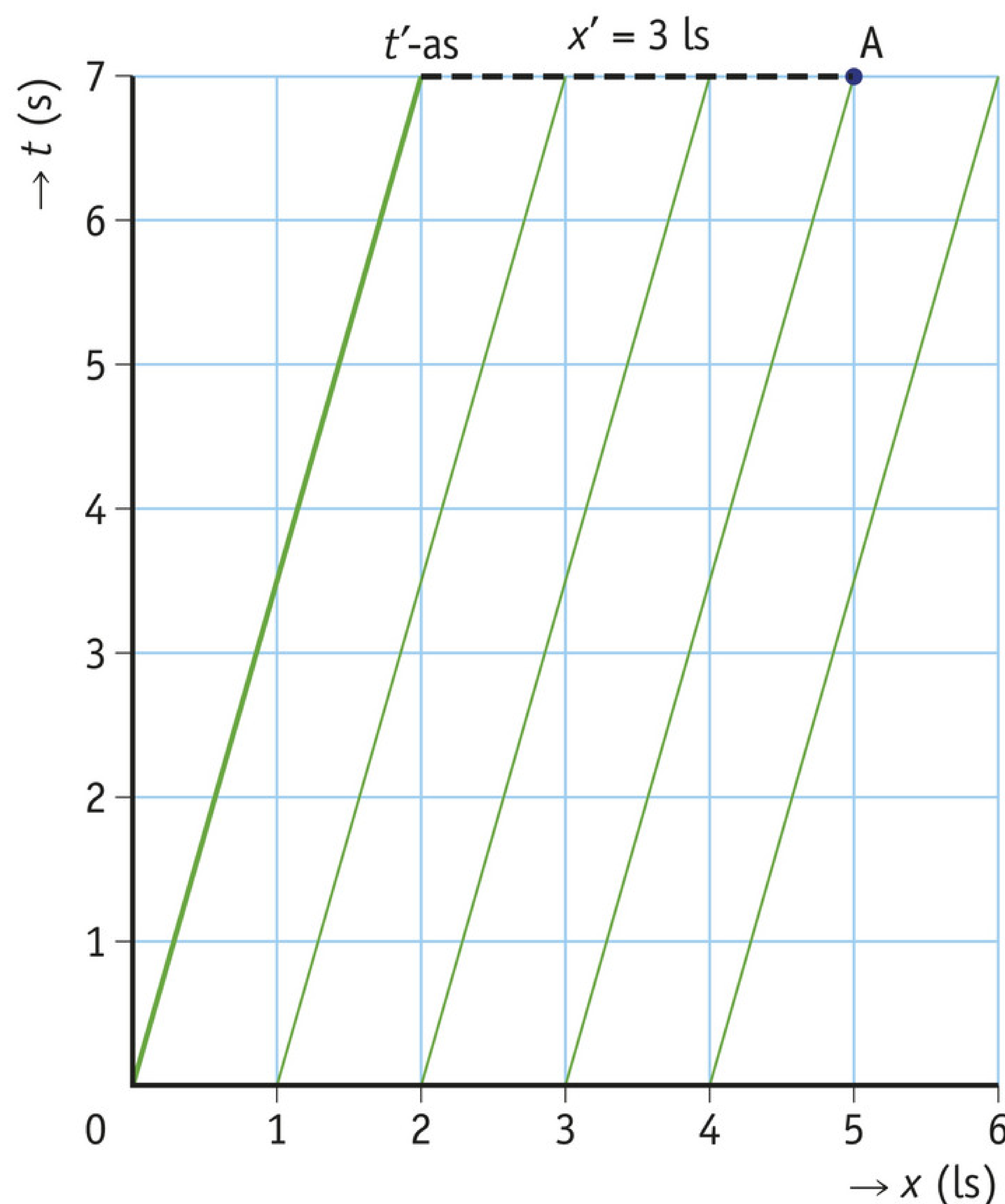
Dit is een galileitransformatie. Het is een omzetting van de gegevens die de agent meet naar de gegevens die de bijrijder in de Bentley meet. Merk op dat ze het eens zijn over hoe laat het is en hoelang iets duurt. Galilei zou het doorgeven van gegevens van de ene waarnemer aan de andere altijd op deze manier aanpakken, ook voor grote snelheden.




▲ **figuur 5** twee referentiestelsels

In een diagram ziet dat eruit als in figuur 5. Het is een beetje wennen dat alles andersom staat vergeleken met de $(x,t)$-diagrammen die je gebruikt in de klassieke mechanica. Dat is alleen een kwestie van gewoonte binnen dit vakgebied: de relativiteitstheorie. De tijd staat nu verticaal. Dat betekent dat een steilere lijn een lagere snelheid voorstelt. De steilste lijn hoort bij de Bentley.
Het rechthoekige assenstelsel waar ‘$x$-as’ en ‘$t$-as’ bij staat, geeft de coördinaten weer die de agent gebruikt. Op de hele $t$-as is $x$ gelijk aan 0. De waarde van $x$ van een bepaalde gebeurtenis komt overeen met de afstand vanaf de $t$-as. De waarde van $t$ is de afstand vanaf de $x$-as (bij wiskunde is de waarde van $y$ ook de afstand vanaf de $x$-as en de waarde van $x$ de afstand vanaf de $y$-as). De bijrijder in de Bentley meet afstanden vanaf zichzelf. Hij noemt zijn eigen positie voortdurend ‘0’. Volgens zijn waarneming is de positie van de Audi na 3 s gelijk aan $x'_A = 20$ m. Omdat deze bijrijder in de Bentley posities vanaf zijn eigen positie meet, kun je de groene lijn waar de Bentley zich bevindt beschouwen als zijn tijdas. Dit is dus de $t'$-as.

In figuur 6 is de afstand uitgedrukt in lichtseconden (ls); dat is de afstand die het licht aflegt in één seconde. Dit is handig bij de grote snelheden die later aan de orde komen, in situaties waarin Einstein laat zien dat de beschrijving van de klassieke mechanica zal moeten veranderen. De schaal van de afstand is dus heel groot.




◀ **figuur 6** Het tweede referentiestelsel beweegt met $\frac{2}{7}$ van de lichtsnelheid ten opzichte van het eerste.

Wat in de formules van de galileitransformatie staat, zie je ook in het diagram. Het punt A rechtsboven in figuur 6 is volgens iemand die vanaf de $t$-as en de $x$-as meet vijf eenheden naar rechts en zeven eenheden naar boven. Dus $x = 5$ op tijdstip $t = 7$. De tweede waarnemer, die ten opzichte van de eerste met snelheid $\frac{2}{7}$ beweegt, bevindt zich op elk moment op de bij dat tijdstip horende posities op de $t'$-as. Hij meet afstanden ten opzichte van zichzelf, dus de afstand naar rechts vanaf de groene as. Volgens hem is punt A na zeven tijdseenheden drie eenheden ver weg. Dat is minder ver dan de eerste waarnemer meet, precies zoals de formule zegt. Er geldt x′ = 3 op $t' = 7$. De schuine lijnen zijn wat de tweede waarnemer beschouwt als $x' = 1$; $x' = 2$, enzovoort.

## Onthoud!

- Positie en snelheid zijn niet absoluut en kun je alleen bepalen ten opzichte van iets anders.
- In de klassieke mechanica is het relativiteitsbeginsel ingebouwd: natuurwetten veranderen niet als je bij alle snelheden een constante waarde optelt. Dit heet galilei-invariantie.
- Waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid, hebben elk hun eigen referentiestelsel en vertalen de metingen die ze doen voor elkaar via een galileitransformatie.
- De galileitransformatie luidt: $x'_A = x_A - v \cdot t$ en $t' = t$

## Opdrachten

**1** Relatieve hoogte
Je houdt een pen op 10 cm hoogte boven een tafel die 90 cm hoog is. De tafel bevindt zich op de derde verdieping, waarvan de vloer zich op 8,0 m boven de grond bevindt.

**a** Geef de formule voor de zwaarte-energie van de pen.

**b** Leg uit dat je met evenveel recht de waarden 0,10 m, 1,00 m of 9,0 m voor de hoogte mag invullen.

**c** Leg uit dat dit niet uitmaakt voor de berekening van de snelheid waarmee de pen de tafel zal raken als je hem loslaat.

**2** Dichterbij komen
Max rijdt met een snelheid van 144 km $h^{-1}$ op een Duitse snelweg. Jos rijdt 200 m achter hem met een snelheid van 216 km $h^{-1}$.
**a** Met welke snelheid ziet Max Jos dichterbij komen in zijn achteruitkijkspiegel?
**b** Leg uit dat Jos de positie van Max als functie van de tijd kan beschrijven als:
$x' = 200 - 20 \cdot t$

**3** Afstand tot het middelpunt
Een satelliet wordt vlak bij het aardoppervlak sterker aangetrokken dan op $36{\cdot}10^3$ km hoogte.
**a** Schrijf de gravitatiewet van Newton op.
**b** Leg uit dat de wet niet afhangt van de positie van het systeem satelliet-aarde in het heelal.

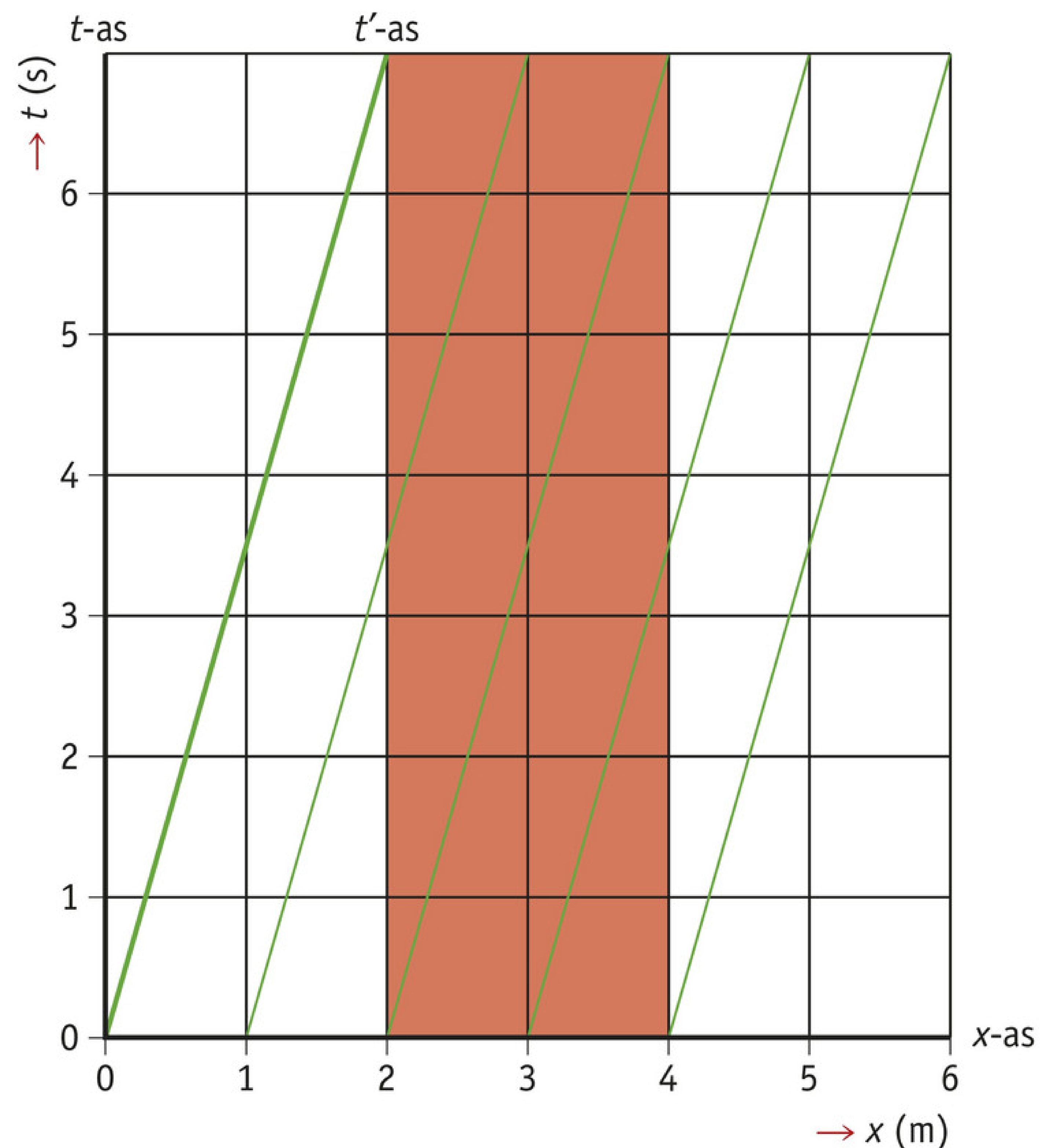
**4** Inhaalmanoeuvre
Twee auto's met elk een massa m = $1{,}0{\cdot}10^3$ kg rijden naast elkaar op de snelweg met een snelheid van 90,0 km $h^{-1}$. Op $t = 0$ begint de auto op de linkerbaan eenparig te versnellen tot 108 km $h^{-1}$. De snelheid neemt dus toe van 25,0 m $s^{-1}$ tot 30,0 m $s^{-1}$. Dit duurt 10,0 s. Dit proces wordt waargenomen door agent A die langs de kant van de weg staat en door bijrijder B die in de langzame auto zit.
**a** Controleer met een berekening dat beide waarnemers weliswaar verschillende begin- en eindsnelheden rapporteren voor de versnellende auto, maar wel dezelfde versnelling.
**b** Leg uit of de twee waarnemers met de tweede wet van Newton op eenzelfde resulterende kracht uitkomen.

Een wet uit de klassieke mechanica is de wet van arbeid en kinetische energie.
**c** Hoe luidt die wet?
**d** Bereken de arbeid die wordt verricht door de motor van de versnellende auto volgens waarnemer A langs de kant.
**e** Bereken de verandering van de kinetische energie die dezelfde waarnemer zal berekenen uit de begin- en de eindsnelheid.
**f** Ga met een berekening na dat waarnemer B in de langzame auto andere waarden zal vinden voor de arbeid verricht door de motor van de versnellende auto en voor de verandering van de kinetische energie.
**g** Leg uit of uit je berekeningen volgt dat de wet van arbeid en kinetische energie geldig is in de beschrijving van beide waarnemers.

**5** Tekenen
In de relativiteitstheorie is het gebruikelijk dat bewegingen worden weergegeven in een diagram met de tijd verticaal en de positie horizontaal.
**a** Teken zo'n diagram met daarin de weergave van een stilstaande massa.
**b** Teken zo'n diagram met daarin de weergave van een massa die met constante snelheid beweegt.
**c** Teken zo'n diagram met daarin de weergave van een massa die beweegt met constante versnelling.

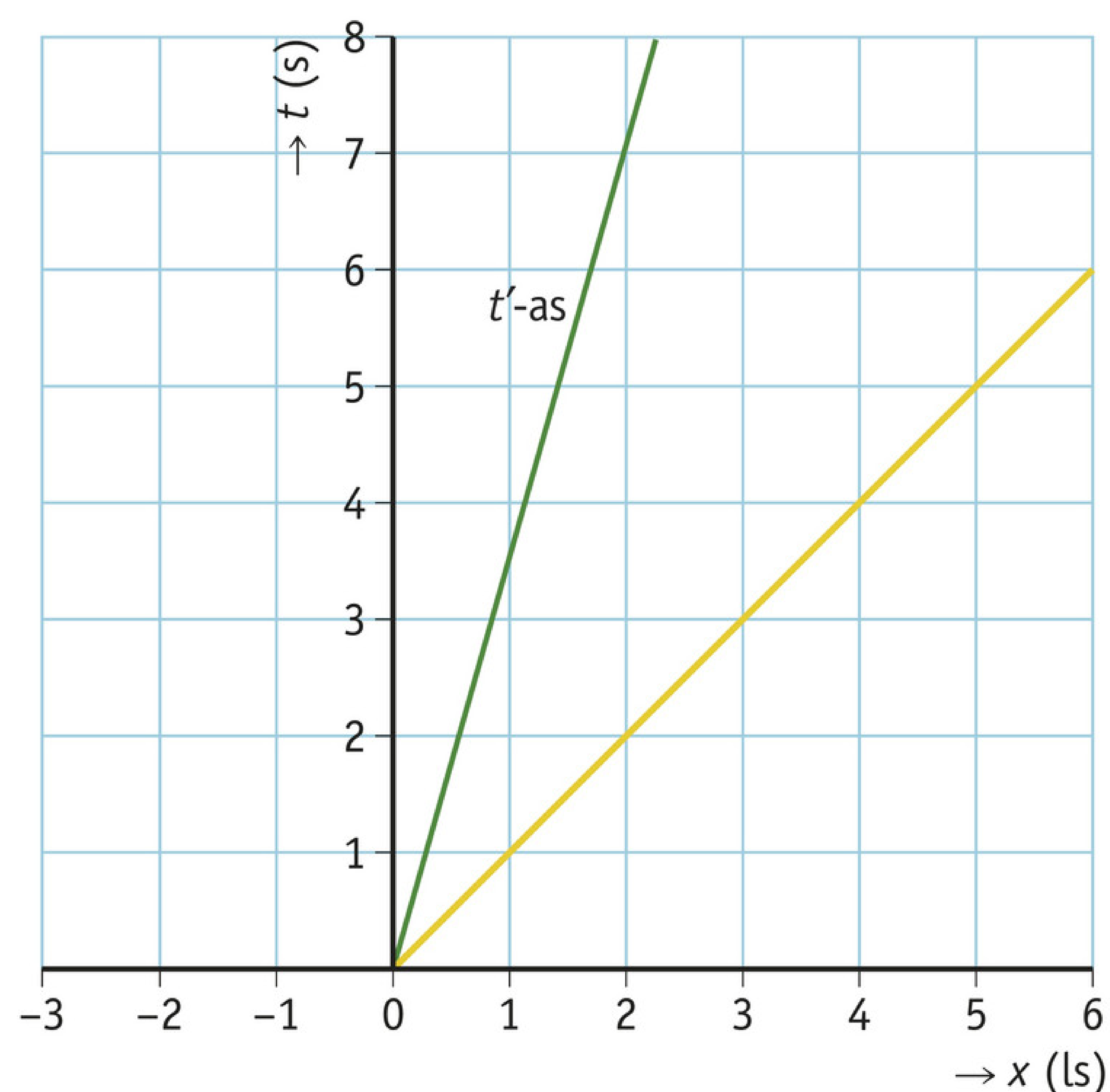
**6** Lengte
In het diagram van figuur 7 zie je een balk die de positie van een voorwerp voorstelt.
**a** Op welke positie zitten het begin- en het eindpunt van het voorwerp volgens waarnemer A die het $(x,t)$-stelsel gebruikt?
**b** Wat is volgens waarnemer A de lengte van het voorwerp?
**c** Waar bevinden zich op tijdstip 0 het begin- en het eindpunt volgens waarnemer B die $x'$ en $t'$ gebruikt?
**d** Wat zijn de posities van die punten na 1 s volgens waarnemer B?

**e** Wat zijn de posities van die punten na 3 s volgens waarnemer B?
**f** Welke lengte heeft het voorwerp op die tijdstippen volgens waarnemer B?
**g** Leg uit dat beide waarnemers niet alleen volgens het diagram, maar ook volgens de formules van de galileitransformatie dezelfde lengte meten.




▲ **figuur 7** ruimtetijddiagram volgens Galilei van een voorwerp dat stilstaat op de grond

**7** Lichtstraal
Bekijk figuur 8. Stel dat de eenheden zo zijn gekozen dat de diagonale lijn een lichtpuls voorstelt, zoals waargenomen door een waarnemer A die de coördinaten $x$ en $t$ gebruikt. Waarnemer B gebruikt het stelsel met de accenten.
**a** Welke snelheid heeft waarnemer B ten opzichte van waarnemer A?
**b** Met welke snelheid beweegt de lichtstraal volgens waarnemer B?
**c** Teken in het diagram de beweging van een waarnemer C die een lichtsnelheid meet die 1,50 keer zo groot is als de lichtsnelheid die waarnemer A waarneemt.




▲ **figuur 8** ruimtetijddiagram van een lichtpuls volgens Galilei

**+8** Vice versa
Een waarnemer A die stilstaat op aarde en een waarnemer B die ten opzichte van hem beweegt met snelheid *v*, meten allebei de snelheid van een voorwerp dat langsvliegt in dezelfde richting als waarin waarnemer B beweegt. Stel dat waarnemer A een snelheid meet van

$$\frac{dx}{dt} = w$$

**a** Leg uit welke snelheid van het voorwerp waarnemer B zal meten.
**b** Laat zien dat dit ook uit de galileitransformatie volgt.

Met de galileitransformatie geef je de waarden voor $x'$ en $t'$ in termen van $x$ en $t$.
**c** Schrijf de omgekeerde galileitransformatie op, geef dus $x$ en $t$ in termen van $x'$ en $t'$.
**d** Leg uit dat het logisch is dat waar eerst een min stond, nu een plus staat.

# 2 De lichtsnelheid

In deze paragraaf leer je:
- aangeven uit welke theorie en uit welke waarnemingen volgt dat de lichtsnelheid voor elke waarnemer gelijk is;
- beredeneren waarom dat niet in overeenstemming is met de klassieke mechanica van bewegende deeltjes en ook niet met het klassieke beeld van golven die bewegen door een medium;
- uitleggen waarom Einstein de ether afschafte en welke twee ‘postulaten’ de grondslag werden voor zijn nieuwe theorie.

De mechanica van Newton werd gedurende eeuwen gebruikt en verfijnd. Alles werkte prachtig. Maar rond 1860 ontstond een probleem toen James Clerk Maxwell in wiskundige vergelijkingen opschreef hoe elektrische en magnetische velden zich gedragen. Uit die beschrijving kwam een opmerkelijk resultaat tevoorschijn over de snelheid van het licht. Het gaat om een resultaat dat niet in overeenstemming is met wat je uit de theorie van paragraaf 1 zou concluderen. In deze paragraaf lees je over de elektromagnetische feiten en de discrepantie met de klassieke theorie, en over de manier waarop Einstein hiermee omging.

## Maxwell, Michelson en Morley

In de vergelijkingen van Maxwell kun je bijvoorbeeld vinden hoe een veranderende magnetische flux een elektrisch veld opwekt, wat leidt tot het lopen van een stroom in een spoel: elektromagnetische inductie (hoofdstuk 8). Uit de vergelijkingen volgde ook iets opmerkelijks: een veranderend elektrisch veld kan een veranderend magneetveld opwekken, een veranderend magneetveld kan op zijn beurt een veranderend elektrisch veld opwekken, en zo verder. De snelheid van zo’n ‘elektromagnetische golf’ zou volgens Maxwells vergelijkingen gelijk moeten zijn aan $3{,}0 \cdot 10^8$ m $s^{-1}$. Die snelheid zou volgens de vergelijkingen niet afhangen van hoe een bron van elektromagnetische golven beweegt ten opzichte van iemand die kijkt naar de golven die deze bron uitzendt.
Heinrich Hertz toonde rond 1890 experimenteel aan dat je deze elektromagnetische golven inderdaad kunt opwekken (hoofdstuk 7). De frequenties en golflengten variëren vele orden van grootte. Het hele spectrum, van radiogolven via zichtbaar licht tot en met gammastraling, zou volgens Maxwells theorie bewegen met de lichtsnelheid (hoofdstuk 9).

In de tweede helft van de negentiende eeuw dacht men dat deze snelheid de snelheid van het licht was ten opzichte van een stof waarin die golven zich zouden voortplanten. Deze stof noemde men de *ether*. Niemand kon zich voorstellen dat een golf los zou kunnen bestaan, in een lege ruimte. Men nam aan dat deze ijle stof bestond, met als bekende eigenschappen dat hij overal in doordringt en dat hij heel stug is, aangezien er heel snelle golven in bestaan. Maar niemand kon het bestaan van die mysterieuze ether aantonen.
De galileitransformaties vertellen dat als de waarnemer beweegt ten opzichte van een lichtbron, er een grotere of een kleinere snelheid van het licht wordt waargenomen. Als je tegen een lichtstraal in beweegt, zou hij sneller langs je flitsen, als je meebeweegt langzamer.

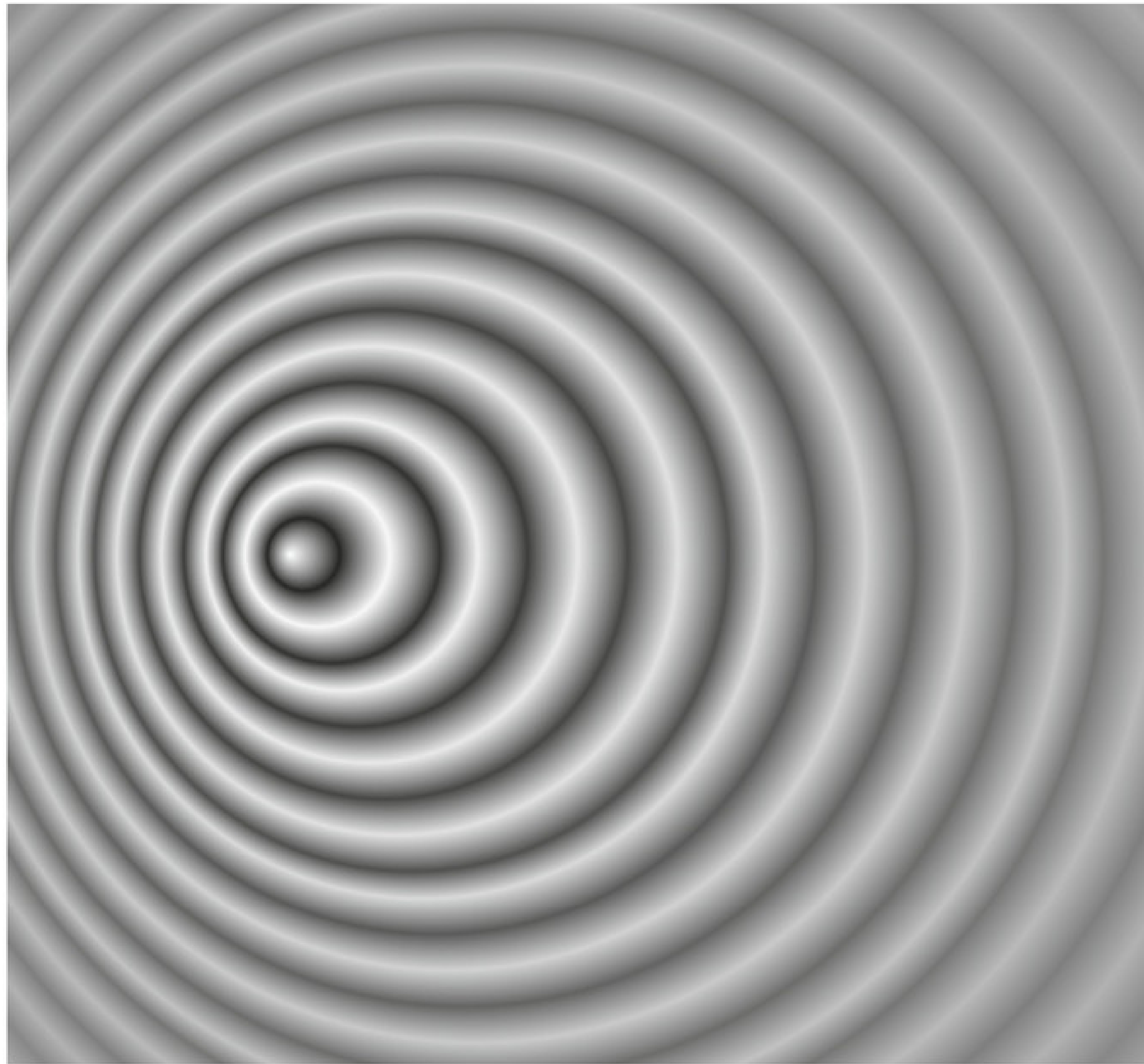
De grote verrassing die volgde uit de theorie van Maxwell en uit metingen, was dat dit voor licht niet zo is. *De lichtsnelheid die je meet, heeft altijd dezelfde waarde*, onafhankelijk van de beweging van de bron of van de waarnemer. Dit is heel opmerkelijk, omdat je bij relatieve bewegingen iets anders verwacht:

1 Als licht zou bestaan uit een stroom minuscule kogeltjes, zou je verwachten dat als een bewegende bron ze uitzendt met de lichtsnelheid, een stilstaande waarnemer het licht ziet langskomen met een hogere snelheid als de bron op hem afkomt en met een lagere snelheid als de bron van hem weggaat. Het zou niet uitmaken of de bron naar je toekomt of dat jij naar de bron toeloopt, ook in het laatste geval zou je een hogere lichtsnelheid meten dan degene die met de bron meebeweegt. Voor kogels is dat logisch: als een jachtvlieger zelf meet dat de kogels met een snelheid van 500 m $s^{-1}$ uit de loop van het boordgeschut komen, en de snelheid van het vliegtuig is 300 m $s^{-1}$, dan zou iemand die stilstaat op de grond een snelheid van de kogels meten van 800 m $s^{-1}$.

Het blijkt zowel uit Maxwells vergelijkingen als uit proeven dat dit voor licht niet klopt. Op de grond meet je steeds dezelfde lichtsnelheid, of de bron nu stilstaat of niet. Dat geldt ook als een snel vliegtuig licht op je afstuurt, of een naar je toe bewegende ster.

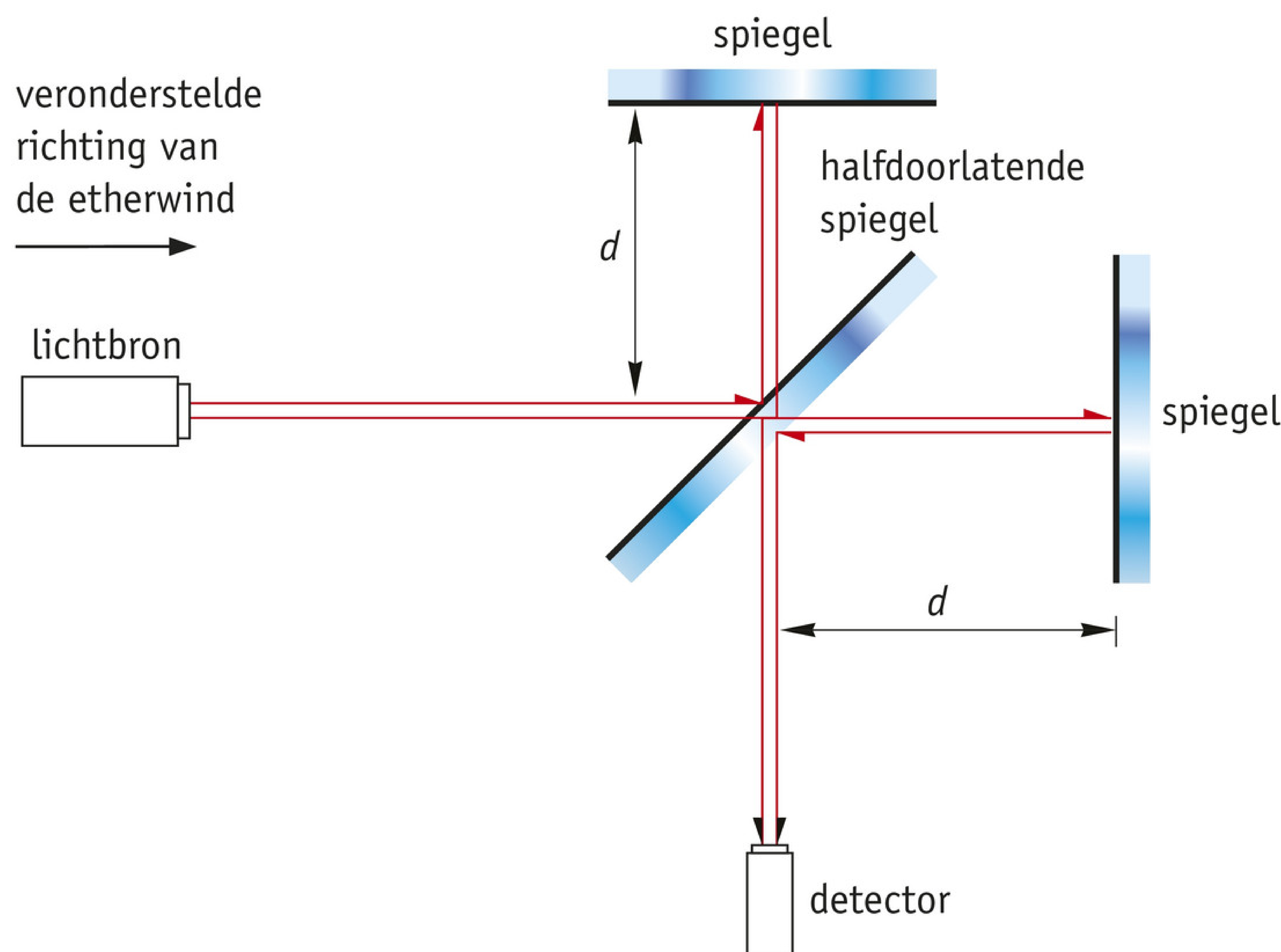
Vaak wordt in boeken gedaan of daarmee de kous af is en dat je moet concluderen dat de lichtsnelheid constant is voor iedere waarnemer. Maar dat is slechts de helft van het verhaal. Hier is de andere helft:

2 Het was al lang uit interferentieproeven bekend dat licht zich in veel opzichten gedraagt als een golf. En voor een golf, bijvoorbeeld een geluidsgolf, verwacht je dat de snelheid wordt bepaald door het medium, niet door een eventuele beweging van de bron. Het geluid van een knal die in een vliegtuig wordt geproduceerd, beweegt met de geluidssnelheid door de lucht. De knal krijgt geen extra vaart mee als de bron beweegt (in figuur 9 zie je hoe een bewegende bron golven maakt op een wateroppervlak). Het geluid van de knal passeert iedereen die stilstaat ten opzichte van de lucht met de gewone geluidssnelheid. Maar het punt is nu dat *iemand die beweegt ten opzichte van de lucht* een andere geluidssnelheid waarneemt. Dat is in het bijzonder zo voor iemand die meebeweegt met een geluidsbron.
Stel dat je laag overvliegt en je maakt een kortdurend, hard geluid. Overal op de grond staan mensen die hun handen naar hun oren brengen als ze het geluid horen. Als je met 300 m $s^{-1}$ vliegt, zie je één seconde na de knal 43 m voor je de handen naar de oren gaan. En 643 m achter je. Wat jou betreft gaat de golf met 43 m $s^{-1}$ de ene kant op en met 643 m $s^{-1}$ de andere kant op. Hoe harder je zelf gaat ten opzichte van het medium, hoe groter de door jou waargenomen golfsnelheid in de richting achter je, en hoe kleiner in de richting waarin je beweegt.



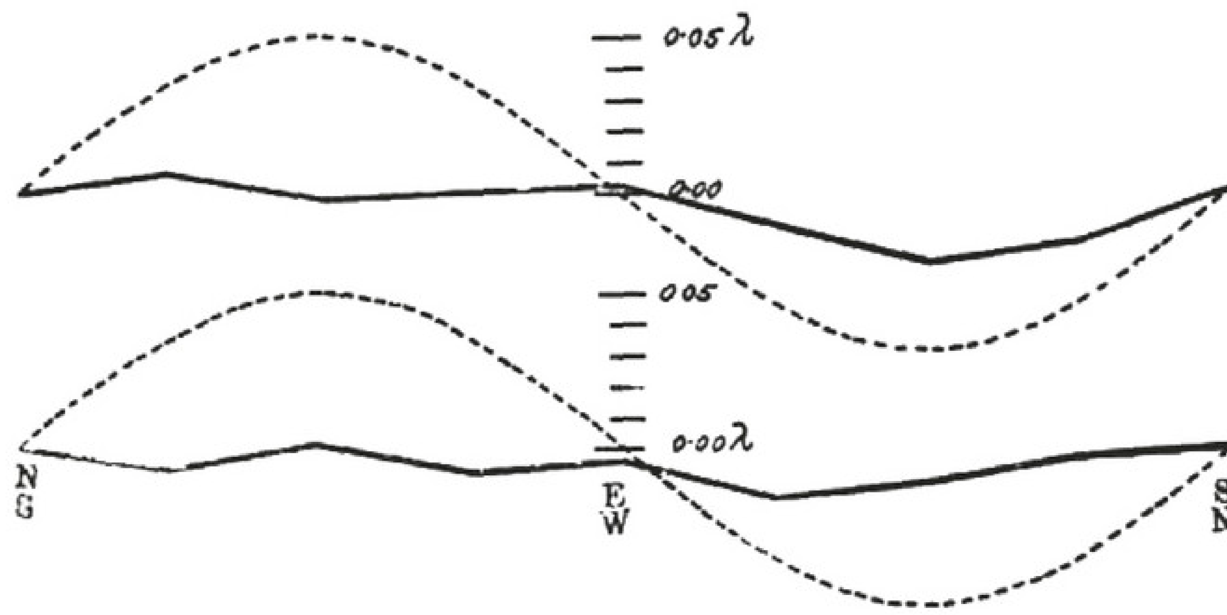
◀ **figuur 9** De bron beweegt over het water en ziet de golven in verschillende richtingen met verschillende snelheden van zich af bewegen.

De beroemde proef uit 1887 van Albert Michelson en Edward Morley was gericht op het laatste effect, dus ze zochten naar verschillende voortplantingssnelheden van een lichtgolf voor waarnemers die met verschillende snelheden door het medium bewegen. De vraag van deze twee Amerikaanse onderzoekers was of degene die met de ether meebeweegt een andere lichtsnelheid meet dan iemand die stilstaat ten opzichte van de ether. Het was immers het idee dat licht niet bestaat uit kogeltjes, maar uit golven in de ether.




▲ **figuur 10** schema van de opstelling van Michelson en Morley

Michelson en Morley lieten licht in twee loodrechte richtingen bewegen en via spiegeltjes terug samenkomen (figuur 10). Dat levert een interferentiepatroon op. De hele opstelling beweegt met de aarde mee, dus zowel bron als detector zou bewegen ten opzichte van de ether. De hele opstelling dreef in een kwikbad en draaide rond. Dan zou je verwachten dat op het ene moment de ene poot meer met de ether mee zou gaan en de andere poot meer loodrecht op die richting zou staan en dat dat even later andersom zou zijn. Kortom: je zou een *verandering* in het interferentiepatroon verwachten. Hoe sterk alles zou verschuiven, zou verklappen hoe groot de veranderingen in de lichtsnelheid zouden zijn, afhankelijk van je beweging ten opzichte van het medium waarin de lichtgolf zou bestaan (figuur 11).




▲ **figuur 11** Plaatje uit het onderzoeksartikel: als de ether zou bestaan, dan zou je een verandering van het interferentiepatroon verwachten ter grootte van *acht keer* de hoogte van de stippellijn. De meetwaarden (boven overdag en onder 's avonds) zijn weergegeven door de getrokken lijn en geven (binnen de foutenmarge) een waarde nul.

De uitkomst was nul: er was geen enkel effect. Niet als de opstelling draaide, maar ook niet door verschillen die zouden ontstaan in de loop van de dag waarbij de opstelling steeds op een andere manier door de ether zou bewegen. Er was ook geen verandering te zien in de loop van een jaar. De conclusie was helder: de lichtsnelheid is hetzelfde, hoe je ook beweegt. Dus ook in het beeld van bewegende golven in een medium blijkt iedere waarnemer altijd dezelfde lichtsnelheid te meten en is de situatie dus heel anders dan met bewegende geluidsgolven door de lucht.

## Einsteins postulaten

Deze invariantie van de lichtsnelheid is in tegenspraak met de galileitransformaties. Die zeggen dat een ten opzichte van een lichtbron bewegende waarnemer een andere snelheid meet dan een stilstaande. Iets klopt er niet. Of de galileitransformaties zijn niet goed, of de beschrijving van elektromagnetische golven inclusief de proef van Michelson en Morley is niet goed.
Einstein nam als uitgangspunt bij het opstellen van zijn beschrijving van ruimte en tijd dat de lichtsnelheid voor elke waarnemer hetzelfde moest zijn (overigens ging hij uit van de theorie van Maxwell en vond hij het logisch dat de proeven van Michelson en Morley later datzelfde opleverden; dat laatste had hij niet nodig om op het idee van een nieuwe theorie te komen).
Hij ging er dus van uit dat de elektromagnetische theorie goed was en dat de oude mechanica van onder anderen Galilei niet goed was. Daarbij realiseerde Einstein zich wel dat voor lage snelheden de klassieke mechanica goed werkte en dat de aanpassing van de theorie daarom zo moest uitpakken dat je voor lage snelheden terugkreeg wat je gewend was.
De theorie werd vervolgens opgebouwd vanuit slechts twee uitgangspunten. Die worden de 'postulaten van Einstein' genoemd. Het ene is bekend uit paragraaf 1: het relativiteitspostulaat dat in de zeventiende eeuw al werd gebruikt. Het andere is nieuw.

1 Natuurwetten zijn voor alle waarnemers die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen gelijk.
2 De lichtsnelheid is voor alle waarnemers die met constante snelheden bewegen gelijk.

Daarbij gooide Einstein in feite de ether overboord. Er is geen stof waarin lichtgolven bewegen. Elektromagnetische golven bestaan in de ruimte en in de tijd en de juiste theorie moet beschrijven hoe golven en voorwerpen daar doorheen bewegen.

**Onthoud!**

- De lichtsnelheid is altijd gelijk voor elke waarnemer; deze is onafhankelijk van de snelheid van de bron of van de waarnemer.
- Samen met het relativiteitsbeginsel vormt de invariantie van de lichtsnelheid de basis voor de nieuwe mechanica.

## Opdrachten

**9** Snel of langzaam

Als je metingen doet aan processen op aarde, ervaar je de lichtsnelheid als heel groot.

**a** Licht dat met een voorbeeld toe.

Als je metingen doet aan astronomische processen, ervaar je de lichtsnelheid als heel klein.

**b** Licht ook dat met een voorbeeld toe.

**10** Media

**a** Noem een voorbeeld van een golf die zich voortplant in een eendimensionaal medium.
**b** Noem een voorbeeld van een golf die zich voortplant in een tweedimensionaal medium.
**c** Noem een voorbeeld van een golf die zich voortplant in een driedimensionaal medium.
**d** Leg uit dat 'de elektromagnetische golven die jouw telefoon uitzendt' geen goed antwoord is op opdracht c.

**11** Snel, sneller, snelst

Zet op volgorde van lage naar hoge snelheid.

I de snelheid van licht in water
II de snelheid van licht in vacuüm
III de snelheid van geluid in lucht
IV een hogesnelheidstrein op maximale snelheid
V de snelheid van geluid in water
VI de snelheid van de aarde in haar baan rond de zon

**12** Golven op water

Als je met een bootje vaart over een perfect gladde waterspiegel en je laat elke 0,10 seconde een steentje vallen, krijg je een patroon zoals in figuur 9. De totale afstand die in horizontale richting op de foto staat, is in werkelijkheid 60 cm groot.

**a** Bepaal uit figuur 9 de golfsnelheid zoals een vis die stilligt onder het oppervlak die zou zien.
**b** Welke golfsnelheid neemt de persoon in de boot waar als maximale waarde?
**c** Welke golfsnelheid neemt de persoon in de boot waar als minimale waarde?
**d** Leg uit wat er anders is als een ten opzichte van de aarde bewegende bron lichtgolven uitzendt in plaats van watergolven. Wat meet dan iemand die stilstaat op aarde en wat meet iemand die meebeweegt met de bron?

**13** Spiegel

Einstein bedacht het volgende gedachte-experiment. Stel dat snelheden zich zo zouden gedragen als je intuïtief denkt, dus volgens de galileitransformatie. Stel dat licht zou bewegen ten opzichte van een 'ether'. Dan zou de volgende redenering kloppen: als ik zelf met de lichtsnelheid beweeg ten opzichte van de ether en ik houd een spiegel op armlengte voor me, dan zou ik geen spiegelbeeld zien. Licht dat van mijn gezicht door de ether in de richting van de spiegel beweegt, komt namelijk nooit bij die spiegel omdat de spiegel ook met de lichtsnelheid door de ether beweegt, in dezelfde richting. Maar … dan zou ik uit de waarneming dat ik geen spiegelbeeld zie, kunnen *merken* dat ik zélf met de lichtsnelheid beweeg.

**a** Leg uit dat dit volgens het relativiteitsbeginsel zoals Galilei dat heeft geformuleerd *geen* waarneming is die echt zou kunnen worden gedaan.
**b** Welke conclusie kun je dus trekken uit dit gedachte-experiment?

**14** Licht dat naar licht kijkt
Uit een lamp schijnt licht naar alle kanten.
**a** Hoe snel gaat het licht naar links, volgens een waarnemer die stilstaat bij de lamp?
**b** Hoe snel gaat volgens hem het licht naar rechts?

Doe nu een gedachte-experiment: je bekijkt de lichtstraal die naar rechts gaat vanuit het gezichtspunt van de straal die naar links beweegt.
**c** Leg uit dat je dan zou verwachten een snelheid $2c$ waar te nemen.
**d** Laat zien dat die waarde ook volgt uit de galileitransformatie.
**e** Welke waarde zou je moeten meten volgens Einsteins postulaten?

**+15** Licht *lijkt* soms langzamer
Lichtbreking is het verschijnsel waarmee je bijvoorbeeld lenswerking kunt verklaren. Hierbij speelt de brekingsindex een rol. Dat is de factor 'waarmee het licht langzamer gaat in het materiaal' vergeleken met de snelheid in vacuüm. Dit lijkt in tegenspraak met de uitspraak dat de lichtsnelheid voor iedere waarnemer gelijk is. Het werkt echter zo: licht wordt door de moleculen van het materiaal geabsorbeerd, kortstondig vastgehouden, en weer uitgezonden. Tussen de moleculen is de lichtsnelheid de gewone lichtsnelheid, maar netto is er een vertraging. Beschouw diamant, met brekingsindex $n = 2{,}4$. Je hebt een volume van 1,0 m bij 1,0 m bij 1,0 m zuivere diamant.
**a** Hoelang doet licht in vacuüm over het afleggen van een afstand van 1,0 m?
**b** Hoelang doet een lichtstraal erover om recht door 1,0 m diamant te gaan?
**c** Bereken hoeveel tijd een koolstofatoom in diamant het licht gemiddeld ophoudt.

# 3 Tijdrek en lengtekrimp

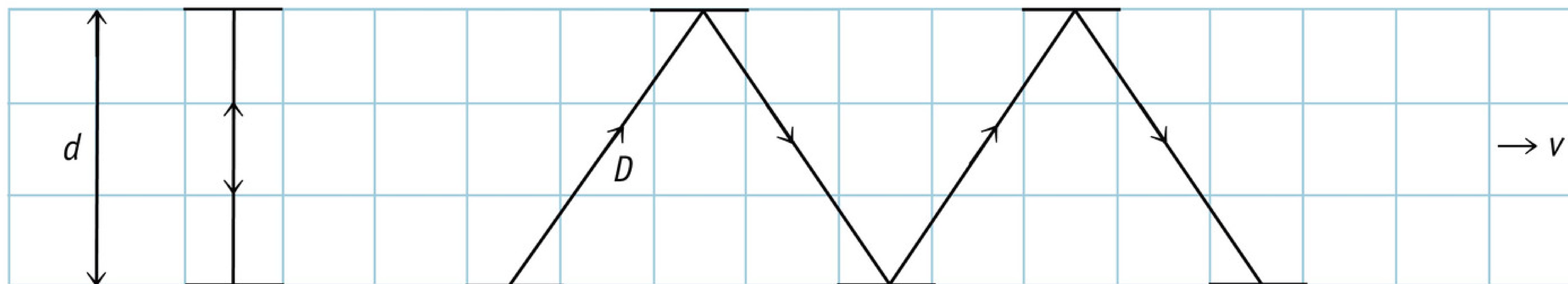
In deze paragraaf leer je:
- met behulp van het begrip 'lichtklok' en beide postulaten van Einstein uitleggen waarom een waarnemer een ten opzichte van hem bewegende klok langzamer ziet lopen: er is tijdrek;
- uitleggen hoe je concludeert dat als er tijdrek is, er ook lengtekrimp is;
- met behulp van een formule kwantitatieve uitspraken doen over tijdrek en lengtekrimp als functie van de snelheid van een waargenomen object ten opzichte van een waarnemer.

Het feit dat de lichtsnelheid voor elke waarnemer hetzelfde is, heeft gevolgen voor hoe je een bewegende klok ziet lopen. Een ten opzichte van jou bewegende klok van een bepaald type, een lorentz-lichtklok, zul je langzamer zien tikken dan een klok van hetzelfde type die je op schoot houdt. Met behulp van het relativiteitsbeginsel kun je vervolgens inzien dat álle ten opzichte van jou bewegende klokken langzamer tikken, niet alleen de lorentz-lichtklokken die hierna worden beschreven.

## De lorentz-lichtklok

In figuur 12 zie je een lichtklok, bestaande uit twee tegenover elkaar geplaatste spiegels. Tussen de spiegels gaat een lichtstraal op en neer. De tijdmeting bestaat eruit dat je het aantal 'tikken' tegen de spiegels telt. Een waarnemer die stilstaat ten opzichte van de klok ziet de weerkaatsingen met periode $\Delta t$ gebeuren. Dat is de periode tussen twee weerkaatsingen.

Nu is er een identieke lichtklok die precies gelijkloopt met de eerste indien hij ook in rust is ten opzichte van de waarnemer. Maar deze tweede lichtklok verplaatst zich met snelheid $v$ ten opzichte van de waarnemer. De waarnemer ziet het licht vertrekken van de onderste spiegel en weerkaatsen tegen de bovenste. Die tweede gebeurtenis is echter niet recht boven de eerste, want in de tijd dat de lichtstraal van onder naar boven ging, is de hele klok ten opzichte van de waarnemer verplaatst. Volgens de waarnemer die stilstaat heeft het licht een *grotere afstand* afgelegd dan volgens een waarnemer die met de klok meereist. Omdat het licht ook ten opzichte van de stilstaande waarnemer met *dezelfde lichtsnelheid* gaat, is de tijdsduur tussen twee tikken volgens hem *langer*. Dit verschijnsel heet **tijdrek**.




▲ **figuur 12** Het principe van de lichtklok. Links een ten opzichte van de waarnemer stilstaand exemplaar, rechts een exemplaar dat beweegt ten opzichte van de waarnemer.

Welk tijdverschil tussen tikken meet de waarnemer langs de kant nu? Neem voor de berekening een verticale afstand $d$ tussen de spiegels. Op de klok die in rust is meet de waarnemer een tijd tussen de weerkaatsingen van $\Delta t = \dfrac{d}{c}$. De stilstaande waarnemer meet op de bewegende klok een tijd tussen de tikken $\Delta t'$. De afstand die de lichtklok volgens hem tussen twee tikken heeft afgelegd, is $v \cdot \Delta t'$. De door het licht afgelegde afstand noemt hij $D$ (figuur 12).

De grootte van die afstand vind je met de stelling van Pythagoras: $D = \sqrt{d^2 + (v \cdot \Delta t')^2}$

Volgens de stilstaande waarnemer is de tijdsduur tussen twee tikken:

$$\Delta t' = \frac{D}{c} = \sqrt{\left(\frac{d}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot \Delta t'^2} = \sqrt{\Delta t^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot \Delta t'^2}$$

Hierin komt $\Delta t'$ twee keer voor. De bedoeling is de vergelijking te schrijven als $\Delta t' = \ldots$, dan weet je de tijd tussen tikken die de stilstaande waarnemer meet op de bewegende klok.

Alles kwadrateren en alle termen met $\Delta t'$ naar een kant halen, levert $\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \cdot \Delta t'^2 = \Delta t^2$ en dus geldt:

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \Delta t$$

De stilstaande waarnemer ziet de ten opzichte van hem bewegende klok dus $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ keer zo langzaam tikken als de klok die in rust is. Deze factor komt nog vaak voor. Daarom wordt hij afgekort, als $\gamma$, zodat je kunt schrijven:

$$\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$$

De factor $\gamma$ is altijd groter dan 1, want je ziet een bewegende klok altijd langzamer lopen dan een klok die ten opzichte van jou in rust is.

Dat een ten opzichte van een waarnemer bewegende lichtklok langzamer tikt dan een stilstaande, is genoeg om aan te tonen dat álle bewegende klokken langzamer lopen. Dat volgt uit het serieus en letterlijk nemen van de postulaten van Einstein.
Het mag volgens het eerste postulaat van Einstein niet *mogelijk zijn* te bepalen met welke absolute snelheid iets beweegt. Neem nu een aantal gelijklopende klokken van verschillend type: slingeruurwerken, quartzhorloges, atoomklokken, personen met een hartslag en een lichtklok. Laat alle klokken ten opzichte van jou gezamenlijk bewegen met één bepaalde snelheid. Als nu alleen de lichtklok zou gaan achterlopen, zou je kunnen vaststellen hoe groot de absolute snelheid is, aangezien bij een grotere snelheid de lichtklok meer zou gaan achterlopen op de andere klokken. Het kan volgens het eerste postulaat niet zo zijn dat het mogelijk is te constateren wat de absolute snelheid is. Dus alle klokken gaan evenveel langzamer lopen.
Dit geldt ook voor alle ‘interne’ klokken. Bij een ten opzichte van jou met constante snelheid bewegend persoon zie je de hartslag, het verouderingsproces van cellen, zijn bewegingsritme, kortom *alles* langzamer gaan. Let wel: de bewegende persoon merkt hier helemaal niets van, die meet zijn eigen tijd.
Zo is beredeneerd dat tijdrek bestaat. Dit effect is ook gemeten met behulp van atoomklokken, waarvan er een op aarde bleef en de ander met een lijnvlucht meeging (figuur 13).



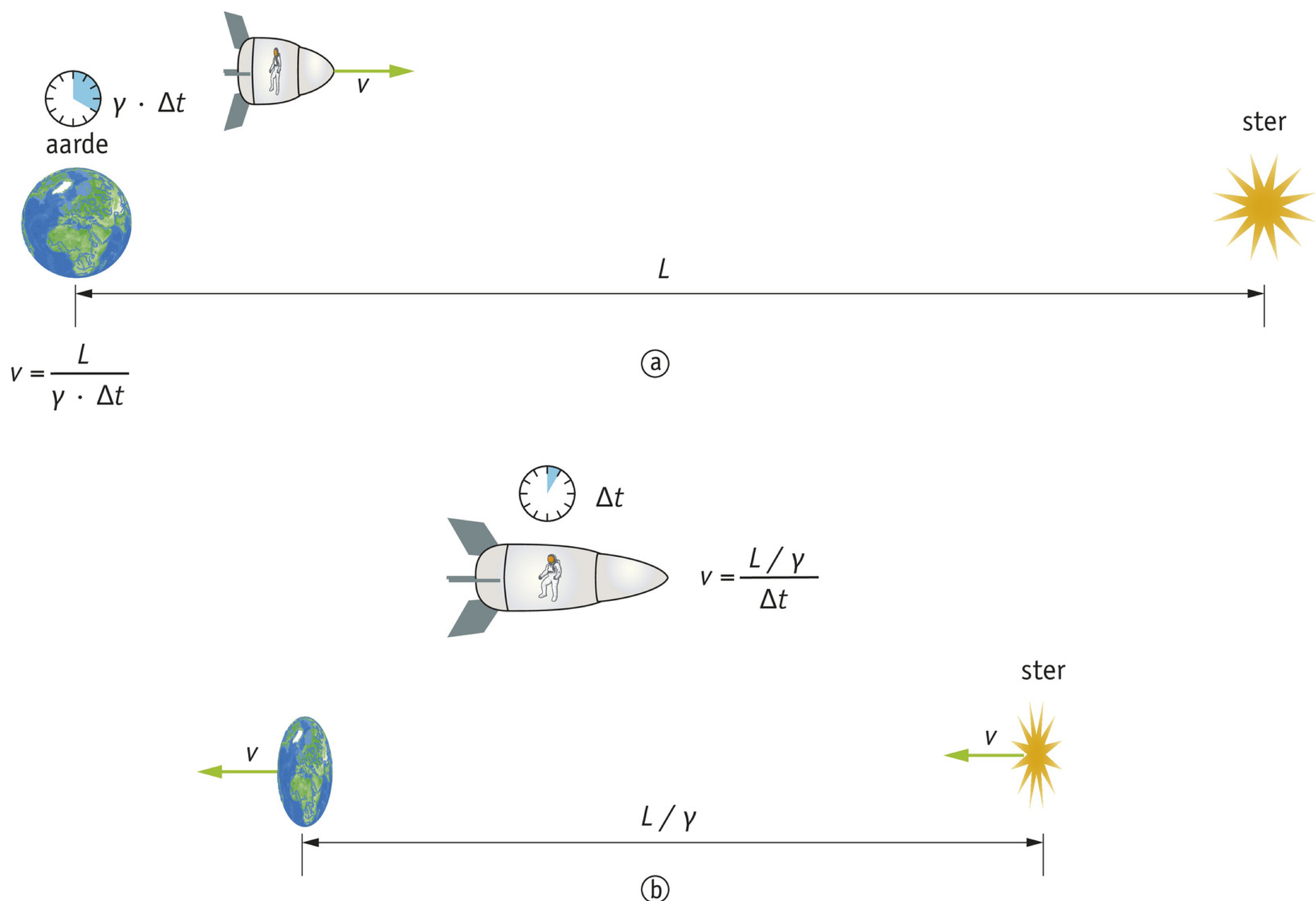
▲ **figuur 13** tijdrek-experiment in een vliegtuig

## Lengtekrimp

Als je tijdsduren bij bewegende objecten anders waarneemt dan bij stilstaande en als de lichtsnelheid gelijk blijft, dan moet er ook wel iets aan de hand zijn met de waarneming van lengten. Een snelheid is immers een afstand gedeeld door een tijd. Wat er met de lengte gebeurt, kun je het best begrijpen in een voorbeeld met heel snel bewegende deeltjes.
Een belangrijk voorbeeld van iets met een ‘ingebouwde klok’ zijn deeltjes die vervallen in andere deeltjes. Radioactieve stoffen kennen een halveringstijd, de tijd waarin de helft van de deeltjes is vervallen. Als de radioactieve bron ten opzichte van jou beweegt, zie je dat verval een factor $\gamma$ langzamer gebeuren. Let wel, die factor is meestal heel dicht in de buurt van 1 omdat snelheden bijna altijd laag zijn. Maar het effect is echt, je kunt dit meten.
Bij onderzoeksinstituut CERN worden in botsingen deeltjes geproduceerd die heel snel weer vervallen in andere deeltjes. Men wil eigenschappen van die kortlevende deeltjes vaststellen.
In de tijd dat ze ‘leven’ laat men ze rondjes afleggen in een cirkelvormige buis met een omtrek van 27 km. Dat gebeurt met enorme snelheden, dicht bij de lichtsnelheid. Een onderzoeker die stilstaat ziet hoeveel rondjes de deeltjes afleggen voor ze vervallen. *Dat aantal rondjes is veel groter dan je zou denken dat mogelijk is, de deeltjes leggen een veel grotere afstand af dan de levensduur maal de lichtsnelheid.* Dit komt doordat de waarnemer bij de bewegende deeltjes tijdrek waarneemt. De door hem waargenomen levensduur is langer dan de levensduur die je meet bij eenzelfde deeltje dat stilstaat ten opzichte van jou.

Tot nu toe is dit beschreven als een toepassing van *tijdrek*. Als je de situatie vanuit het bewegende deeltje bekijkt, lijkt de redenering mis te gaan. Maar je zult zien dat het toch klopt, omdat een ander relativistisch verschijnsel optreedt: **lengtekrimp**.

Het deeltje heeft zijn eigen tijd. Het staat stil ten opzichte van zichzelf en er is dus geen tijdrek. Het deeltje 'ziet' de tunnel snel aan zich voorbijgaan. Nu is het zeker dat een waarnemer B die met het deeltje meebeweegt het eens zal zijn met waarnemer A aan de kant over het aantal rondjes dat het deeltje aflegt voordat het vervalt. Beide waarnemers tellen hoe vaak het deeltje een bepaalde finishlijn op een punt van de cirkel passeert voordat het niet meer bestaat. Dan zou je denken dat er een probleem is, want de levensduur die de meebewegende waarnemer B meet, zonder tijdrek, is te kort om die afstand af te leggen.
De oplossing van deze paradox is dat de meebewegende waarnemer B een *kortere* tunnel ziet. De lengte van de ten opzichte van waarnemer B *bewegende tunnel* is gekrompen met een factor $\gamma$: die is gelijk aan de verhouding tussen de door deze waarnemer gemeten levensduur en de door de waarnemer aan de kant gemeten levensduur. De tunnel is dus voor de meebewegende waarnemer B $\gamma$ keer zo kort. De met het deeltje meebewegende waarnemer legt in een $\gamma$ keer zo korte tijd een $\gamma$ keer zo korte afstand af, vergeleken met waarnemer A die stilstaat bij de tunnel. Deze waarnemer A vindt dat het een lange tunnel is, waarvoor de deeltjes een uitgerekte tijd nodig hebben om hem net zo vaak te doorlopen.




▲ **figuur 14** een ruimtereis gezien vanaf de aarde (a) en gezien vanuit de raket (b)

Lengtekrimp houdt in dat alle ten opzichte van de waarnemer bewegende objecten korter worden waargenomen dan stilstaande (figuur 14). Ook meetlatten. Bij lage snelheden is zowel tijdrek als lengtekrimp klein, omdat de factor $\gamma$ dan niet veel verschilt van 1. Pas bij snelheden in de buurt van de lichtsnelheid wordt het verschil substantieel.

## Onthoud!

- Een ten opzichte van jou bewegende klok zie je langzamer lopen. Dit verschijnsel heet tijdrek.
- Een bewegende meetlat neem je waar als korter dan een stilstaande, identieke meetlat. Dit wordt lengtekrimp genoemd.
- De factor waarmee tijd bij een bewegende klok is uitgerekt en waarmee een bewegende meetlat is gekrompen, is: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

## Opdrachten

**16** Speciale relativiteit?
Alles wat volgt uit de twee postulaten van Einstein wordt ‘speciale relativiteitstheorie’ genoemd.
Leg voor elk van de volgende feiten uit of ze horen bij deze theorie.
**a** Het licht van de zon bereikt ons pas enige tijd nadat het is uitgezonden.
**b** Een gps-systeem houdt er rekening mee dat de satellieten, waarmee contact wordt gehouden, snel rond de aarde bewegen.
**c** Er is geen onderscheid tussen wat je voelt in een lift die naar boven versnelt en een lift die niet versnelt, maar zich in een zwaartekrachtsveld bevindt.

**17** Rekenen met de gammafactor
De waarde van $\gamma$ hangt af van de snelheid.
**a** Bereken $\gamma$ als $v = 0{,}0050 \cdot c$
**b** Bereken $\gamma$ als $v = 0{,}050 \cdot c$
**c** Bereken $\gamma$ als $v = 0{,}50 \cdot c$
**d** Teken de grafiek van $\gamma$ tegen $v$.
**e** Bereken $v$ als $\gamma = 1{,}10$
**f** Laat met een berekening zien dat er geen oplossing is voor $v$ als je uit zou gaan van $\gamma = 0{,}90$.

**18** De formule voor de gammafactor
Als je de formule voor $\gamma$ wiskundig analyseert, kun je conclusies trekken over wat er natuurkundig kan gebeuren.
**a** Leg wiskundig uit dat uit de formule voor $\gamma$ volgt dat $\gamma$ nooit kleiner kan zijn dan 1.
**b** Leg uit wat het voor de waarnemingen betekent dat $\gamma$ nooit kleiner kan zijn dan 1.
**c** Leg uit hoe je aan de formule ziet dat je $v$ en $c$ best allebei in kilometer per uur (km $h^{-1}$) kunt uitdrukken, dat je daarmee dezelfde factor $\gamma$ krijgt als wanneer je beide in meter per seconde (m $s^{-1}$) uitdrukt.
**d** Leg uit dat volgens de formule een snelheid nooit groter kan zijn dan de lichtsnelheid.

Als een voorwerp ten opzichte van jou beweegt, zijn de tijdrek en de lengtekrimp die je waarneemt niet afhankelijk van de richting.
**e** Leg uit hoe je dat aan de formule voor $\gamma$ kunt zien.

**19** Slimmer dan de rekenmachine
De factor $\gamma$ wordt pas merkbaar verschillend van 1 als de snelheid groot is. Lastig is dat voor lage snelheden veel rekenmachines voor $\gamma$ de afgeronde waarde 1 geven, terwijl je geïnteresseerd bent in de kleine afwijking van 1.

**a** Controleer of jouw rekenmachine inderdaad 1 geeft als $v = 30$ m $s^{-1}$.

Een truc om hiermee om te gaan (deze truc kun je ook bij andere opdrachten gebruiken), is dat voor kleine waarden van $\frac{v}{c}$ geldt: $\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$

**b** Bereken met deze benaderingsformule hoeveel $\gamma$ afwijkt van 1 bij $v = 30$ m $s^{-1}$.

**c** Bereken met deze benaderingsformule welke snelheid hoort bij een $\gamma$ die één tien miljardste afwijkt van 1.

**20** Snelheden op volgorde

Zet de volgende situaties op volgorde van lage naar hoge snelheid.

I $v = 0{,}15 \cdot c$

II Een elektron doorloopt een cirkel met straal 1,0 cm in een magneetveld van 2,0 T.

III $\gamma = 1{,}05$

IV Een proton heeft een kinetische energie van 3,2 eV.

**21** Tweelingzussen

Een straaljagerpilote vliegt met een snelheid van 300 m $s^{-1}$. Volgens haar is haar vliegtuig *precies* 10 meter lang. Haar tweelingzus op de grond ziet het vliegtuig met de pilote erin bewegen.

**a** Is de verkorting van het vliegtuig die de tweelingzus waarneemt meer of minder dan de afmeting van een atoom?

Volgens de tweelingzus op de grond gaat de tijd van de pilote langzamer dan die van haarzelf.

**b** Bereken hoeveel de pilote volgens haar zus minder oud wordt als er volgens de zus op de grond precies een jaar verstrijkt.

**c** Hoelang moet de pilote met deze snelheid vliegen totdat er een leeftijdsverschil van een jaar is?

**22** Meneer Tompkins en Maud

De natuurkundige George Gamov schreef populair-wetenschappelijke boeken over onder andere relativiteit, met meneer Tompkins in de hoofdrol. Meneer Tompkins is een beetje te dik, vindt hij. Zijn buik steekt 40 cm naar voren. Hij heeft een oogje op Maud en wil wat dunner overkomen, om een goede indruk op haar te maken.

**a** Bereken met welke snelheid meneer Tompkins moet bewegen zodat hij voor de stilstaande Maud slechts 30 cm dik lijkt.

Meneer Tompkins denkt dat hij meer kans maakt bij Maud als het leeftijdsverschil kleiner zou zijn. Hij is 35 jaar oud, Maud 27. Een leeftijdsverschil van 6 jaar lijkt hem beter.

**b** Hoelang moet hij met de snelheid van opdracht a bewegen totdat Maud vindt dat hij nog maar 6 jaar ouder is dan zij?

**23** Muonen door de atmosfeer

Hoog in de atmosfeer ontstaan muonen. Dat zijn deeltjes met een halveringstijd van 2,2 μs. Na die tijd is de helft van de muonen vervallen. De muonen bewegen met snelheid $0{,}98 \cdot c$.

**a** Bereken na welke afstand in de atmosfeer de helft van de deeltjes verdwenen zou zijn als er geen tijdrek of lengtekrimp was.

**b** Bereken hoeveel procent van de muonen die op 10 km hoogte ontstaan, het aardoppervlak zouden bereiken.

In werkelijkheid bereikt 10% van de muonen het aardoppervlak.

**c** Beschrijf kwalitatief hoe dit kan, gezien vanuit het gezichtspunt van een waarnemer A op aarde. Tip: zie figuur 14.

**d** Beschrijf kwalitatief hoe dit kan, gezien vanuit het gezichtspunt van een waarnemer B die meebeweegt met de muonen.

**e** Bereken hoeveel procent van de muonen die op 11,0 km hoogte ontstaan, het aardoppervlak bereiken als ze bewegen met snelheid 0,98 *c*.

**+24** Schijnbare tegenspraak

Dit is de zogenoemde 'tweelingparadox': Er is een identieke tweeling. Appie blijft op aarde en Bennie vertrekt in een raket. Bennie versnelt tot hij met snelheid $0{,}999 \cdot c$ van de aarde af gaat. Die snelheid houdt hij een tijd vol. Dan remt hij af tot stilstand en versnelt hij de andere kant op. Hij beweegt weer lang met constante snelheid $0{,}999 \cdot c$ naar de aarde toe. Hij remt en landt.

Nu zou Appie kunnen denken: Bennie bewoog *ten opzichte van mij*, zijn tijd ging langzamer dan de mijne. Hij is jonger dan ik als hij op aarde terugkomt. Bennie zou kunnen denken: Appie bewoog *ten opzichte van mij*, zijn tijd ging langzamer dan de mijne. Hij is jonger dan ik als ik terugkom op aarde.

**a** Leg uit dat dit een tegenspraak zou zijn.

In werkelijkheid is Bennie na afloop jonger dan Appie.

**b** Leg uit waarom de regel uit de speciale relativiteitstheorie over tijdrek in deze situatie niet zomaar kan worden toegepast en er dus geen echte tegenspraak is binnen de speciale relativiteitstheorie.

# 4 De lorentztransformatie

In deze paragraaf leer je:

- aangeven hoe de tijdas en de positieas van een bewegende waarnemer in een diagram moet lopen opdat hij de juiste lichtsnelheid geeft;
- aangeven hoe je in een diagram met assen van twee referentiestelsels coördinaten afleest en constateert hoe groot de tijdrek en de lengtekrimp zijn;
- uitleggen dat uit het aflezen van de diagrammen volgt dat 'gelijktijdigheid' een relatief begrip is;
- uitleggen hoe waarnemers in de relativiteitstheorie via een lorentztransformatie posities en tijden aan elkaar doorgeven.

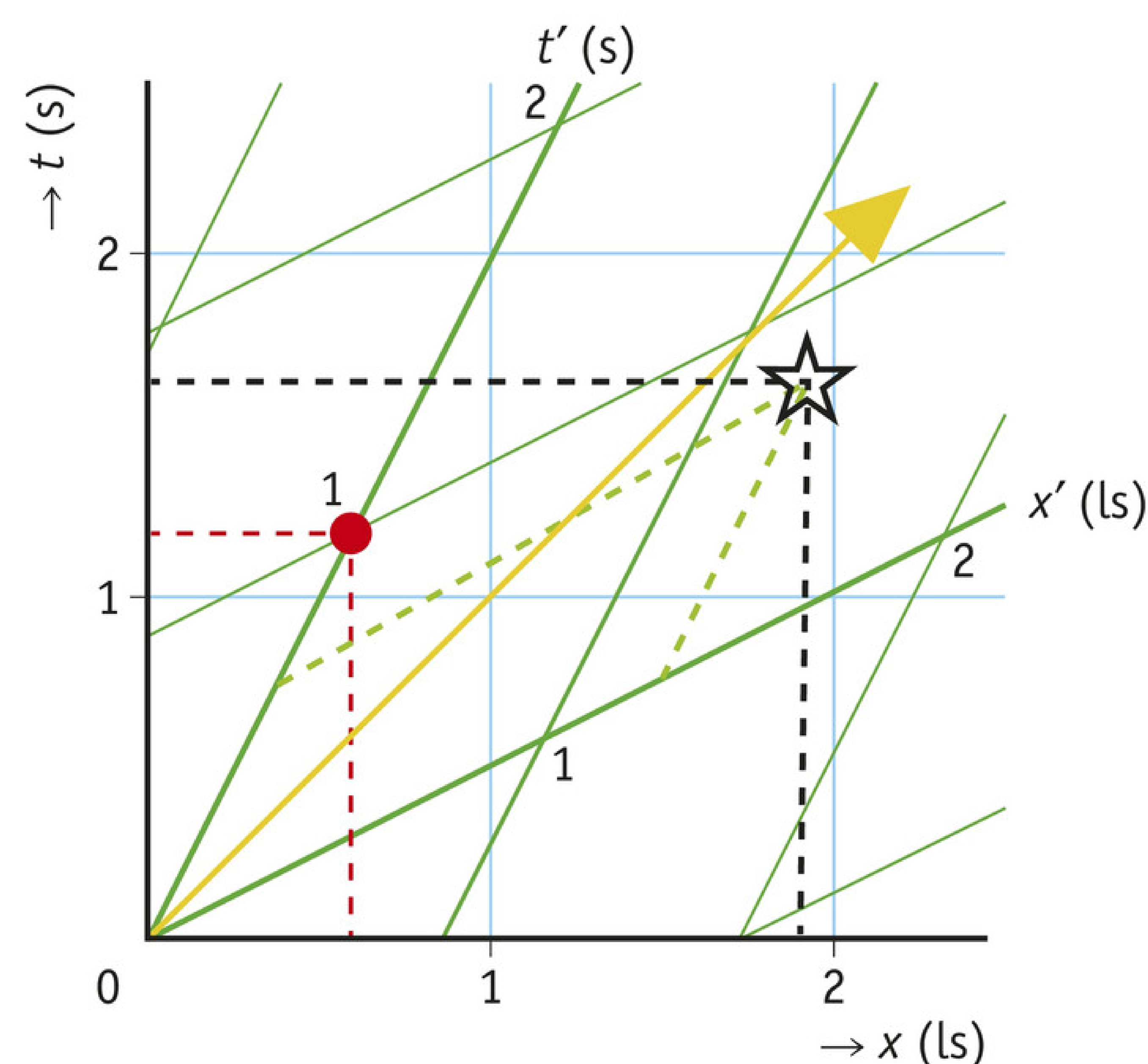
'Relativiteit' is eigenlijk een vreemde naam voor de nieuwe beschrijving van ruimte en tijd die Einstein gaf. De oude theorie had al een relativiteitsbeginsel. Ook toen al was de positie die je meet niet voor iedereen hetzelfde: waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen, moesten de plaatscoördinaat aan elkaar doorgeven via een galileitransformatie: $x' = x - v \cdot t$. In de oude theorie is de lichtsnelheid echter voor iedereen anders. Deze wordt juist absoluut in Einsteins nieuwe beschrijving. Zo bezien zou je de nieuwe theorie absoluutheidstheorie kunnen noemen. Er is ook een grootheid die absoluut was in de oude theorie en die in Einsteins theorie relatief wordt. Dat is de tijd. De relatie $t' = t$ uit de galileitransformatie is niet houdbaar, omdat deze niet in overeenstemming is met de tweede aanname van Einstein: de lichtsnelheid is voor iedere waarnemer gelijk.

## Beschrijving in diagrammen

In figuur 8 bij opdracht 7 zag je wat er gebeurt bij een galileitransformatie. De gele lijn stelt de beweging van een lichtpuls voor. Volgens waarnemer A in het $(x,t)$-stelsel gaat die met de lichtsnelheid. Waarnemer B die afstanden meet vanaf de $t'$-as meet een lagere lichtsnelheid. Dat komt doordat de $t'$-as naar rechts is gekanteld. Als er verder niets gebeurt, meet waarnemer B een kleinere afstand en dezelfde tijd vergeleken met waarnemer A. Dat is niet in overeenstemming met het tweede postulaat van Einstein: de lichtsnelheid is voor iedere waarnemer gelijk. Hoe ziet een ruimtetijddiagram eruit in de theorie van Einstein?

Volgens het tweede postulaat moet de uitkomst voor de lichtsnelheid in het assenstelsel van waarnemer B gelijk zijn aan de waarde die waarnemer A meet. Dat kan alleen als er behalve aan de afstandsmeting ook iets aan de tijdmeting verandert. Dat is logisch, want een snelheid is een afstand gedeeld door een tijd. Als het een verandert en het ander niet, kan de uitkomst niet hetzelfde zijn.
In dat geval moet een punt dat voor de ene waarnemer evenveel tijdseenheden als afstandseenheden van de oorsprong vandaan ligt, ook voor de andere waarnemer op de diagonaal van zijn nieuwe assenstelsel liggen. Dan is de snelheid van een lichtpuls in beide referentiestelsels gelijk. Dat kan als de $x'$-as naar boven kantelt vergeleken met de $x$-as en wel over dezelfde hoek als de $t'$-as is gekanteld ten opzichte van de $t$-as (figuur 15). De gele lijn die de lichtpuls voorstelt, is dan nog steeds, zoals het hoort, de lijn die een hoek in gelijke delen deelt. De wiskundige term hiervoor is bissectrice. De lichtsnelheid is voor beide waarnemers gelijk, omdat in beide assenstelsels elk punt op de gele lijn even ver van de plaats- en tijdassen vandaan is.

De nieuwe positie $x'$ en tijd $t'$ van een gebeurtenis meet je door parallelle lijnen te trekken zoals je dat ook doet bij het ontbinden van een kracht: om de waarde van $t'$ te vinden, projecteer je het punt van de gebeurtenis (in figuur 15 een sterretje) op de $t'$-as door een (groene) stippellijn parallel aan de $x'$-as te tekenen. Om de waarde van $x'$ te vinden, projecteer je het punt van de gebeurtenis op de $x'$-as door een (groene) stippellijn parallel aan de $t'$-as te tekenen. Vervolgens kijk je op elke as waar je uitkomt vergeleken met de roosterlijnen van het groene rooster met de accenten.
In figuur 15 is dit voorgedaan. De gebeurtenis die is weergegeven door een sterretje vindt volgens waarnemer A – die de zwarte assen gebruikt – plaats op ($x$ = 1,9 ls; $t$ = 1,6 s). Waarnemer B – die de groene assen gebruikt – vindt dat de gebeurtenis plaatsvindt op ($x'$ = 1,2 ls; $t'$ = 0,7 s).
De gebeurtenis die is weergegeven door een rode stip ligt wat betreft waarnemer B op een roosterpunt: ($x'$ = 0 ls; $t'$ = 1 s). Waarnemer A meet ($x$ = 0,6 ls; $t$ = 1,2 s).



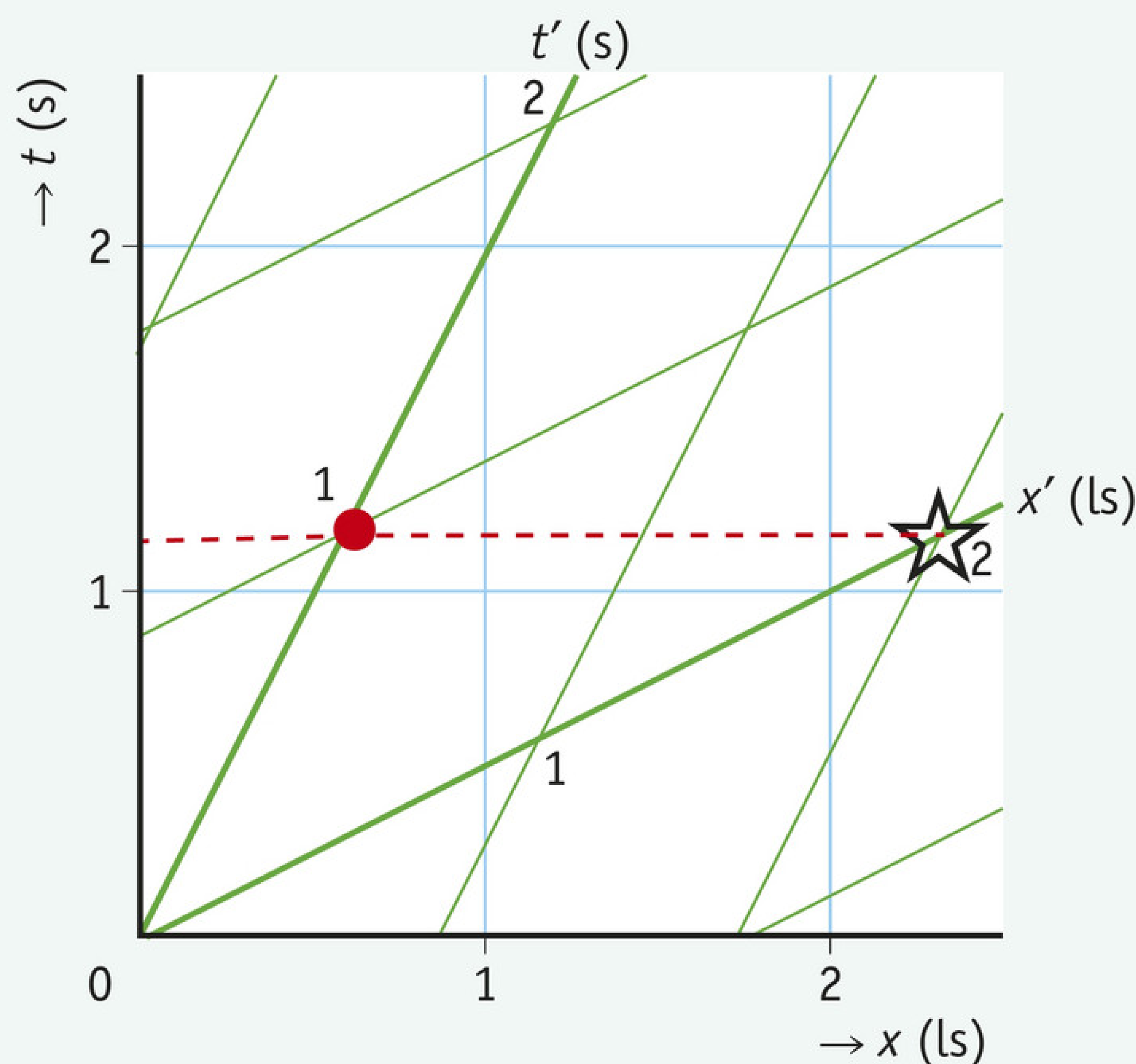

▲ **figuur 15** De gele lijn stelt een lichtpuls voor. In zowel het zwarte als groene assenstelsel ligt de lichtpuls op de bissectrice van de assen.

Deze manier van posities en tijdstippen meten voldoet aan het tweede postulaat van Einstein. Alle waarnemers die ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen, meten dezelfde lichtsnelheid. Er is wel een prijs betaald. Twee waarnemers A en B zijn het wel eens over de waarde voor de lichtsnelheid, maar niet over het tijdstip en de positie van een gebeurtenis. Voor de positie was dat al zo in de oude theorie. De posities gemeten door A en B hadden niet dezelfde waarde, maar A en B moesten via galileitransformaties de positie van een gebeurtenis aan elkaar vertellen. Nu moeten waarnemers ook het tijdstip van een gebeurtenis via een transformatie aan elkaar doorgeven.

**Voorbeeldopgave 2**

Laat met een voorbeeld in een ruimtetijddiagram zien dat het begrip 'gelijktijdigheid' relatief is geworden.

*Uitwerking*




◀ **figuur 16** De gebeurtenissen zijn volgens de een gelijktijdig, volgens de ander niet.

Zie figuur 16. Er zijn twee gebeurtenissen weergegeven: een door een rode punt en een door een sterretje. Voor waarnemer A met de zwarte assen vinden beide gebeurtenissen plaats op $t$ = 1,2 s. Voor waarnemer B met de groene assen geldt dat het tijdstip $t'$ = 0 s van de gebeurtenis 'sterretje' vroeger valt dan het tijdstip $t'$ = 1 s van de gebeurtenis 'rode punt'. Die laatste twee waarden zijn vrij gemakkelijk af te lezen doordat de gebeurtenissen plaatsvinden op punten die op de assen liggen.

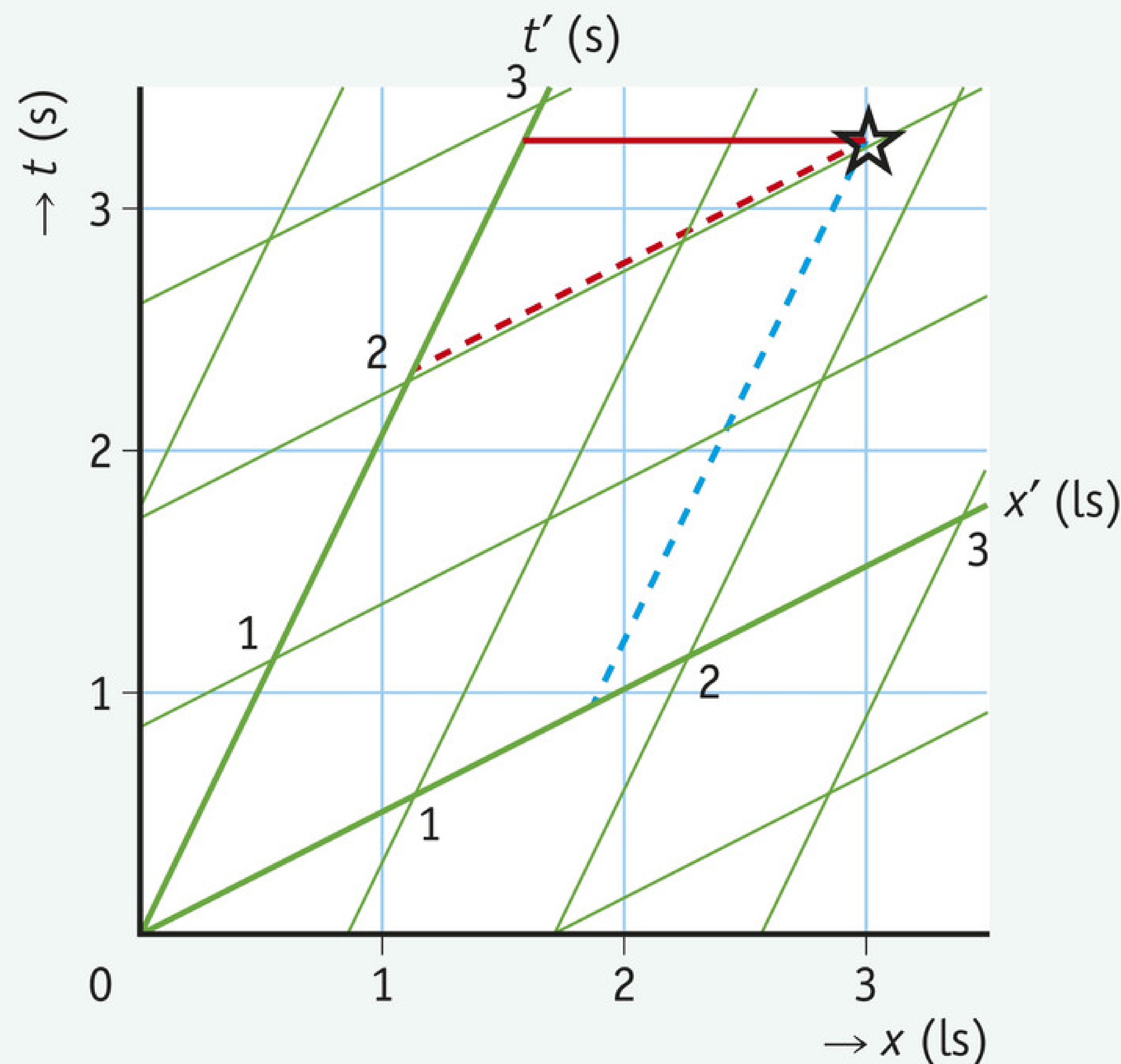
## De lorentztransformatie

De nieuwe manier waarop de ene waarnemer de posities en tijdstippen vertaalt voor de ander, wordt de **lorentztransformatie** genoemd (genoemd naar de Nederlandse natuurkundige Hendrik Lorentz (1853–1928)). De verbanden worden gegeven door:

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

**Voorbeeldopgave 3**




▲ **figuur 17** lengten en tijdsduren volgens twee waarnemers

Bekijk figuur 17. Waarnemer A staat stil ten opzichte van de aarde. Hij gebruikt de zwarte assen en meet $x$ en $t$ van een gebeurtenis die is weergegeven met een sterretje. Waarnemer B beweegt ten opzichte van de aarde. Hij gebruikt de groene assen en meet met coördinaten $x'$ en $t'$.

**a** Wat is volgens waarnemer A de plaats en de tijd van de gebeurtenis?

In de figuur staat een rode horizontale lijn. Er staat ook een rode stippellijn. De lengte van een van de twee lijnstukken geeft de waarde van de positiecoördinaat weer die waarnemer B zou meten als de galileitransformatie geldig zou zijn. De lengte van het andere lijnstuk geeft de waarde van de positiecoördinaat weer die hoort bij de lorentztransformatie.

**b** Welke lijn hoort bij welke transformatie? Leg je antwoord uit.

Beide positiecoördinaten zijn kleiner dan de waarde die waarnemer A meet. Maar er is een onderling verschil.

**c** Maak een keuze: $x'_{\text{lorentz}}$ is volgens de tekening *groter* / *kleiner* dan $x'_{\text{galilei}}$.
**d** Leg uit dat dit ook uit de formules van de lorentztransformatie volgt.
**e** Leg uit dat de lengte van de blauwe stippellijn $t'_{\text{lorentz}}$ van waarnemer B voorstelt.
**f** Is deze waarde volgens de tekening groter of kleiner dan de waarde die waarnemer A meet?
**g** Leg uit dat dit in overeenstemming kan zijn met de formules.

*Uitwerking*

**a** $x = 3$ ls en $t = 3{,}3$ s
**b** De horizontale getrokken lijn hoort bij de galileitransformatie, want hij is parallel getrokken aan de zwarte $x$-as. De lijn stelt dus een constante $t$ voor en volgens de beschrijving van Galilei is de tijd onveranderd. De stippellijn hoort bij de lorentztransformatie, want hij is getrokken parallel aan de groene $x'$-as; het is dus een lijn met constante $t'$. De lengte is gelijk aan $x'$: de lengte van de rode stippellijn is gelijk aan de andere zijde van het parallellogram: de afstand van de oorsprong tot waar de blauwe stippellijn de as raakt.
**c** $x'_{\text{lorentz}}$ is volgens de tekening groter dan $x'_{\text{galilei}}$, want de rode stippellijn is langer dan de rode getrokken lijn: ongeveer 1,6 ls versus ongeveer 1,4 ls.

**d** De teller in de formule voor de positie van de lorentztransformatie is hetzelfde als de galileitransformatie (daardoor is $x'$ kleiner dan $x$):

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nieuw in de lorentztransformatie is dat je deelt door een getal dat kleiner is dan 1. De uitkomst voor $x'$ is daardoor wat groter dan in een galileitransformatie, waarbij je dat niet doet.

**e** Deze lijn is getrokken parallel aan de $t'$-as.

**f** Waarnemer A meet 3,3 s, waarnemer B ongeveer 2 s. Minder dus.

**g** Er wordt in de teller van de formule van de lorentztransformatie iets van $t$ afgetrokken om $t'$ te krijgen. Weliswaar wordt ook nog gedeeld door een getal kleiner dan 1, maar al met al is de uitkomst kleiner dan $t$.

De formules van de galileitransformatie volgen uit die van de lorentztransformatie als $v$ klein is vergeleken met de lichtsnelheid $c$. In dat geval kun je overal waar in de lorentztransformatie een factor $\frac{v}{c}$ voorkomt deze op 0 stellen. Je krijgt dan weer gewoon de galileitransformaties.

Dat klopt ook wel met het diagram, want als $v$ klein is, zijn de assen maar een heel klein beetje gedraaid en zijn de afstanden die je langs de $x$-as en de $x'$-as meet bijna gelijk en dat geldt ook voor de tijden langs de $t$-as en de $t'$-as.

## Onthoud!

- In de nieuwe theorie van Einstein is zowel de positie als de tijd van een gebeurtenis verschillend voor waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen.
- Een bewegende waarnemer heeft in een ruimtetijddiagram een andere plaats-as en een andere tijdas dan een stilstaande waarnemer.
- Met de lorentztransformatie worden coördinaten van het ene referentiestelsel vertaald in coördinaten van het andere referentiestelsel.

## Opdrachten

**25** Absoluut of relatief?
In de oude en de nieuwe theorie zijn verschillende zaken absoluut dan wel relatief.
Vul de tabel in door op de juiste plekken ‘relatief’ of ‘absoluut’ te noteren.

| | Galilei – Huygens – Newton | Lorentz – Einstein |
|---|---|---|
| positie | | |
| tijd | | |
| snelheid | | |
| lichtsnelheid | | |

**26** Diagram aflezen
Gebruik bij deze opdracht figuur 17.
Hierna worden coördinaten gegeven. Lees steeds af wat de coördinaten zijn die gelden voor de andere waarnemer.

**a** $x = 0$ ls; $t = 0$ s
**b** $x = 2$ ls; $t = 2$ s
**c** $x = 2$ ls; $t = 1$ s
**d** $x = 1$ ls; $t = 2$ s
**e** $x' = 0$ ls; $t' = 0$ s
**f** $x' = 2$ ls; $t' = 2$ s

**27** Lorentztransformatie
Bereken de waarden van $x'$ en $t'$ voor de volgende gevallen:

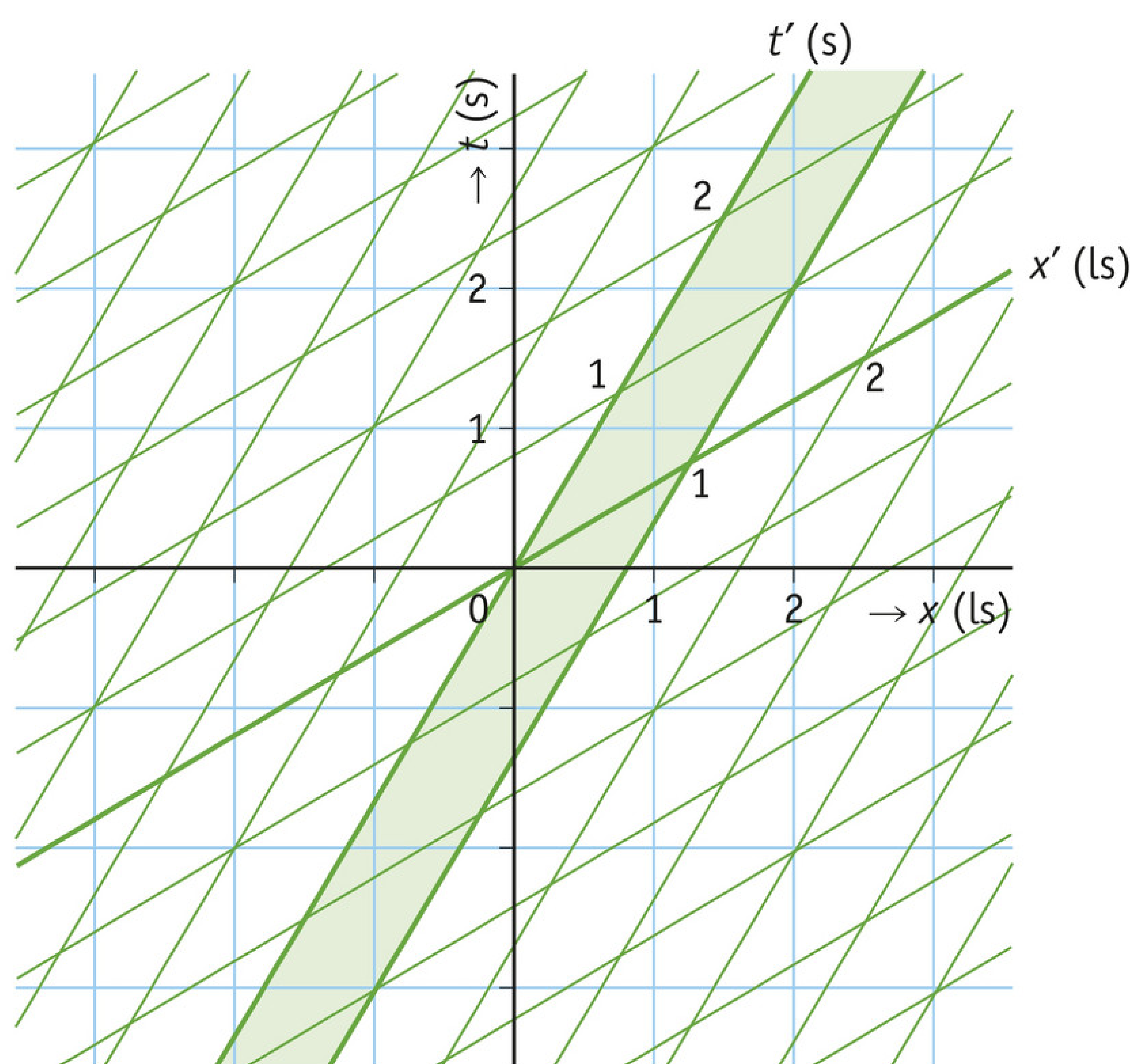
**a** $x = 0$ ls; $t = 0$ s
**b** $x = 2$ ls; $t = 2$ s
**c** $x = 2$ ls; $t = 1$ s
**d** $x = 1$ ls; $t = 2$ s
**e** Stemmen de berekeningen van opdracht a, b, c en d overeen met de bepaling van $x'$ en $t'$ voor deze waarden in figuur 17?

**28** Lengtekrimp in diagram
In figuur 18 zie je een ruimtetijddiagram.

**a** Bepaal hoe snel het groene stelsel beweegt ten opzichte van het zwarte stelsel.

De groene strook stelt een enorme meetlat voor.

**b** Met welk stelsel beweegt deze lat mee?
**c** Wat is de lengte van deze meetlat volgens een waarnemer in dit stelsel, uitgedrukt in lichtseconden?
**d** Hoe groot is die lengte, uitgedrukt in kilometer?
**e** Bepaal in het diagram de lengte van de meetlat zoals een waarnemer in het andere stelsel die waarneemt.
**f** Bereken met behulp van je antwoord op opdracht a de waarde van $\gamma$.
**g** Leg uit of de antwoorden van opdracht e en f overeenstemmen.




▲ **figuur 18** ruimtetijddiagram met meetlat

**29** Diagram tekenen

In ruimtetijddiagrammen kun je posities, tijden, lengten en tijdsduren aflezen.

**a** Teken een ruimtetijddiagram voor twee waarnemers A en B. B beweegt met snelheid $0{,}6 \cdot c$ ten opzichte van A.

**b** Teken als een balk een meetlat van lengte 1 ls in het stilstaande stelsel.

**c** Bepaal de lengte van deze meetlat zoals waargenomen door waarnemer B.

**+30** Kleine snelheden, kleine hoeken

De hoek waarover de assen naar binnen draaien in een ruimtetijddiagram als figuur 15, is meestal heel klein.

**a** Hoeveel graden draaien de assen als de ene waarnemer wegrent van de andere met een snelheid van 3,0 m $s^{-1}$? Tip: als je de hoek uitdrukt in radialen en de hoek is klein,

dan geldt: $\tan \alpha \approx \alpha$, $\sin \alpha \approx \alpha$ en $\cos \alpha = \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)} \approx \sqrt{(1 - \alpha^2)} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha^2$

Bekijk nu een straaljager met een snelheid van 300 m $s^{-1}$. Reken met een afmeting van het ruimtetijddiagram van 10 cm bij 10 cm. Een punt op de $t'$-as bevindt zich dan op je papier op 10 cm hoogte op een bepaalde afstand naar rechts.

**b** Bereken of dat stukje naar rechts meer of minder dan een micrometer groot is.

**c** Bij welke snelheid is het stukje naar rechts 1,0 mm groot?

**31** Galilei versus Lorentz

In figuur 8 zijn de nieuwe assen na een galileitransformatie getekend voor een waarnemer die in dezelfde richting als het licht beweegt. In figuur 15 is hetzelfde gebeurd, maar nu voor een lorentztransformatie. Beschouw nu een waarnemer die met snelheid $\frac{1}{3}c$ in tegenovergestelde richting beweegt als het licht.

**a** Teken het diagram voor de bijbehorende galileitransformatie.

**b** Teken het diagram voor de bijbehorende lorentztransformatie.

**32** Dimensie

In elke vergelijking hoort het linkerlid dezelfde eenheid te hebben als het rechterlid, ook bij de lorentztransformatie.

**a** Leg met een eenhedenbeschouwing uit dat in de formules voor $x'$ en $t'$ de noemer dimensieloos is.

**b** Leg uit dat in de formule voor $t'$ beide termen in de teller dezelfde eenheid hebben.

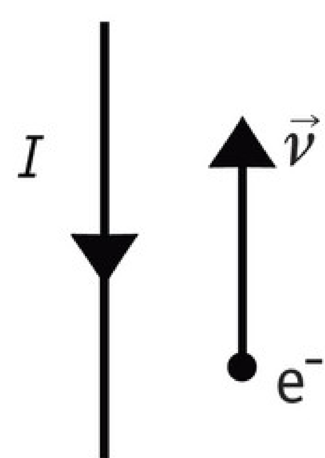
# 5 Magnetisme, massa en licht

In deze paragraaf leer je:
- uitleggen dat wat voor de ene waarnemer een magnetisch veld is, voor een andere waarnemer een elektrisch veld kan zijn;
- uitleggen hoe je kunt inzien dat een ten opzichte van jou bewegend voorwerp een grotere massa heeft dan hetzelfde voorwerp dat stilstaat;
- uitleggen waarom licht alleen met de lichtsnelheid kan bewegen.

De beschrijving van bewegingen uit de vorige paragraaf is fundamenteel belangrijk, maar in de praktijk alleen van belang bij snel bewegende deeltjes of satellieten. Toch reiken de consequenties van de relativiteit verder dan deze bijzondere situaties waarbij tijdrek en lengtekrimp een rol spelen. Er is een relatie met magnetisme, met het verband tussen massa en kinetische energie van deeltjes, en met de eigenschappen van licht.

## Magnetisme

De manier waarop je magnetische effecten ziet, hangt af van het referentiestelsel waarin je je waarnemingen doet. Dat wordt geïllustreerd door het volgende voorbeeld. In een bepaalde stroomdraad bewegen de elektronen omhoog, de stroom is dus omlaag (figuur 19). Een los elektron beweegt, parallel aan de draad, ook omhoog en met dezelfde snelheid als de elektronen in de draad. Op het elektron werkt de lorentzkracht ten gevolge van het magnetisch veld $B$ rond de draad. De grootte daarvan is $F_L = B \cdot q \cdot v$ en de richting is naar de draad toe.



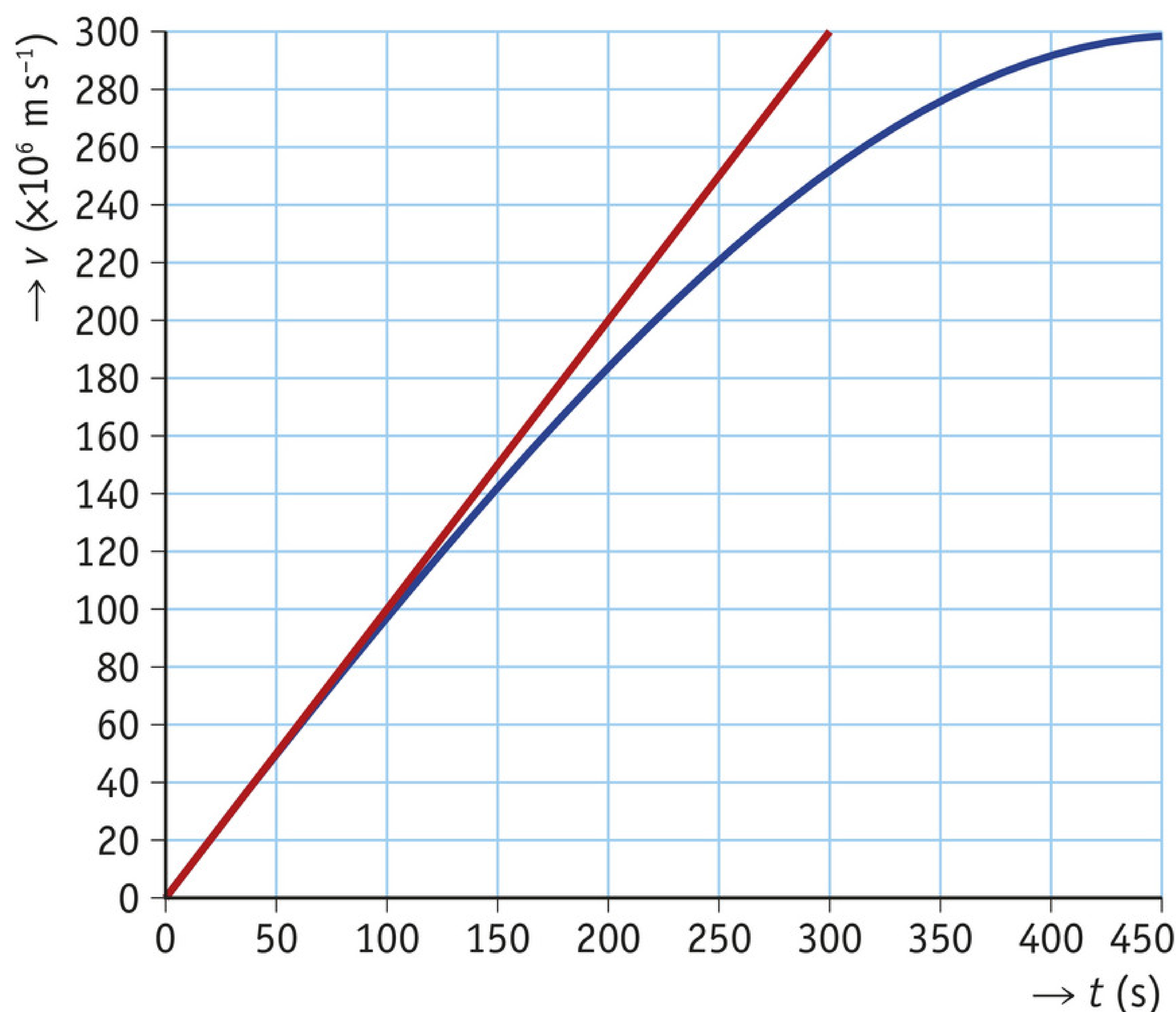

▲ **figuur 19** links een stroomdraad waarin de stroom omlaag loopt; rechts een bewegend elektron

Vanuit het elektron beschouwd lijkt de situatie anders. In het meebewegende referentiestelsel is de snelheid van het elektron gelijk aan nul. Als je nu de formule voor de lorentzkracht gebruikt, is de uitkomst gelijk aan nul! Dat kan niet het eind van het verhaal zijn. Het kan niet zo zijn dat er in het ene stelsel een aantrekkende kracht is en in het andere stelsel niet. Ofwel beide waarnemers zien het elektron naar de draad toegaan, ofwel ze zien dat allebei niet.

De oplossing van deze paradox zit erin dat een voorwerp krimpt als het ten opzichte van jou beweegt. Het losse elektron ziet *geen* lengtekrimp voor de elektronen in de draad, want die bewegen met het losse elektron mee. Maar vanuit het elektron gezien beweegt het positieve metaalrooster van de draad naar beneden met snelheid $v$. Dat is dus *wel* gekrompen en … heeft daardoor een grotere ladingsdichtheid, meer lading per volume, dan de elektronen. Het losse elektron ziet in zijn referentiestelsel de draad dus als positief geladen. En die positieve draad trekt het elektron aan! Zo wordt een magnetisch effect dat de ene waarnemer ziet (er is een stroomsterkte, daardoor een magneetveld, daardoor een lorentzkracht) tegelijkertijd een elektrisch effect voor een andere waarnemer (de draad is positief geladen en trekt het negatieve elektron aan).

## Massa, energie en impuls

Ook de massa die je aan een voorwerp toekent, hangt af van de snelheid waarmee dat voorwerp ten opzichte van jou beweegt. Als je op een voorwerp voortdurend een constante kracht uitoefent, neemt de snelheid toe. De steilheid in een $(v,t)$-diagram is de versnelling, die wordt gegeven door $a = \frac{F}{m}$. Dat is de steilheid van de rechte lijn in figuur 20.




▲ **figuur 20** Het wordt steeds moeilijker een deeltje meer snelheid te geven.

Als de snelheid sterk toeneemt, blijft die versnelling echter niet constant. De maximale snelheid die je in welke situatie dan ook in het heelal kunt waarnemen is namelijk de lichtsnelheid. De grafiek moet wel steeds minder steil worden, aangezien de snelheid niet voorbij die limietwaarde kan. Als de snelheid van het voorwerp heel dicht bij de lichtsnelheid is gekomen, is de steilheid van de grafiek heel klein. Maar de kracht die wordt uitgeoefend is nog steeds constant. Dat betekent dat de massa van het snelle deeltje toeneemt. Die veranderende massa wordt aangegeven met $m'$. Als je een voorwerp ziet bewegen met een grote snelheid is de $m'$ in $a = \frac{F}{m'}$ dus heel groot. De massa die je waarneemt hangt af van hoe snel je het voorwerp ziet bewegen.

Dat is het kwalitatieve beeld. De formule die erbij hoort, is:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot m$$

Hierin is $m$ de **rustmassa**: dat is de waarde van de massa die iemand die met dezelfde snelheid meebeweegt met het voorwerp zal meten. $m'$ is de waargenomen massa van een voorwerp dat ten opzichte van de waarnemer beweegt. Een ten opzichte van jou bewegend voorwerp reageert alsof het zwaarder is dan een ten opzichte van jou stilstaand voorwerp. De massa $m'$ is verschillend voor verschillende waarnemers. Dat zie je doordat er een $v$ in de formule voorkomt.
Je kunt de massa $m'$ met de constante $c^2$ vermenigvuldigen. Je krijgt dan een grootheid met de dimensie Nm, die de energie $E$ wordt genoemd. Er geldt dus: $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$. Een waarnemer die

meebeweegt met het voorwerp meet de **rustenergie** $E = m \cdot c^2$. De extra energie ten opzichte van de rustenergie noem je de kinetische energie $E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$. De waarde hiervan is dus afhankelijk van welke waarnemer over de energie rapporteert, net als de waarde van het verband $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ in de klassieke mechanica. Maar het verband $E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$ is anders voor grote snelheden.

## Licht

Als je uitgaat van de formule $E = \gamma \cdot m \cdot c^2 = \dfrac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, kun je drie dingen opmerken:

- Als een deeltje met een rustmassa $m$ zou bewegen met de lichtsnelheid, wordt de noemer van de formule voor de energie $\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = 0$, en delen door 0 wordt oneindig. Dus een deeltje met een massa die groter is dan 0 *kan niet met de lichtsnelheid bewegen*. Daarvoor zou een oneindige hoeveelheid energie nodig zijn. Je zou een constante kracht over een oneindig lange afstand moeten uitoefenen, omdat je steeds langzamer de lichtsnelheid nadert. De arbeid is dan oneindig groot. Die energie kan nooit worden geleverd.
- Toch kan er wel energie worden getransporteerd met de lichtsnelheid. Licht heeft duidelijk energie: je kent zonnepanelen, fotosynthese, je weet dat een fossiele brandstof een vorm van opgeslagen zonne-energie is. Je voelt de zon op je huid. Voor licht weet je dat $v = c$. Dat kan alleen als ook $m = 0$; dan staat er in de formule voor de energie $\dfrac{0}{0}$ en dat is niet gedefinieerd (dus niet oneindig). Alle deeltjes die bewegen met de lichtsnelheid, zoals fotonen, hebben dus rustmassa nul.
- Die laatste constatering geldt ook andersom: als een deeltje rustmassa nul heeft, kan het alleen met de lichtsnelheid energie transporteren. Want anders is de uitkomst van $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$ gelijk aan nul.

**Onthoud!**

- Als een deeltje een lorentzkracht ondervindt doordat het een snelheid heeft in een magneetveld, ervaart het in zijn ruststelsel een elektrische kracht.
- De massa van een ten opzichte van jou bewegend voorwerp zie je als $\gamma \cdot m$, met $m$ de rustmassa.
- De kinetische energie is gelijk aan: $E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$
- Deeltjes met rustmassa ongelijk aan nul bewegen langzamer dan de lichtsnelheid.
- Deeltjes met rustmassa nul bewegen met de lichtsnelheid, deeltjes die met de lichtsnelheid bewegen hebben rustmassa nul.

## Opdrachten

**33** Massa en energie
In de oude en de nieuwe theorie zijn verschillende zaken absoluut dan wel relatief. Vul het schema aan door op de juiste plekken 'relatief' of 'absoluut' te noteren.

| | Galilei – Huygens – Newton | Lorentz – Einstein |
|---|---|---|
| massa | | |
| kinetische energie | | |

**34** Relatief magnetisme
**a** Leg uit hoe je de richting van de lorentzkracht in figuur 19 bepaalt.
**b** Leg uit hoe je aan de formule voor de lorentzkracht op een geladen deeltje kunt zien dat die lorentzkracht relatief is, dus voor verschillende waarnemers een verschillende grootte heeft.

In het voorbeeld van figuur 19 geldt dat de lorentzkracht $F_L = B \cdot q \cdot v$ groter is als de snelheid van het elektron groter is. Vanuit een stelsel dat meebeweegt met het elektron gezien, zal het magnetisch effect eruitzien als een elektrische aantrekking.
**c** Leg uit dat ook dit effect groter is bij een grotere snelheid.
**d** Leg uit of magnetische effecten groter, kleiner of gelijk zouden zijn als de lichtsnelheid veel kleiner zou zijn.

**35** Relativistische massa
De grafiek van figuur 20 is gegenereerd met het computermodel in figuur 21. Vul aan wat op de puntjes moet staan.

| modelvergelijkingen | startwaarden |
|---|---|
| `Meff := M/…(1-(v/c)^2)`<br>`a := F/Meff`<br>`v := v + a * dt`<br>`t := t + dt` | `t := 0`<br>`dt := 0.0001`<br>`v := 0`<br>`F := 1E6`<br>`M := 1`<br>`c := 3E8` |

▲ **figuur 21** model met relativistische massa

**36** Een beroemde formule
Zowel in de klassieke theorie als in de relativistische theorie neemt de energie van een materiedeeltje toe als de snelheid toeneemt.
**a** Leg uit hoe je dat aan de formules ziet.
**b** Teken de grafiek van de klassieke kinetische energie als functie van de snelheid.
**c** Leg uit wat de totale energie $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$ van een deeltje wordt volgens een waarnemer die meebeweegt met een deeltje.
**d** Teken de grafiek van de relativistische kinetische energie als functie van de snelheid.
**e** Bepaal vanaf welke snelheid het verschil tussen de klassieke en de relativistische waarde van de kinetische energie groter is dan 1%. Tip: maak een grafiek van het gevraagde verschil, gedeeld door de klassieke waarde.

Voor lage snelheden geldt: $\gamma \approx 1 + \dfrac{v^2}{2c^2}$

**f** Vul dit in $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$ in en leg uit wat de betekenis is van de uitkomst.

**37** Energie omzetten

Een elektron wordt versneld in een deeltjesversneller.

**a** Bereken bij welke snelheid de massa het dubbele is van de rustmassa.

**b** Bereken de snelheid van een elektron dat is versneld door een spanning van 10 V volgens de klassieke formule voor kinetische energie.

**c** Doe dit ook via $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$. Gebruik zo nodig dat voor lage snelheden geldt:

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

**d** Bereken hoeveel spanning je nodig hebt om het elektron een snelheid te geven van $v = 0{,}50 \cdot c$.

**e** Bereken hoeveel spanning je nodig hebt om het elektron tot 99% van de lichtsnelheid op te zwepen.

**f** Leg uit dat voor lage snelheden geldt dat een vier keer zo grote spanning leidt tot een twee keer zo hoge snelheid.

**g** Leg uit waarom dat voor hoge snelheden niet meer zo is.

**+38** Temperatuur

Bij een hogere temperatuur bewegen deeltjes sneller. De absolute temperatuur is evenredig met de gemiddelde kinetische energie van de deeltjes.

Ruud beweert: “Er is een maximale temperatuur, want de snelheid $v$ in $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ is maximaal gelijk aan $c$.”

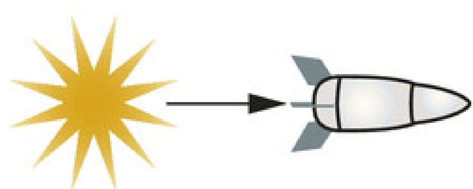
**a** Leg uit waarom Ruuds redenering niet klopt.

**b** Is er een maximaal mogelijke temperatuur als je de juiste formule gebruikt?

## Eindopdracht

**39** Reis naar een ster

Een team van futurologen denkt na over de mogelijkheid meetinstrumenten naar een ster te sturen die op 100 lichtjaar afstand van ons staat. Het zou gaan om een reis van enkele sensoren in een heel lichte capsule. Door vanaf de aarde met een laser tegen het reflecterende oppervlak van de capsule te schijnen, zou de capsule sneller en sneller moeten gaan (figuur 22). Het plan is de sensoren te laten bijhouden wat de positie is door de intensiteit van het zonlicht en de intensiteit van het licht van de andere ster te meten. De eerste waarde wordt steeds kleiner, de tweede steeds groter.





▲ **figuur 22** een capsule die dankzij een laser naar een ster gaat

Iemand maakt bezwaar: “Zo zou je de positie niet kunnen meten, want dat is volgens het relativiteitsprincipe niet mogelijk, dat wist Galilei al!”

**a** Leg uit wat er niet klopt aan dit bezwaar.

Iemand zegt: “Als de capsule eenmaal veel vaart heeft, bijvoorbeeld 90% van de lichtsnelheid, dan botst het licht van de laser er minder hard tegenaan. Als je met 120 km $h^{-1}$ botst tegen iemand die 108 km $h^{-1}$ rijdt, heeft dat ook minder effect dan als die voorligger stilstaat.”

**b** Leg uit waarom dit niet klopt.

Hoewel het licht even hard tegen de capsule blijft botsen, zal de capsule toch een steeds kleinere versnelling krijgen, gezien vanaf de aarde.

**c** Leg dit uit.

In de capsule zit ook een micro-organisme dat tien jaar leeft. Hoewel de afstand 100 lichtjaar is, zou dit organisme de andere ster nog tijdens zijn leven kunnen bereiken. Dat komt door lengtekrimp.

**d** Bereken met welke constante snelheid ten opzichte van de twee stilstaande sterren de capsule moet bewegen opdat het micro-organisme de andere ster nog net tijdens zijn leven bereikt.

**e** Teken een ruimtetijddiagram met een lichtpuls. Teken zowel de assen die een waarnemer A op de aarde gebruikt als de assen die een waarnemer B gebruikt die met 90% van de lichtsnelheid ten opzichte van de aarde beweegt.

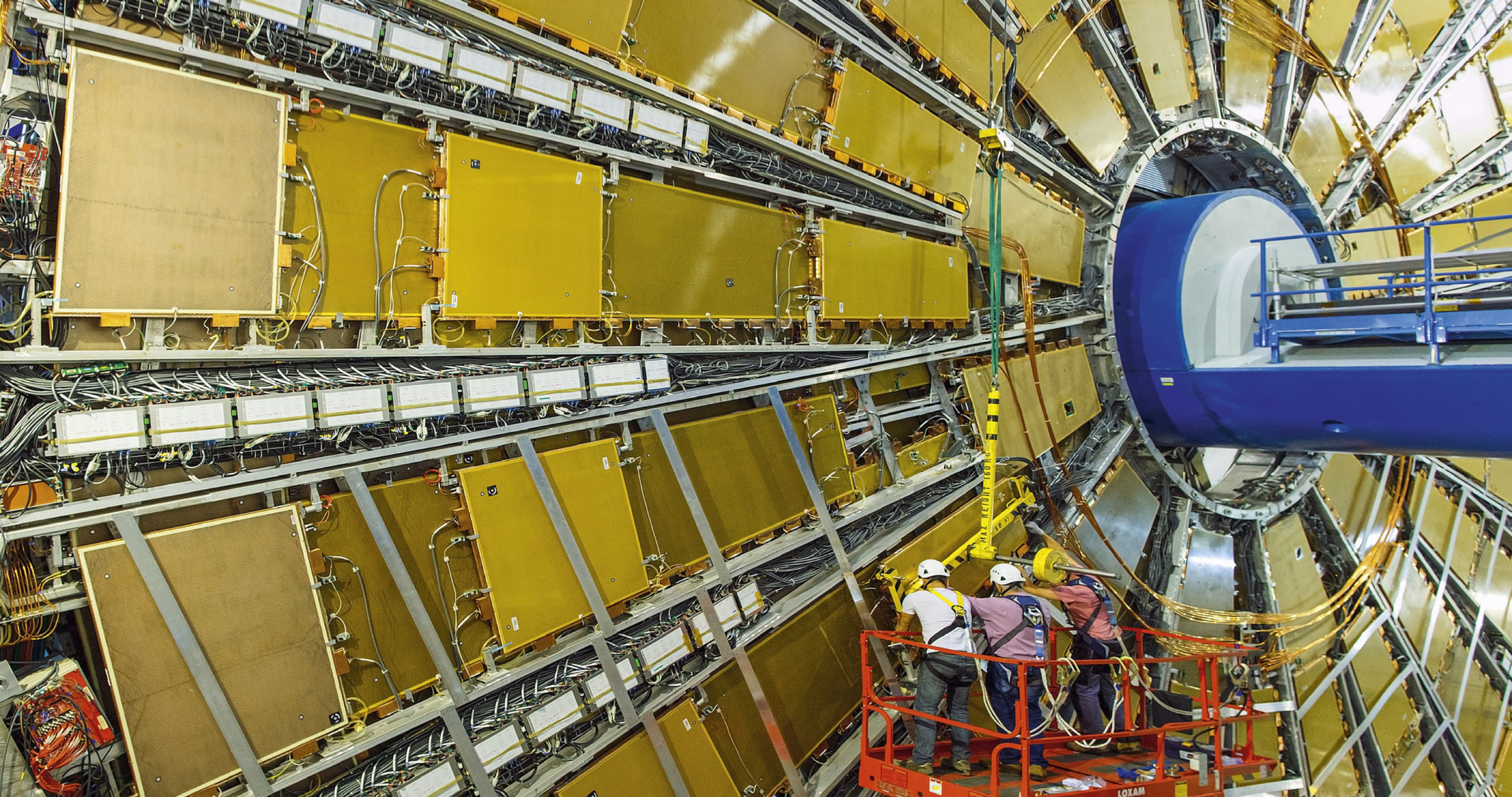
**f** Schets in het diagram de kromme die de beweging van de capsule beschrijft als hij versnelt van 0 tot 0,90$c$.

# 6 Practicum

**ONDERZOEK Recensie**

Er zijn vele honderden populair-wetenschappelijke boeken over relativiteit. Sommige vertellen over tijdrek en lengtekrimp, andere over de ruimtetijd. Er zijn boeken die het raadselachtige benadrukken en er zijn boeken die zakelijker zijn. De persoon Einstein is ook boeiend omdat hij wat excentriek was, omdat hij zijn werk deed toen hij een eenvoudig baantje had, omdat hij zich soms met politiek bemoeide. Boeken, websites en films gebruiken meer of minder wiskunde, gaan wel of niet verder met de algemene relativiteitstheorie … keus genoeg.

De opdracht is een recensie te schrijven van een populair-wetenschappelijk boek over de algemene relativteitstheorie. Daarin vertel je niet alleen wat de essentie van het gekozen boek is, maar ook wat je ervan vindt en waarom.



## HOOFDSTUK 16

# Kern- en deeltjesprocessen

Alles om ons heen is opgebouwd uit elementaire deeltjes. Om deze kleine deeltjes te bestuderen worden de grootste detectoren gebruikt, zoals de *Large Hadron Collider* van CERN in Genève. De elementairedeeltjesfysica die deze deeltjes onderzoekt, bestaat relatief kort. Het eerste elementaire deeltje is eind negentiende eeuw ontdekt: het elektron. Kennis van de wisselwerking tussen elementaire deeltjes leert ons hoe het heelal in elkaar zit, hoe sterren aan hun energie komen en waar kosmische achtergrondstraling vandaan komt. De resultaten van het onderzoek worden onder andere toegepast bij de productie van kernenergie, bij het maken van PET-scans in ziekenhuizen en voor de ontwikkeling van kernfusiereactoren.

### Praktijk



### Theorie



### Maatschappij

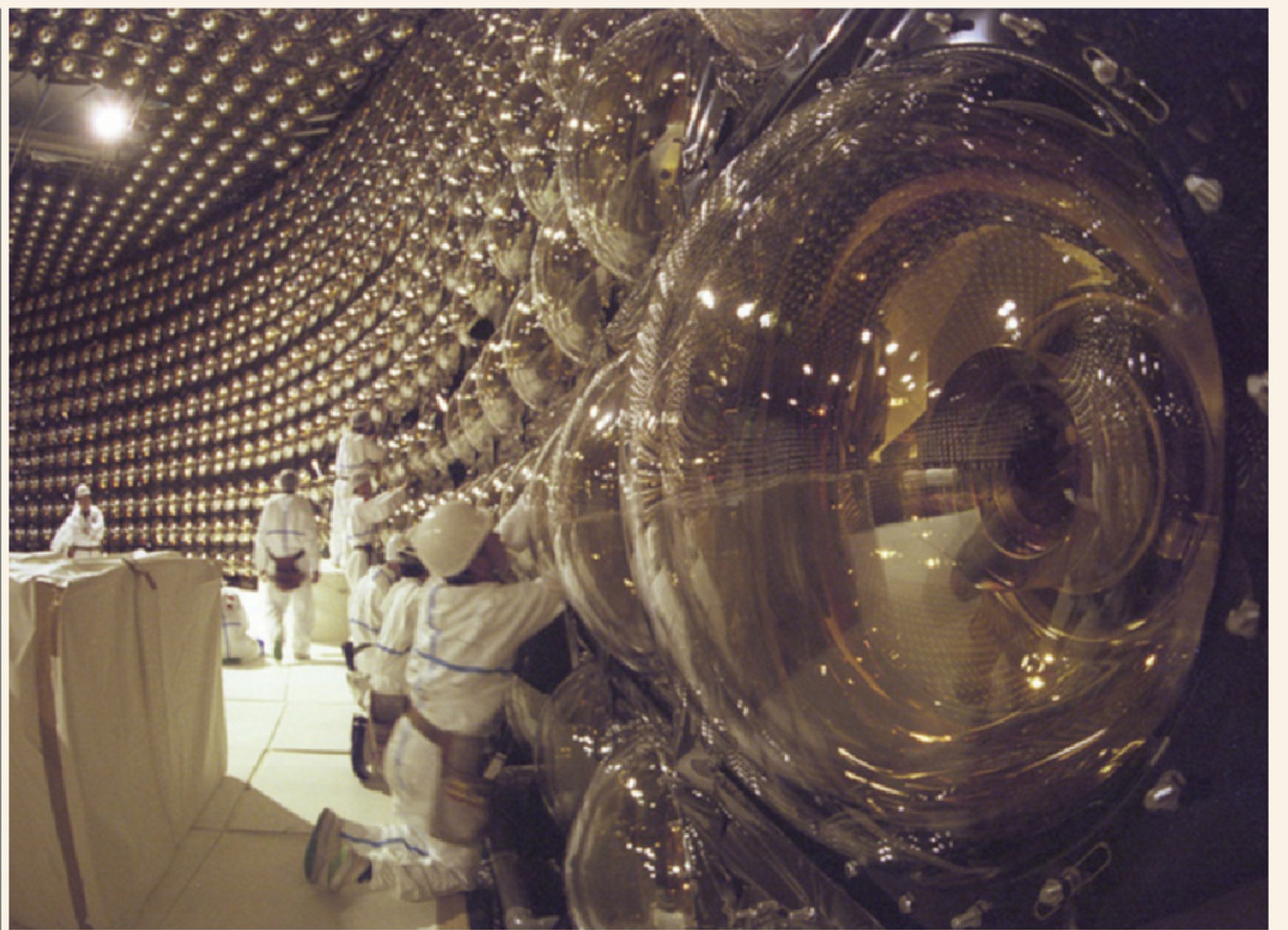


**Maak de online Voorkennistoets voordat je aan dit hoofdstuk begint.**

Praktijk

# Neutrino-astronomie

Elke seconde vliegen er zo'n $10^{12}$ elementaire deeltjes dwars door ons lichaam heen, zonder dat we er iets van merken. Deze mysterieuze deeltjes heten neutrino's en komen voornamelijk als kosmische straling uit het heelal en van onze zon. Hoe ongrijpbaar neutrino's ook zijn, door ze te detecteren kunnen we via deze deeltjes meer te weten te komen over gebeurtenissen op sterren ver van ons vandaan. In de Middellandse Zee verrijst daarvoor een gigantische neutrinotelescoop: KM3NeT.



## Neutrinotelescopen

Neutrino's zijn elementaire deeltjes (ondeelbaar) en hebben geen lading, nauwelijks massa en maar zelden interactie met andere deeltjes. Neutrino's blijken een onschatbare bron van informatie over zowel de structuur van het heelal, als over elementaire deeltjes en hun wisselwerking. Neutrino's worden dus gebruikt voor onderzoek naar de heel grote én de heel kleine wereld. Hiervoor worden steeds grotere detectoren gebouwd. Deze detectoren, of neutrinotelescopen dragen illustere namen als Super Kamiokande (beeld naast introtekst), IceCube en KM3NeT. Het woord 'telescoop' lijkt vreemd: de detectoren kijken niet omhoog, maar juist omlaag en bevinden zich in oude mijnen, onder het ijs of in de oceaan. Zo kan er geen ruis van andere deeltjes optreden, want alleen neutrino's zijn in staat om door te dringen tot deze kilometers diepe plaatsen.

De neutrino's die de aarde bereiken komen van verschillende bronnen. Ze komen bijvoorbeeld vrij bij de kernfusieprocessen die in de zon plaatsvinden. Ook sterren die aan het eind van hun leven exploderen, zogenoemde supernova's, zenden in korte tijd grote hoeveelheden elektromagnetische straling en materie uit, waaronder grote hoeveelheden neutrino's. Zo'n ster wordt korte tijd even helder als het hele sterrenstelsel waar hij deel van uitmaakt.
In 1987 werd met optische en röntgentelescopen een supernova waargenomen (figuur 1). Deze was zelfs met het blote oog te zien. Het bleek echter dat neutrinodetectoren al drie uur voor deze waarnemingen een neutrinopiek zagen. De neutrino's arriveerden dus eerder dan de fotonen! Dat wil niet zeggen dat neutrino's sneller gaan dan het licht, maar ze kunnen, in tegenstelling tot fotonen, ongehinderd het 'puin' van de supernova verlaten. De theorie voorspelt dat het inderdaad ongeveer drie uur duurt voordat de fotonen zich een weg

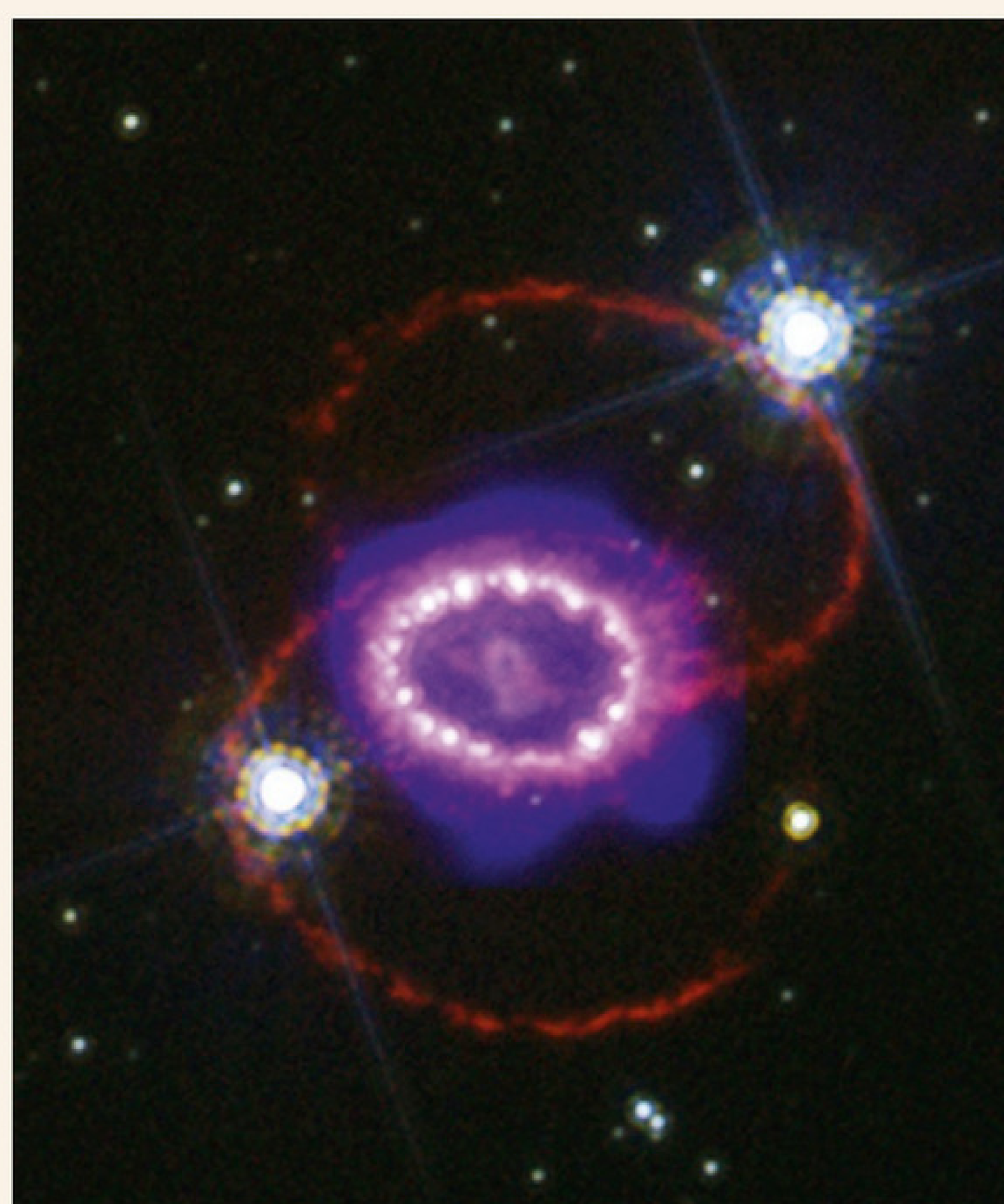
naar buiten hebben gebaand, wat dus door de metingen werd bevestigd. De supernova uit 1987 is waargenomen met zogenoemde *multi-messenger astronomy*, waarbij heel verschillende signalen worden gecombineerd, in dit geval elektromagnetische straling en neutrino's. Deze neutrinosignalen worden tegenwoordig gezien als aankondiging van een op handen zijnde supernova; andere telescopen krijgen een waarschuwing en kunnen zich op tijd naar de juiste plaats aan de hemel richten.

## Wolfgang Pauli

In 1930 waren er nog maar twee subatomaire deeltjes experimenteel aangetoond: het proton en het elektron. In dat jaar postuleerde de Oostenrijkse natuurkundige Wolfgang Pauli (1900–1958) een nieuw deeltje, zoals Mendelejev zestig jaar eerder nieuwe scheikundige elementen veronderstelde op basis van zijn periodiek systeem. Dat nieuwe deeltje is nu bekend als het neutrino.
De aanleiding voor Pauli's voorspelling was het al langer bekende bètaverval, waarbij een radioactieve kern een elektron uitzendt. Daarbij bleek dat het elektron niet altijd evenveel energie meekreeg: het leek of er energie verloren ging. Pauli stelde in 1930 voor dat er naast een elektron een ander, nog onbekend, deeltje vrijkomt met het ontbrekende deel van de energie. Hij voorspelde ook enkele eigenschappen: het had geen elektrische lading en de massa was nul of in elk geval zeer klein vergeleken met de elektronmassa. Bovendien zou het nauwelijks wisselwerken met andere deeltjes.

## Het eerste neutrino betrapt

Pauli had gelijk dat het neutrino moeilijk is waar te nemen, maar onmogelijk bleek het niet. In 1956, 26 jaar na zijn veronderstelling, lukte het de Amerikaanse natuurkundigen Clyde Cowan (1919–1974) en Fred Reines (1918–1998) het neutrino waar te nemen. Als de interactie van neutrino's met andere materie zo zwak is, zoals Pauli had voorspeld, dan was er volgens Reines maar één oplossing: heel veel neutrino's maken, een heel grote detector gebruiken en lang genoeg wachten. Cowan en Reines bouwden hun detector vlakbij de kerncentrale van Savannah River (South Carolina, VS). Door de kernreacties in de nabijheid zouden elke seconde $5 \cdot 10^{13}$ neutrino's per vierkante centimeter terechtkomen op hun detector. Wat ze hoopten te zien, was het omgekeerde van bètaverval: een neutrino wordt ingevangen door een proton, waarbij een neutron en een positron (een positief geladen elektron) worden gevormd. Door de annihilatie van positronen met elektronen en de wisselwerking van neutronen met cadmiumchloride in de detector ontstaan gammafotonen, die gedetecteerd worden (figuur 2).

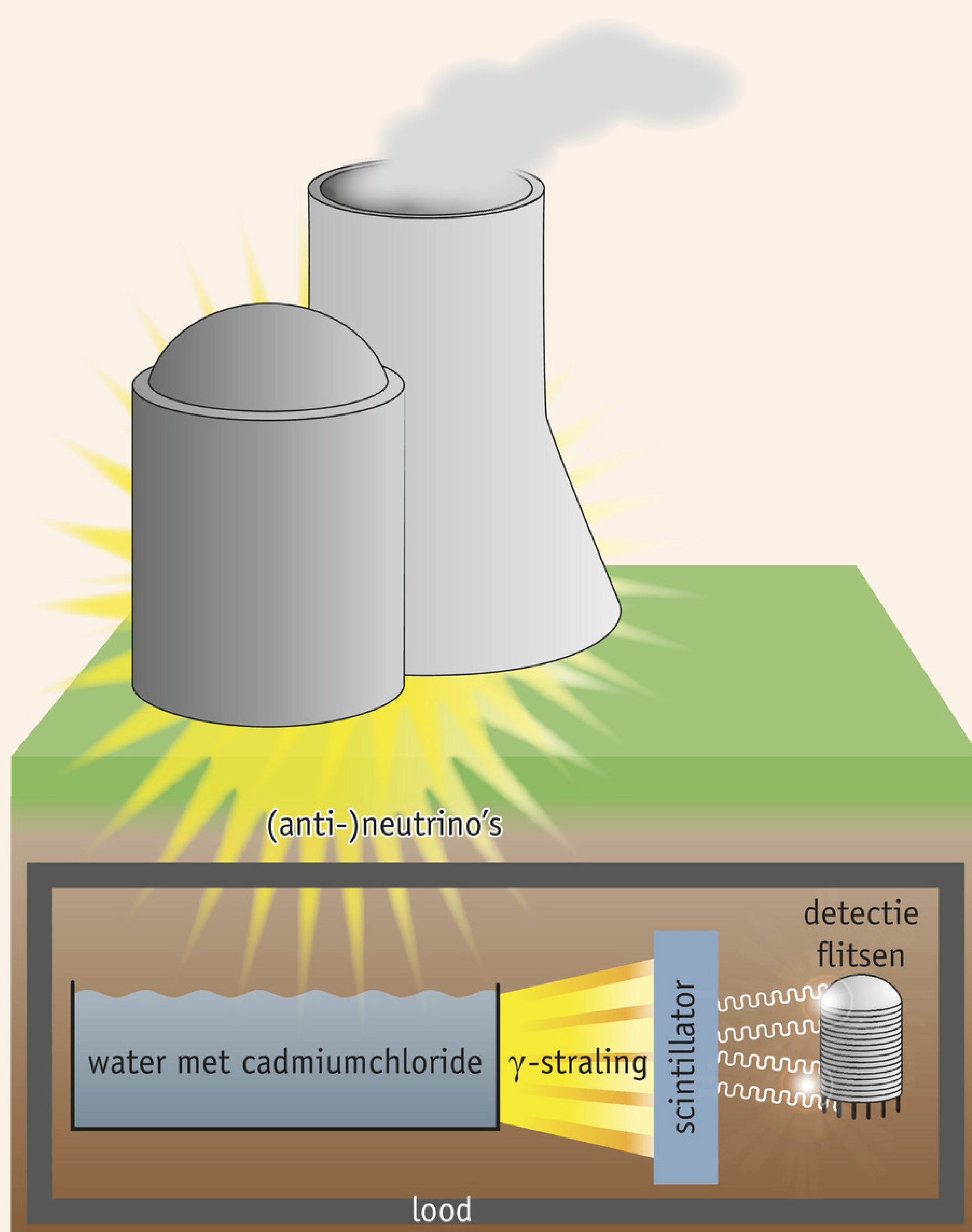


▲ **figuur 1** gecombineerde optische en röntgenopname van de overblijfselen van supernova 1987A

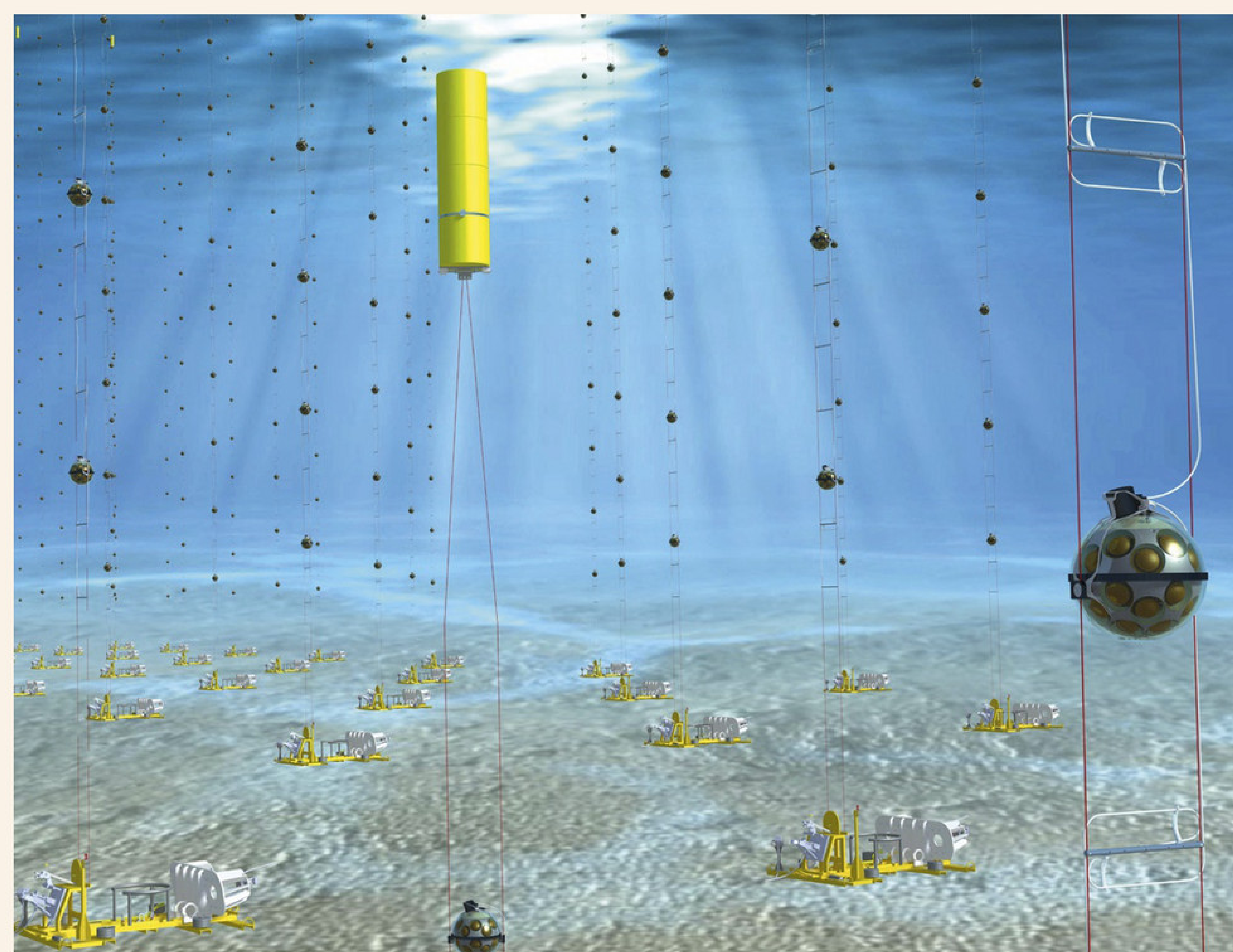
Neutrino-interacties zijn echter zo zeldzaam, dat ze volkomen wegvallen tussen alle andere interacties. De zwakke interactie van het neutrino, biedt paradoxaal genoeg ook de oplossing. Cowan en Reines bedachten dat alle oninteressante deeltjes kunnen worden afgeschermd door meters dik steen, beton en lood. De neutrino's hebben hier geen last van en worden doorgelaten.
Na vijf maanden meten vonden de onderzoekers vijf keer zo veel neutrinoachtige interacties wanneer de kernreactor aanstond, als wanneer de reactor uitstond, waarmee het neutrino definitief was aangetoond. In 1995 ontving Reines de Nobelprijs voor het waarnemen van het neutrino. Voor Cowan kwam de prijs te laat: hij overleed in 1974.

## KM3NeT

Na de experimentele bevestiging van het neutrino zijn er verschillende neutrinodetectoren gebouwd, bijvoorbeeld in oude mijnen of in het ijs van Antarctica. In de Middellandse Zee is tussen 2006 en 2008 de Antaresdetector gebouwd. De locatie in de Middellandse Zee is veel beter bereikbaar dan die op Antarctica en een detector op het noordelijk halfrond kan de zuidelijke sterrenhemel onderzoeken. De diepe wateren zorgen bovendien voor voldoende afscherming tegen zonlicht en kosmische straling. De Antares detector heeft laten zien dat het technisch haalbaar is om in een bewegende zee nauwkeurig en voldoende neutrino's te detecteren. Best knap, want hoewel er geen zonlicht doordringt in de diepe Middellandse Zee, zorgen radioactief verval van kalium-40 in het zeewater en bioluminescentie ervoor dat er ruim tien miljoen keer zo veel fotonen worden gedetecteerd als er ontstaan ten gevolge van neutrino's.




▲ **figuur 2** schematische weergave van de opstelling van Cowan en Reines



▲ **figuur 3** Tekening van KM3NeT: de lijnen zijn verankerd aan de zeebodem. De bollen zijn de digitale optische modules die lichtpulsjes detecteren.

KM3NeT is de opvolger van Antares: groter en beter. De naam verwijst naar het volume dat de detector na voltooiing in 2023 inneemt: enkele kubieke kilometers. KM3NeT bestaat uit twee detectoren op verschillende locaties die elk een ander doel hebben. De ene detector wordt een echte neutrinotelescoop die heel precies kan achterhalen waar de kosmische neutrino's vandaan komen. De andere neutrinodetector gaat fundamenteel onderzoek doen. Er blijken namelijk *drie* soorten neutrino's te zijn. Volgens de huidige theorie van elementaire deeltjes hebben deze neutrino's geen massa. Maar het is al duidelijk dat dat niet klopt. Er is echter geen betere theorie beschikbaar. KM3NeT gaat de verhouding van de massa's van de verschillende neutrino's bepalen. Ook moet deze detector het raadsel oplossen waarom er in het heelal veel meer materie is dan antimaterie. De detectoren bestaan uit een groot aantal verticale lijnen, elk met achttien digitale optische modules, of DOMs (figuur 3). Elk van die DOMs bevat weer 31 fotomultiplicatorbuizen (PMTs, de Engelse afkorting). Een PMT gebruikt het foto-elektrisch effect voor het omzetten van een foton in een elektrische puls. De lijnen hebben een lengte van honderden meters en zijn verankerd aan de zeebodem op een diepte van 3,5 km. Als een neutrino een interactie aangaat met een deeltje in het zeewater, dan ontstaan er geladen deeltjes. Die bewegen sneller door het water dan licht zou doen. Daarbij ontstaat kenmerkende, blauwachtige straling, tsjerenkovstraling genoemd. Verschillende DOMs detecteren die straling en met behulp van deze signalen kan worden berekend waar het neutrino vandaan kwam.

Waarschijnlijk had Pauli niet kunnen vermoeden dat het deeltje dat hij postuleerde, ruim negentig jaar later zo'n grote rol zou gaan spelen in astrofysisch onderzoek.

## Opdrachten

Bestudeer eerst de theorie van dit hoofdstuk voordat je de volgende opdrachten uitvoert.

**1** Ontdekking van het neutrino
Als in de detector van Cowan en Reines een neutrino wisselwerkt met een proton, ontstaan een neutron en een positron. Als het positron vervolgens annihileert met een elektron, ontstaan twee kenmerkende gammafotonen.

- **a** Schrijf de twee hier beschreven deeltjesvergelijkingen op.
- **b** Leg uit waarom het proces waarbij het antineutrino wordt ingevangen ‘omgekeerd bètaverval’ wordt genoemd.

De gammafotonen die vrijkomen na annihilatie van het positron verliezen hun energie aan moleculen in de scintillator. Deze moleculen verliezen vervolgens weer energie door het uitzenden van uv-fotonen.

- **c** Beschrijf het proces waardoor de moleculen fotonen uitzenden.
- **d** Geef een beredeneerde schatting van het maximum aantal uv-fotonen dat per uitgezonden positron vrijkomt.
- **e** De uv-fotonen worden gemeten in een fotomultiplicatorbuis. Leg uit wat een fotomultiplicatorbuis is en geef beknopt de werking weer.

Cowan en Reines besloten ook de neutronen te meten die vrijkomen bij omgekeerd bètaverval. Daarvoor vulden ze het detectorvat met water en een verbinding van cadmium-108, dat neutronen kan invangen. De kern die daarbij wordt gevormd, zendt gammastraling uit.

- **f** Toon met een berekening aan dat de energie van het gammafoton dat wordt uitgezonden na het invangen van het neutron, maximaal 9 MeV bedraagt. Ga in je berekening uit van één gammafoton.

**2** Supernova 1987A
De ster die overging in supernova 1987A stond op een afstand van $168 \cdot 10^3$ lichtjaar van de aarde. Bij de explosie zijn in de orde van grootte van $10^{58}$ neutrino’s uitgezonden. Kamiokande II heeft daarvan slechts twaalf neutrino’s gedetecteerd in een tijdspanne van 12 s.

- **a** Bereken hoeveel van de uitgezonden neutrino’s per vierkante meter oppervlakte op aarde terechtkwamen. Ga ervan uit dat de neutrino’s gelijkmatig in alle richtingen zijn uitgezonden.

Kamiokande II is een cilindervormig vat met een hoogte en diameter van 16 m.

- **b** Bereken hoeveel neutrino’s er maximaal op de detector terecht zijn gekomen.
- **c** Bereken het percentage van de neutrino’s dat door de detector werd waargenomen.
- **d** Leg op basis van je antwoord op opdracht c uit via welke fundamentele kracht de neutrino’s wisselwerking hebben met andere deeltjes.

**3** Kosmische straling
Sommige deeltjes in kosmische straling zijn afkomstig van nog onbegrepen puntbronnen in het heelal. Deze zenden onder andere neutrino’s en protonen uit. Protonen met een energie boven ongeveer $4 \cdot 10^{19}$ eV hebben interactie met fotonen uit de kosmische achtergrondstraling en kunnen niet gemeten worden. Neutrino’s hebben daar geen last van.

- **a** Leg uit wat kosmische achtergrondstraling is.
- **b** Leg uit waarom neutrino’s geen last hebben van kosmische achtergrondstraling.
- **c** Noem een andere eigenschap van kosmische neutrino’s waardoor de bron beter te bepalen is dan wanneer protonen worden gedetecteerd.
- **d** Noem een belangrijk probleem bij het waarnemen van neutrino’s.

Protonen ‘verdwijnen’ na interactie met kosmische achtergrondstraling via het volgende proces:



$p + \gamma \rightarrow n + \pi^+$

- **e** Ga, voor zover mogelijk, na dat dit proces geen behoudswetten schendt.

KM3NeT detecteert deze kosmische neutrino’s. Dat gaat via een aantal tussenstappen. Eerst moet het neutrino via interactie met een atoomkern een lepton creëren.

- **f** Geef de zes mogelijke reactievergelijkingen die daarbij kunnen optreden.

KM3NeT kijkt naar beneden om deze neutrino’s te meten.

- **g** Leg uit dat er geen andere deeltjes ‘van onder’ kunnen komen.

# 1 Subatomaire deeltjes detecteren

In deze paragraaf leer je:
- verschillende soorten subatomaire deeltjes benoemen;
- het verschil beschrijven tussen een elementair en een subatomair deeltje;
- uitleggen wat het betekent dat deeltjes wisselwerken;
- verschillende methoden beschrijven waarmee subatomaire deeltjes kunnen worden gedetecteerd.

Een molecuul kun je niet zien met een lichtmicroscoop, laat staan de atomen waaruit het molecuul is opgebouwd. Kernen zijn nog tienduizenden malen kleiner dan atomen en blijken zelf opgebouwd uit nog kleinere deeltjes: subatomaire deeltjes. Dit hoofdstuk gaat over die subatomaire deeltjes, hoe wetenschappers ze kunnen meten en hoe ze met elkaar wisselwerken.

▶ **EXPERIMENT 1** Elektroscoop (onderzoekspracticum)

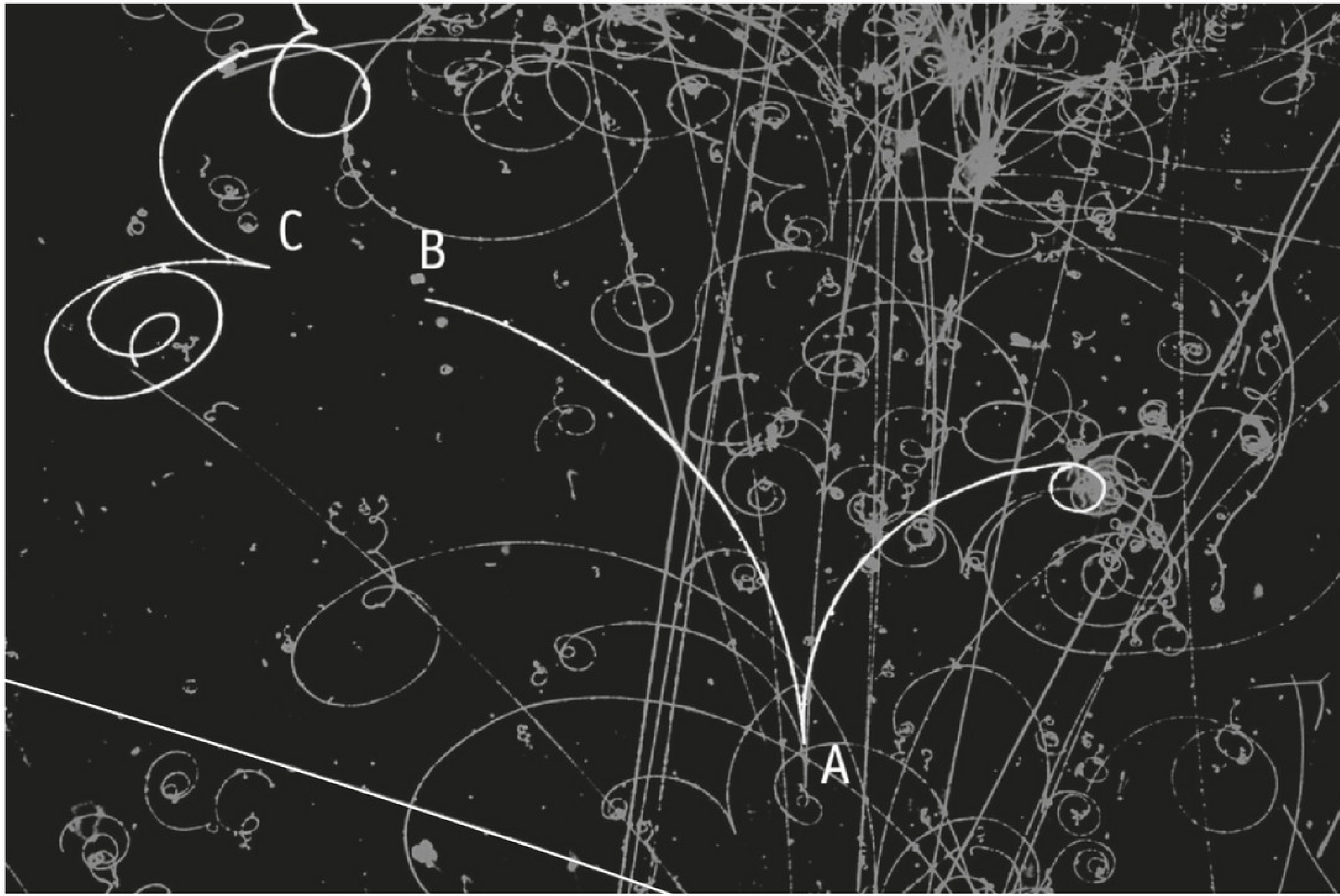
## Subatomaire deeltjes betrapt

De term subatomair deeltje is een verzamelnaam voor alle deeltjes kleiner dan een atoom.
Je kent al alfa-, bèta- en gammadeeltjes (α-, β- en γ-deeltjes). Het bètadeeltje, of elektron, is een **elementair deeltje**: het is niet verder opgebouwd uit andere deeltjes. Het alfadeeltje is een samengesteld deeltje en dus niet elementair: het bestaat uit twee protonen en twee neutronen. Ook protonen en neutronen blijken geen elementaire deeltjes. Het gammadeeltje, een foton met hoge energie, is een elementair deeltje met een speciale rol: het is een wisselwerkingsdeeltje, waarover je in paragraaf 5 meer kunt lezen. Je komt in dit hoofdstuk ook nog deeltjes tegen die niet elementair zijn, want samengesteld, maar ook niet echt subatomair, want de deeltjes zijn niet in een atoom te vinden. Daarom wordt in dit hoofdstuk in plaats van de term ‘subatomair deeltje’ simpelweg ‘deeltje’ gebruikt.
Om te weten wat de eigenschappen zijn van deeltjes moet je ze kunnen detecteren en identificeren. Het is onmogelijk ze met een lichtmicroscoop te zien: een atoom heeft een afmeting in de orde van $10^{-10}$ m, een atoomkern in de orde van $10^{-14}$ m, terwijl een lichtmicroscoop een resolutie heeft van hoogstens $10^{-7}$ m. Gelukkig verraden deeltjes zich doordat ze met andere deeltjes wisselwerken: ze oefenen krachten op elkaar uit en wisselen energie uit. Uit de manier *waarop* ze wisselwerken, kun je achterhalen welke eigenschappen ze hebben.



◀ **figuur 1** Technici aan het werk in ‘Gargamelle’, een bellenvat dat tot 1979 in gebruik was bij CERN.

Geladen en ongeladen deeltjes worden op een verschillende manier waargenomen. Geladen deeltjes laten in verschillende materialen sporen na doordat ze atomen of moleculen ioniseren. Dit kun je zien in een opname van een bellenvat (figuur 1 en 2). In een **bellenvat** bevindt zich een vloeistof die bijna aan de kook is en bij een kleine verstoring lokaal gaat koken. Er ontstaat een spoor van belletjes die de aanwezigheid van het deeltje verraden (figuur 2). Door het bellenvat in een sterk magneetveld te plaatsen veranderen geladen deeltjes van richting en kun je hun snelheid en lading bepalen. Het bellenvat wordt tegenwoordig niet meer gebruikt, maar het geeft wel inzicht in het principe hoe deeltjes worden onderzocht.




▲ **figuur 2** opname van een bellenvat waarin een aantal sporen wit is gemaakt ter verduidelijking

## Sporen analyseren

Je ziet in figuur 2 een grote hoeveelheid sporen van deeltjes. Een aantal sporen is wit gemaakt en er zijn drie posities aangegeven:

A Hier zijn een positron en een elektron ontstaan. Het positron is het **antideeltje** van een elektron: de massa is hetzelfde, maar de lading is tegengesteld. De creatie van een elektron-positronpaar wordt kortweg **paarproductie** genoemd en is mogelijk door de wisselwerking van een foton met de kern van een atoom. Zo kun je weten dat er recht onder A een foton het bellenvat is binnengekomen. Ten gevolge van het magneetveld gaat het positron naar links en het elektron naar rechts.

B Het positron annihileert met een elektron, waarbij twee nieuwe fotonen zijn ontstaan (niet zichtbaar). Dit proces wordt ook in een PET-scan gebruikt (hoofdstuk 10).

C Uit een van de twee fotonen ontstaat opnieuw een elektron-positronpaar.

De aanwijzing dat er bij A en C een elektron en een positron zijn ontstaan, vind je in de kromming van de paden van de deeltjes. Uit de linkerhandregel en het feit dat het magneetveld het papier in is gericht, volgt dat positieve deeltjes door de lorentzkracht linksom afbuigen en negatieve deeltjes rechtsom (hoofdstuk 8). Het valt op dat de straal van de banen snel kleiner wordt; vooral na C kun je dat goed zien. De deeltjes verliezen dus snel energie. Ook veranderen elektronen en positronen soms abrupt van richting. Dat komt doordat ze een relatief kleine massa hebben: een kleine kracht zorgt al voor een grote verandering van richting.

**Voorbeeldopgave 1**

Een elektron beweegt met snelheid $v$ in een magneetveld met sterkte $B$. Het beschrijft daarbij een cirkel met een straal $r$.
Leid een verband af voor de snelheid van het elektron uitgedrukt in $B$ en $r$.

*Uitwerking*
Formules:

$$F_{mpz} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$F_L = B \cdot q \cdot v$$

De middelpuntzoekende kracht wordt geleverd door de lorentzkracht. Er geldt dus:
$F_{mpz} = F_L$

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = B \cdot q \cdot v$$

$$m \cdot v = B \cdot q \cdot r$$

$$v = \frac{B \cdot q \cdot r}{m}$$

De grootte van de lading van een elektron is $e$. Uit $q = e$ volgt:

$$v = \frac{B \cdot e \cdot r}{m}$$

Deze formule geldt zolang het elektron veel langzamer gaat dan de snelheid van het licht, dus $v \ll c$. Zulke deeltjes worden niet-relativistisch genoemd, omdat ze kunnen worden beschreven met de mechanica van Newton.

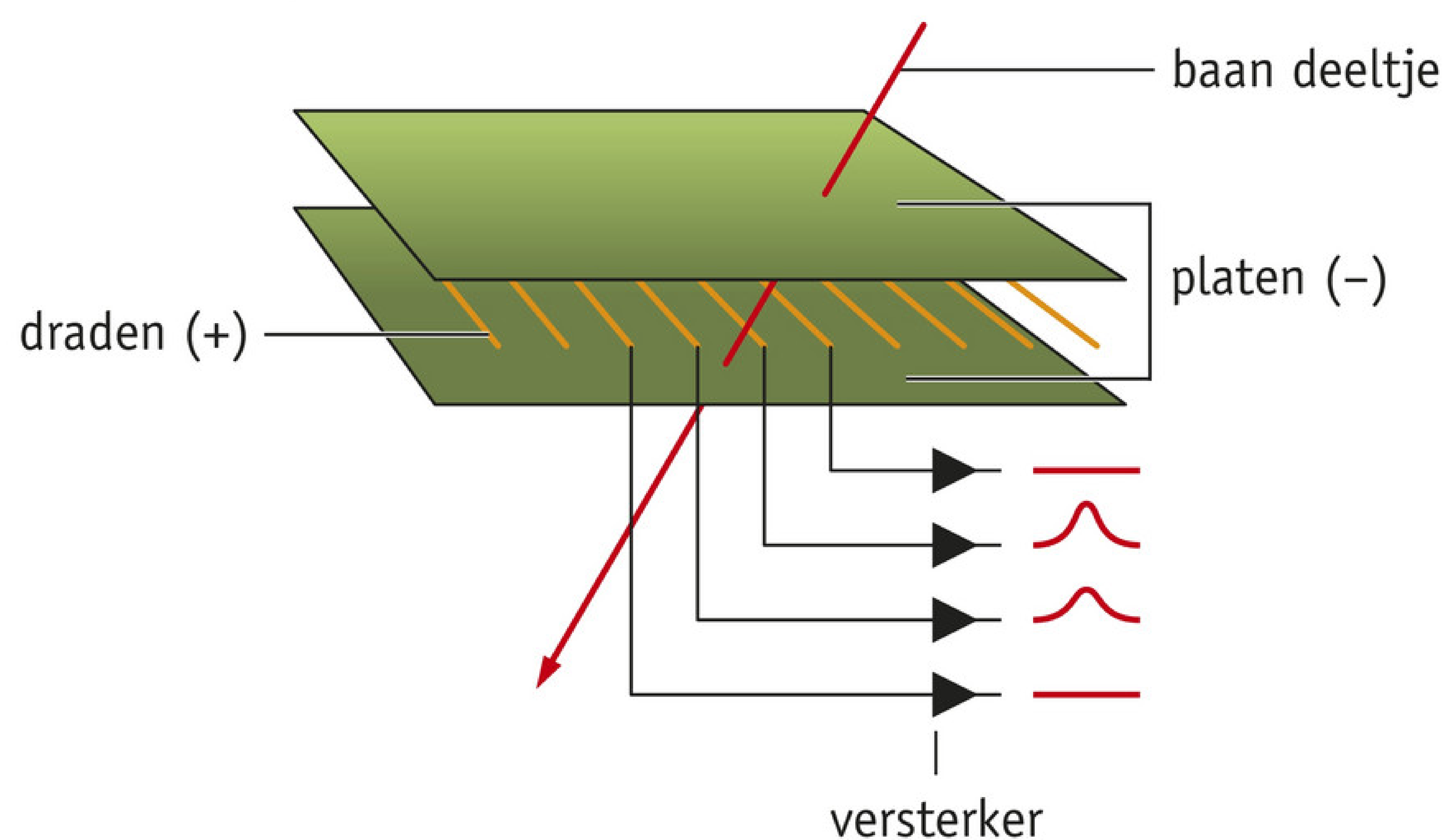
In voorbeeldopgave 1 zie je hoe je de snelheid van een geladen deeltje kunt bepalen. Die methode werkt alleen voor geladen deeltjes die niet te snel gaan. Heel snelle deeltjes worden nauwelijks afgebogen waardoor het moeilijk is de straal te bepalen. In moderne detectoren worden daarom **calorimeters** gebruikt: deze absorberen zo goed mogelijk alle energie van het deeltje. Als je de energie en de massa van een deeltje weet, kun je de snelheid berekenen.

## Deeltjes zonder lading waarnemen

Fotonen wisselwerken via elektromagnetische krachten. Als fotonen te weinig energie hebben om een elektron-positronpaar te creëren (zoals in figuur 2), kun je ze waarnemen met behulp van het foto-elektrisch effect. Zowel bij paarproductie als bij het foto-elektrisch effect verdwijnen de fotonen door de interactie.
In tegenstelling tot fotonen verliezen geladen deeltjes (zoals alfa- en bètadeeltjes) geleidelijk hun energie tot ze stilstaan. Dit is precies waarom in hoofdstuk 10 bij alfa- en bètastraling werd gesproken van dracht en bij gammastraling van halveringsdikte.
Andere deeltjes zonder lading, bijvoorbeeld neutronen, kunnen niet wisselwerken via elektromagnetische krachten. Sommige ongeladen deeltjes zijn instabiel en verraden zich doordat ze in geladen deeltjes vervallen. Om de eigenschappen van stabiele ongeladen deeltjes te onderzoeken, kun je ze laten botsen op atoomkernen. Hierbij ontstaan deeltjes die je wel kunt detecteren.

## Moderne methoden

Het bellenvat levert mooie plaatjes op: veel tastbaarder worden deeltjes niet. Maar het heeft ook nadelen: hoe beslis je bijvoorbeeld op welk moment je een foto maakt en hoe analyseer je die vervolgens? Tegenwoordig wordt daarom gebruikgemaakt van andere typen detectoren: dradenkamers, halfgeleiderdetectoren en scintillatietellers.
Een **dradenkamer** is een met gas gevulde ruimte met daarin een groot aantal parallelle draden tussen twee geleidende platen (figuur 3). De draden zijn positief geladen (anode) en de platen negatief (kathode). Wanneer een deeltje een ionisatie veroorzaakt in het gas, worden de vrijgemaakte elektronen aangetrokken door de draden. Ze versnellen hierdoor en ioniseren zo ook andere gasatomen. Het gevolg is een lawine van elektronen die je kunt meten als een stroompuls bij een bepaalde draad. Uit het signaal is af te leiden waar het eerste deeltje binnenkwam en wat zijn energie was. Meerdere van deze lagen maken het mogelijk de baan van het inkomende deeltje te reconstrueren. De stroompulsen worden automatisch uitgelezen en door een computer geanalyseerd.




▲ **figuur 3** het principe van een dradenkamer

Een **halfgeleiderdetector** gebruikt een vergelijkbaar principe als de lichtgevoelige chip in een fotocamera. Een inkomend deeltje maakt een elektron los. Het aantal elektronen dat zo vrijkomt is een maat voor de hoeveelheid energie die het inkomende deeltje heeft verloren. Zijn positie wordt daarbij nauwkeurig vastgelegd. Het voordeel van dit type detector is dat er minder energie nodig is voor een ionisatie en de kans groter is dat het deeltje gemeten wordt doordat de detector uit een vaste stof bestaat. Door meerdere halfgeleiderdetectoren te gebruiken, kan ook de baan van de deeltjes worden bepaald.

**Scintillatietellers** bevatten een stof, een scintillator, die lichtpulsjes uitzendt wanneer een inkomend deeltje (geladen of ongeladen) erdoor beweegt. De lichtpulsjes ontstaan doordat het deeltje de scintillator in een aangeslagen toestand brengt. Bij terugvallen naar de grondtoestand zendt de scintillator een foton uit met een kenmerkende golflengte (zie ook hoofdstuk 9). Dit foton wordt opgevangen in een fotomultiplicator waar het via het foto-elektrisch effect een elektrische puls veroorzaakt. Hoe meer energie het inkomende deeltje heeft, hoe meer fotonen er worden vrijgemaakt en dus hoe meer elektrische pulsen worden gemeten. Scintillatietellers worden vaak in combinatie met andere detectoren gebruikt om een meting te starten. Ze zijn namelijk zeer gevoelig en snel: je kunt daardoor op het juiste moment een andere detector inschakelen als er een bepaald deeltje langskomt. Het spoor van deeltjes kan minder goed worden bepaald dan bij een halfgeleiderdetector.

## Onthoud!

- Een elementair deeltje is niet verder deelbaar. Alle materie is opgebouwd uit elementaire deeltjes.
- Deeltjes kunnen worden waargenomen doordat ze met andere deeltjes wisselwerken.
- Van geladen deeltjes kan het spoor worden waargenomen met (onder andere) een bellenvat, een dradenkamer of een halfgeleiderdetector. De kromming van de baan van een geladen deeltje in een magnetisch veld geeft informatie over de snelheid, energie of massa van het deeltje.
- De energie van een deeltje kan worden waargenomen met een calorimeter of een scintillatieteller.
- Bij paarproductie worden een deeltje en zijn antideeltje gevormd. Een antideeltje heeft dezelfde massa als het bijbehorende deeltje, maar de lading is tegengesteld.

## Opdrachten

**1** Alfa-, bèta- en gammadeeltje
Alfa-, bèta- en gammadeeltjes hebben verschillende kenmerken.
Maak een tabel waarin je de lading en massa van een alfa-, bèta- en gammadeeltje met elkaar vergelijkt. Gebruik handige eenheden.

**2** Detectiemethoden
Je kunt deeltjes op verschillende manieren detecteren.
Noteer alle methoden, genoemd in deze paragraaf, waarmee je het traject van een geladen deeltje kunt detecteren.

**3** Halveringsdikte en dracht
Fotonen hebben net als alfa- en bètadeeltjes een ioniserend vermogen, maar laten in een bellenvat geen spoor na. Het verschil heeft te maken met de begrippen ‘halveringsdikte’ en ‘dracht’.

**a** Geef van elk van deze begrippen de betekenis.
**b** Geef voor elk van de twee begrippen aan op welke deeltjes ze van toepassing zijn: alfa-, bèta- of gammadeeltjes.
**c** Geef met behulp van de twee begrippen een verklaring voor het feit dat alfa- en bètadeeltjes wel en gammadeeltjes niet als spoor zichtbaar zijn in een bellenvat.

**4** Bellenvatopname
In figuur 2 zijn veel sporen van geladen deeltjes te zien.

**a** Geef twee argumenten waarom het hier om geladen deeltjes moet gaan.

Deeltjes die worden gedetecteerd in een bellenvat hebben (vrijwel) altijd een lading $+e$ of $-e$. Bekijk het witte spoor dat als een bijna rechte schuine lijn in de linkerbenedenhoek loopt. Dit hoort bij een deeltje dat beneden in het midden van de foto het beeld is ingekomen.

**b** Bepaal met behulp van de lorentzkracht of het deeltje een positieve of negatieve lading heeft.
**c** Beredeneer dat het product van massa en snelheid van dit deeltje groot moet zijn.

**5** Snelheid deeltje
In figuur 2 ontstaat in punt A een positron dat in punt B annihileert.

**a** Bepaal met behulp van de figuur de snelheid van het positron. De werkelijke hoogte van figuur 2 is 40 cm. De sterkte van het magneetveld is 2,0 T.

De formule uit voorbeeldopgave 1 om de snelheid te berekenen is alleen geldig voor niet-relativistische deeltjes.

**b** Leg op basis van je antwoord bij opdracht a uit of het elektron in figuur 2 relativistisch beweegt of niet.

**6** Massa bepalen

In voorbeeldopgave 1 is een verband afgeleid voor de snelheid van een geladen deeltje dat in een magneetveld beweegt. Als je ook de kinetische energie van het deeltje weet, kun je hiermee de massa van het deeltje bepalen.

**a** Leg dit uit.

**b** Beredeneer dat het meten van de dracht van een deeltje informatie geeft over de energie die het deeltje had.

De energie van het deeltje volgt dus uit de lengte van het spoor. De baanstraal is een maat voor de impuls van het deeltje.

**c** Leid met behulp van het resultaat van voorbeeldopgave 1 een verband af voor de massa van het deeltje uitgedrukt in de veldsterkte $B$, de elementaire lading $e$, de baanstraal $r$ en de kinetische energie $E_k$.

---

# 2 Deeltjesversnellers

In deze paragraaf leer je:

- uitleggen welke rol deeltjesversnellers en kosmische straling hebben in het onderzoeken van subatomaire deeltjes;
- het verschil uitleggen tussen een circulaire en een lineaire versneller;
- de opbouw van een deeltjesversneller en de gebruikte detectoren beschrijven;
- uitleggen welke krachten tussen kerndeeltjes in de kern werken.

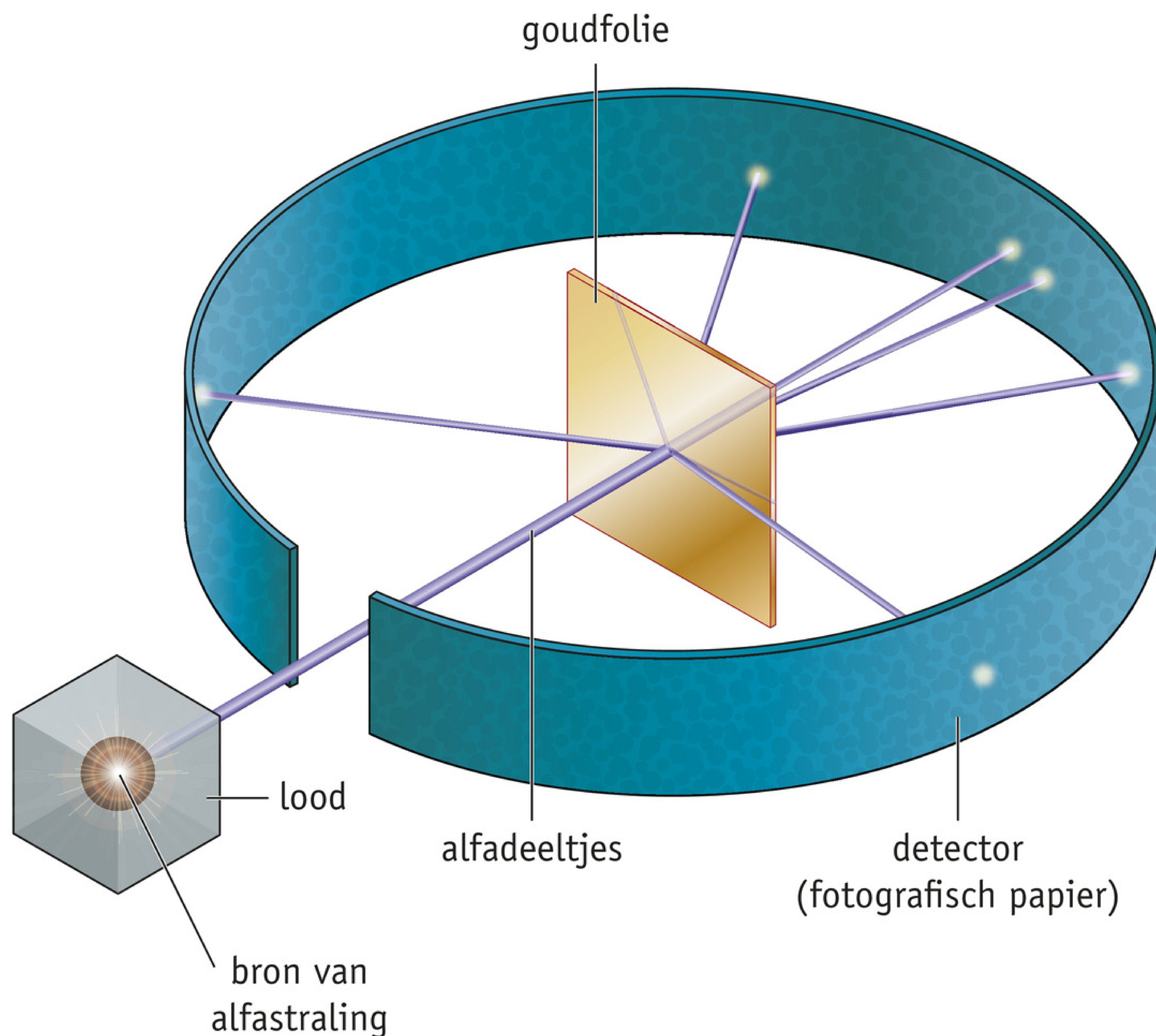
Om meer te weten te komen over de structuur van materie laten natuurkundigen deeltjes met elkaar botsen. Zo is de structuur van het atoom ontdekt, later van de kern en uiteindelijk van protonen en neutronen. Om deeltjes met voldoende energie op elkaar te laten botsen, worden deeltjesversnellers gebruikt. Detectoren meten welke deeltjes er na de botsing vrijkomen.

## Het goudfolie-experiment

Een van de eerste metingen aan de bouw van atomen is het goudfolie-experiment uit 1909, uitgevoerd door Hans Geiger (1882–1945) en Ernest Marsden (1889–1970) onder leiding van Ernest Rutherford (1871–1937). Zij gebruikten een radioactieve bron die alfadeeltjes uitzond in de richting van een stukje goudfolie. Rondom het goudfolie waren fotografische platen geplaatst die vastlegden waar de alfadeeltjes terechtkwamen. Het resultaat verbaasde de onderzoekers: de meeste alfadeeltjes gingen vrijwel rechtdoor en werden slechts een beetje afgebogen, maar sommige schoten onder een grote hoek terug (figuur 4).
Rutherford zei hierover: “Alsof je een kanonskogel op een velletje papier schiet, en die kaatst terug en raakt je.” Uit het goudfolie-experiment concludeerde Rutherford dat het atoom grotendeels leeg is en een massieve kern met een positieve lading heeft.

## Structuur van de kern

Uit de manier waarop de alfadeeltjes in het goudfolie-experiment worden afgebogen, volgt dat de kern van een goudatoom ongeveer $10^{-14}$ m groot is. De meeste alfadeeltjes (die een positieve lading hebben) passeerden de kern op relatief grote afstand en werden een beetje afgebogen door de coulombkracht. Op zeer kleine afstand van de kern, ongeveer $10^{-15}$ m, overheerst een veel sterkere kracht die de **kernkracht** wordt genoemd. De kernkracht is verder onderzocht door protonen met neutronen te beschieten. Omdat neutronen ongeladen zijn, ondervinden ze geen coulombkracht, alleen die kernkracht. Dankzij de kernkracht blijven nucleonen (protonen en neutronen) in een gebonden toestand bijeen. De kernkracht blijkt zelf geen fundamentele kracht te zijn, zoals de elektromagnetische kracht en zwaartekracht dat wel zijn. In paragraaf 5 kun je daar meer over lezen.



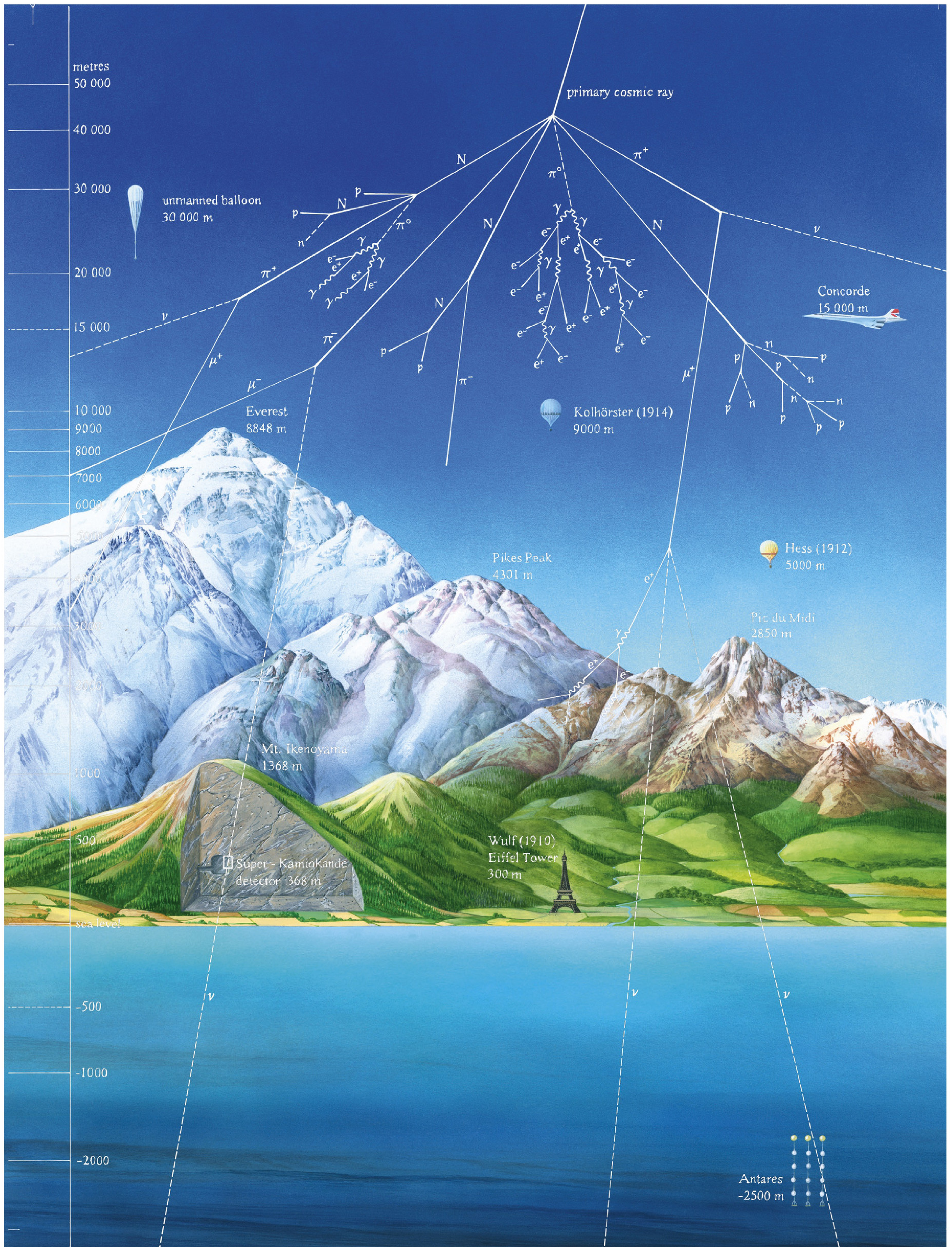

▲ **figuur 4** het goudfolie-experiment

## Kosmische straling

Hoe meer energie je de deeltjes geeft die je op elkaar laat botsen, hoe meer details je kunt waarnemen. Dat zie je duidelijk aan het goudfolie-experiment: de alfadeeltjes moeten voldoende energie hebben om in de buurt van de kern te komen. Een natuurlijke bron van hoogenergetische deeltjes is **kosmische straling**: een verzamelnaam voor alle straling die uit de ruimte komt. Het gaat daarbij om deeltjes uitgezonden door de zon, andere sterren en bijvoorbeeld supernova's (sterexplosies). Dit wordt primaire kosmische straling genoemd, bestaande uit deeltjes met massa, fotonen en neutrino’s. Een **neutrino** is een ongeladen deeltje met een zeer kleine massa. De massieve deeltjes zijn voornamelijk protonen en elektronen en in mindere mate helium-, koolstof- en ijzerkernen.

De primaire kosmische deeltjes wisselwerken met deeltjes in de aardatmosfeer. Na zo’n botsing ontstaat een zogenoemde *shower*: een regen van secundaire kosmische deeltjes (figuur 5). Op aarde kun je dus deeltjes detecteren die direct uit de ruimte afkomstig zijn, of die vervalproducten zijn van botsingen. Het positron en het muon zijn ontdekt door onderzoek van kosmische straling. **Muonen** zijn verwant aan elektronen: ze hebben dezelfde lading en wisselwerken op dezelfde manier, maar hun massa is ruim tweehonderd keer zo groot en ze zijn niet stabiel.

▶ **figuur 5** Een primair kosmisch deeltje veroorzaakt een regen van secundaire kosmische deeltjes.


metres
50 000
40 000
30 000
20 000
15 000
10 000
9000
8000
7000
6000
3000
2000
1000
500
sea level
-500
-1000
-2000
primary cosmic ray
unmanned balloon
30 000 m
Concorde
15 000 m
Everest
8848 m
Kolhörster (1914)
9000 m
Pikes Peak
4301 m
Hess (1912)
5000 m
Pic du Midi
2850 m
Mt. Ikenoyama
1368 m
Super- Kamiokande
detector 368 m
Wulf (1910)
Eiffel Tower
300 m
Antares
-2500 m

Deeltjes in kosmische straling hebben voor natuurkundigen twee belangrijke voordelen: ze zijn gratis verkrijgbaar en hun energie kan heel hoog zijn, wel meer dan $10^{20}$ eV. Ter vergelijking: de energie van de snelste deeltjes die de mens kan produceren, bedraagt $10^{17}$ eV. Kosmische straling heeft ook twee nadelen. De intensiteit van de straling, het aantal deeltjes dat per seconde op aarde terechtkomt, is vrij laag. Een belangrijker nadeel is dat wetenschappers geen enkele controle hebben over de kosmische straling. Vanwege deze nadelen bouwen natuurkundigen deeltjesversnellers.

## Deeltjesversnellers

In een deeltjesversneller worden geladen deeltjes tot hoge snelheden versneld en op elkaar of op vaste doelen geschoten. Het versnellen gebeurt met elektrische velden. Om de deeltjes van richting te laten veranderen, worden meestal magnetische velden gebruikt. Er zijn twee soorten versnellers: lineaire en circulaire. Een voorbeeld van een **lineaire versneller** is die van het Stanford Linear Accelerator Center. De lineaire versneller is in hoofdstuk 8 besproken.
De energie die je aan deeltjes kunt geven, wordt bij een lineaire versneller beperkt door de lengte. Daarom is een ander type versneller ontwikkeld: de **circulaire versneller**. De Large Hadron Collider (LHC) van CERN is zo'n versneller (figuur 6). De LHC loopt door een 27 km lange cirkelvormige tunnel op 100 m diepte. In de tunnel worden in twee afzonderlijke ringen protonen in tegengestelde richting versneld. Op vier posities kunnen de protonen op elkaar botsen. Op die posities staan detectoren om de deeltjes te meten die bij de botsingen vrijkomen.

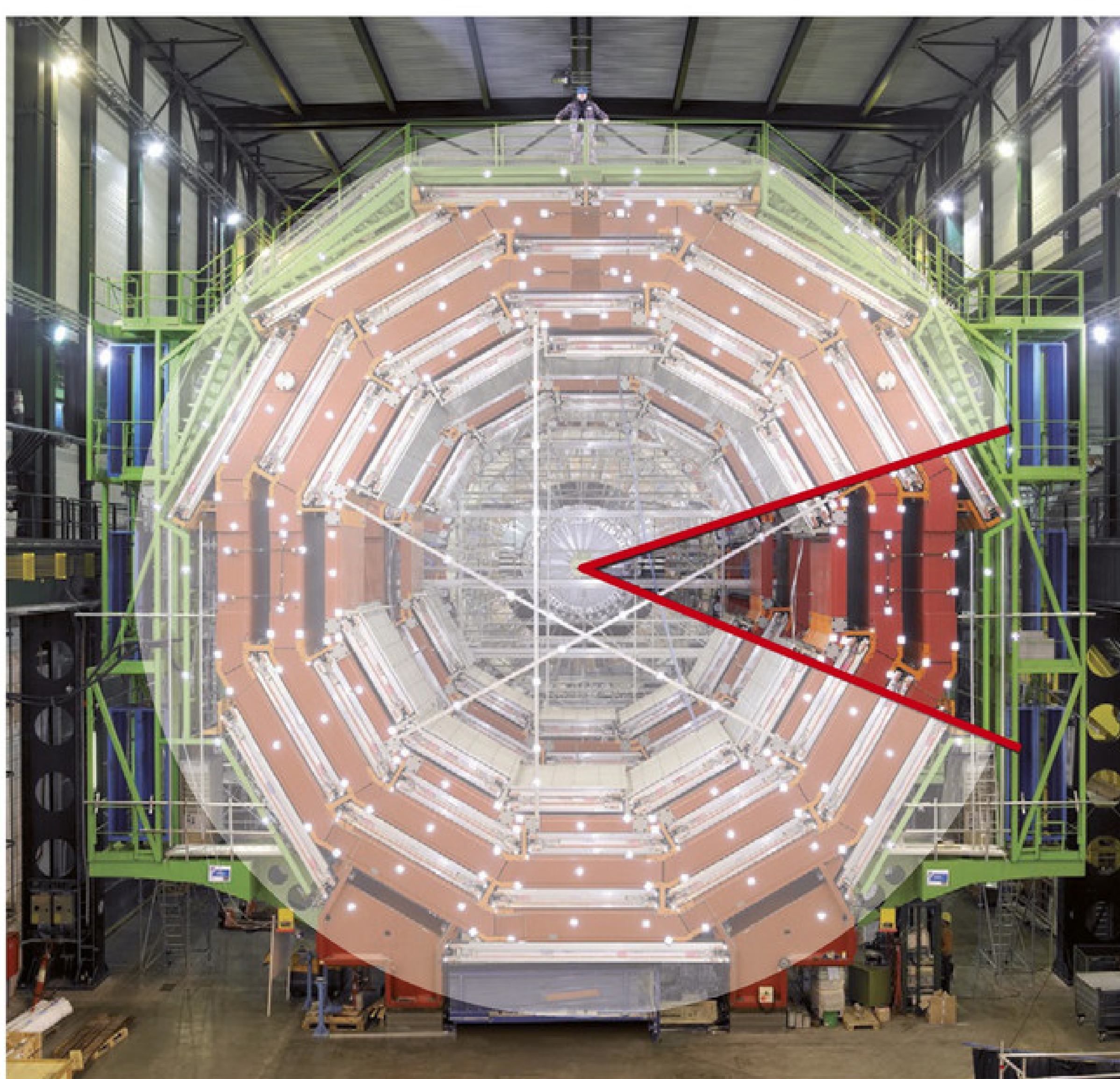


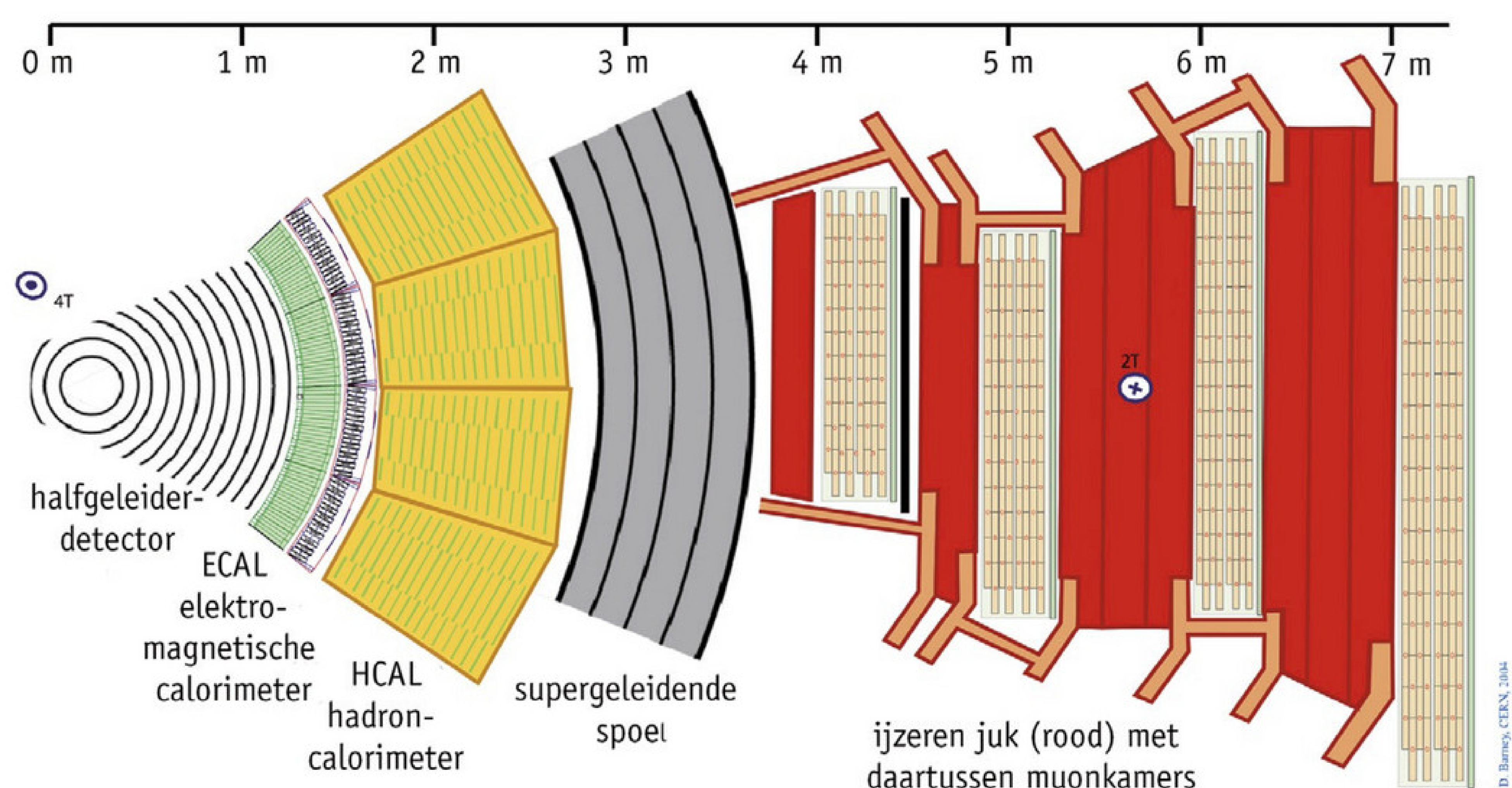

▲ **figuur 6** De LHC ingetekend in een luchtfoto, kijkend in zuidoostelijke richting, met op de achtergrond het meer van Genève en de Zwitserse Alpen. De posities van vier detectoren langs de ring zijn ingetekend.

Het voordeel van een circulaire versneller is dat je de deeltjes elke ronde een grotere snelheid kunt geven. Je hebt wel zeer sterke magneten nodig om de deeltjes in hun baan te houden. Omdat permanente magneten hiervoor veel te zwak zijn, worden elektromagneten gebruikt. De spoelen worden zo ver gekoeld (tot 1,9 K) dat ze supergeleidend zijn en geen elektrische weerstand meer hebben.
Een circulaire versneller heeft wel een nadeel ten opzichte van de lineaire versneller. Geladen deeltjes in een cirkelbaan gaan elektromagnetische straling uitzenden. Hierdoor verliezen ze energie en wordt het steeds moeilijker om de deeltjes verder te versnellen. Dit effect is bij elektronen sterker dan bij protonen, omdat hun massa veel lager is. Daarom worden in de LHC protonen en geen elektronen versneld.

## De werking van een detector

De versneller zorgt voor een botsing, maar vervolgens heb je wel een detector nodig om waar te kunnen nemen wat er in die botsing is gebeurd. Een voorbeeld van zo'n detector is de CMS die zich (in figuur 6) links in de ring van de LHC bevindt. Deze detector is cilindervormig: 21 m lang met een diameter van 15 m (links in figuur 7). Rechts in figuur 7 zie je dat de CMS is opgebouwd uit allemaal verschillende detectoren, elk geschikt om verschillende soorten deeltjes waar te nemen.






▲ **figuur 7** Links de CMS-detector: in het midden vinden de botsingen plaats (let op de technicus die boven op de detector staat); rechts schematisch de opbouw van de detector.

De elektromagnetische calorimeter meet de energie van fotonen en elektronen. De hadron-calorimeter meet de energie van zwaardere, samengestelde deeltjes zoals protonen. Met muonkamers wordt de baan van muonen gereconstrueerd.

**Voorbeeldopgave 2**

Voorspel welk pad een elektron, dat bij een botsing vrijkomt, in de CMS-detector zal volgen.

*Uitwerking*
Een elektron is negatief geladen. Het ontstaat in het midden van de detector en komt dan in de halfgeleiderdetector (figuur 7, rechts). Daar heerst een magneetveld het papier uit (weergegeven door de cirkel met punt). Met de linkerhandregel vind je dat het elektron naar boven afbuigt (naar links als je met het elektron mee reist). Vervolgens komt het de eerste calorimeter binnen. Daar wordt alle energie geabsorbeerd en stopt het spoor.

De opbouw van de CMS is zo gekozen dat fotonen en elektronen niet verder komen dan de elektromagnetische calorimeter. Zwaardere deeltjes (hadronen) verliezen hier maar weinig energie. Deze deeltjes worden gestopt in de hadroncalorimeter. Alleen muonen en neutrino's bereiken de buitenste ring van de detector. Door van al die deeltjes de sporen en hun energieën te bepalen, kun je reconstrueren welke deeltjes bij de botsing in de versneller zijn ontstaan.

## Onthoud!

- Tussen nucleonen (kerndeeltjes) werkt een zeer sterke aantrekkende kracht: de kernkracht. De kernkracht werkt alleen op korte afstanden.
- Kosmische straling bestaat uit verschillende soorten deeltjes die uit de ruimte afkomstig zijn (primaire kosmische straling) of die botsingsproducten zijn van deze deeltjes in de atmosfeer (secundaire kosmische straling). Kosmische straling levert de meest energetische deeltjes voor onderzoek.
- In deeltjesversnellers worden geladen deeltjes tot hoge energie versneld. Er zijn twee typen versnellers: circulaire en lineaire versnellers.
- In deeltjesversnellers laat men deeltjes op elkaar botsen. De botsingsproducten worden in detectoren bestudeerd.

## Opdrachten

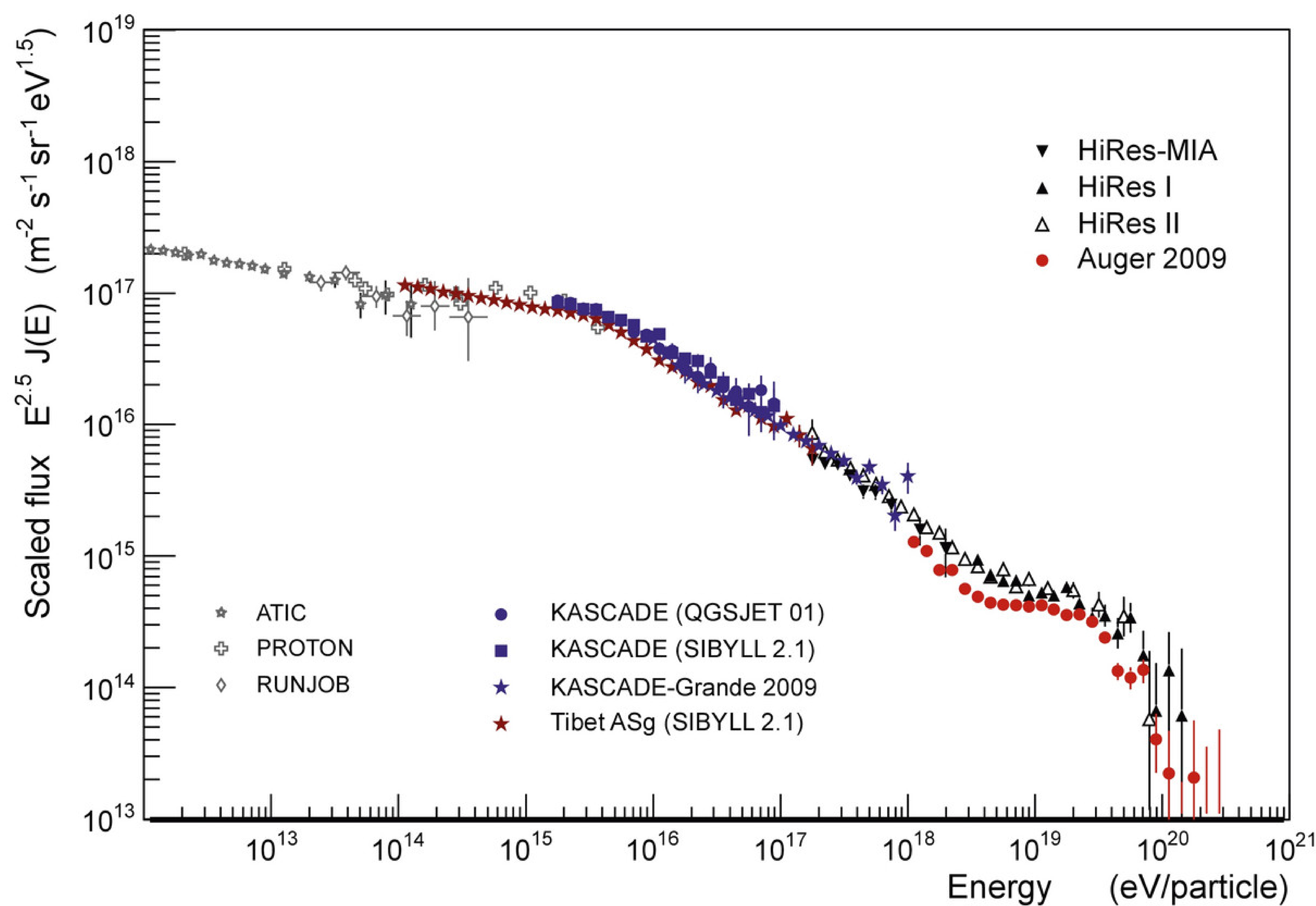
**7** Deeltjesversnellers
Er wordt al aan een volgende versneller gewerkt: de International Linear Collider (ILC). In de ILC worden elektronen (of positronen) in twee aparte lineaire versnellers versneld om vervolgens op elkaar te botsen. Het voordeel van elektronen is dat zij, in tegenstelling tot protonen, elementaire deeltjes zijn. De botsingsproducten zullen dus 'eenvoudiger' zijn.
**a** Noem het voordeel van een lineaire versneller boven een circulaire versneller.
**b** Noem het nadeel van een lineaire versneller.
**c** Leg uit waarom elektronen niet tot hoge energie in een circulaire versneller kunnen worden versneld.

**8** Sporen beschrijven
In voorbeeldopgave 2 is het spoor van een elektron beschreven, zoals het door de CMS wordt waargenomen.
Doe hetzelfde voor een:
**a** muon.
**b** neutron.
**c** proton.
**d** foton.

**9** Kosmische straling
In figuur 8 zie je de verdeling van de energie van kosmische straling.
**a** Welke kosmische deeltjes worden het vaakst waargenomen: die met een lage of die met een hoge energie? Leg je antwoord uit.

De verticale balkjes in figuur 8 geven de meetonnauwkeurigheid weer.
**b** Leg uit waarom de meetonnauwkeurigheid toeneemt bij hogere energie.
**c** Bereken met welke snelheid je een tennisbal ($m$ = 60 g) moet serveren opdat deze evenveel kinetische energie heeft als de deeltjes in de kosmische straling met de hoogste energie.

Stel, je meet de intensiteit van kosmische straling vanuit een luchtballon. Je begint met meten vanaf het aardoppervlak en komt steeds hoger in de atmosfeer.




▲ **figuur 8** Dit diagram toont de verdeling van de energie van kosmische deeltjes. Langs de horizontale as staat de energie (in eV) van de deeltjes. De verticale as geeft een maat voor de hoeveelheid deeltjes per vierkante meter aardatmosfeer.

**d** Beredeneer hoe de intensiteit verandert naarmate je hoger komt. Maak voor je antwoord gebruik van figuur 5.

**10** Afmeting aluminiumkern

Geiger en Marsden gebruikten in hun goudfolie-experiment radium als alfastraler.

**a** Beredeneer op basis van gegevens uit Binas welke isotoop van radium hiervoor het meest praktisch is.

In een vervolgexperiment probeerden ze de afmeting van de atoomkern te bepalen. Ze gingen uit van het volgende model: het alfadeeltje en de kern zijn beide positief geladen bolletjes en het alfadeeltje wordt niet beïnvloed door de elektronen rond de kern.

**b** Leg uit dat de alfadeeltjes informatie geven over de afmeting van de kern, als ze recht op de kern af komen, worden afgeremd en weer terugkomen.

De kinetische energie van de alfadeeltjes wordt bij deze beweging volledig omgezet in potentiële elektrische energie.

**c** Leg uit waarom alfadeeltjes moeten worden gebruikt met een zo hoog mogelijke kinetische energie voor het bepalen van de afmeting van de atoomkern.

**d** Beargumenteer waarom Geiger en Marsden uiteindelijk besloten aluminium te beschieten en niet goud.

De potentiële elektrische energie tussen twee ladingen $q_1$ en $q_2$ die zich op een afstand $r$ bevinden, wordt gegeven door: $E_{el} = f \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r}$

**e** Bereken op basis van energiebehoud een bovengrens voor de straal van de aluminiumkern. Ga uit van alfadeeltjes met een energie van 7,7 MeV.

**f** Vergelijk je antwoord bij opdracht e met de moderne waarde: $r = 3{,}6 \cdot 10^{-15}$ m. Geef een verklaring voor een eventueel verschil.

**11** Structuur van het proton

In de versneller van Stanford, SLAC, is voor het eerst de structuur van het proton ontrafeld. Hiervoor werden elektronen met hoge snelheid op waterstofkernen (protonen) geschoten. De elektronen kregen daarbij een energie van 50,0 GeV.

**a** Reken deze energie om naar een snelheid en toon daarmee aan dat de klassieke mechanica van Newton niet van toepassing is op elektronen met deze energie.

De versneller heeft een lengte van 3,20 km.

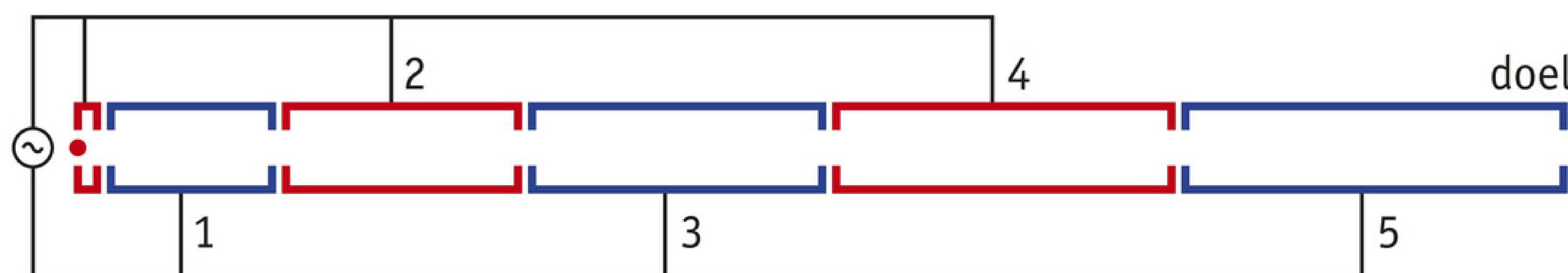
**b** Bereken hoeveel de energie van de elektronen gemiddeld per meter toenam.

Volgens de speciale relativiteit geldt voor de energie van een deeltje: $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$ (hoofdstuk 15). Hierbij is: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, met $v$ de snelheid van het deeltje.

**c** Toon aan dat de elektronen na 1,00 m een snelheid hadden bereikt van 99,9% van de lichtsnelheid.

Lineaire versnellers zoals de SLAC bestaan uit metalen cilinders waarop afwisselend een positieve en een negatieve spanning staat (figuur 9). Tussen elke cilinder worden de elektronen door het elektrische veld versneld. De frequentie waarmee de spanning wisselt, is constant.

**d** Leg op basis van je antwoord bij opdracht c uit dat de metalen cilinders in de eerste meter steeds langer moeten worden, maar daarna dezelfde lengte kunnen hebben.




▲ **figuur 9** het principe van een lineaire versneller

**+12** Elektronen en protonen in de LHC

De hoeveelheid energie die deeltjes in een deeltjesversneller meekrijgen, bepaalt in belangrijke mate welke deeltjes er bij een botsing kunnen worden gevormd.
Een proton en een elektron in een circulaire deeltjesversneller krijgen evenveel kinetische energie en bewegen niet relativistisch ($v \ll c$).

**a** Leg uit welk deeltje de grootste snelheid heeft.

**b** Bereken de verhouding van de snelheden van het elektron en het proton.

Beide deeltjes doorlopen een cirkelbaan met baanstraal $r$.

**c** Bereken de verhouding van de middelpuntzoekende versnelling van het elektron en het proton.

De deeltjes gaan straling uitzenden als gevolg van de versnelling die ze krijgen. Voor het vermogen $P$ van deze straling geldt: $P \sim a^2$, met $a$ de versnelling van de deeltjes.

**d** Bereken de verhouding van het vermogen dat de deeltjes uitzenden.

De LHC is de grootste circulaire versneller.

**e** Leg uit wat het voordeel is van een circulaire versneller met een grote diameter.

**f** Leg uit waarom er protonen en geen elektronen worden gebruikt in de LHC.

# 3 Massa en energie

In deze paragraaf leer je:
- het verband uitleggen tussen massa, energie en bindingsenergie;
- het massadefect berekenen voor een kernreactie;
- uitleggen op welke manier kernsplijting en kernfusie worden gebruikt bij de productie van elektriciteit.

Bij de botsingen in deeltjesversnellers ontstaan zo veel nieuwe deeltjes dat het onmogelijk lijkt te achterhalen wat er precies is gebeurd. Gelukkig gedragen de deeltjes zich volgens strikte regels, uit te drukken als behoudswetten. Die bepalen welke processen wel en niet kunnen plaatsvinden. Met een van die wetten kun je bepalen welke isotopen stabiel zijn en welke radioactief. Deze wet wordt toegepast bij de productie van kernenergie.

## Massadefect

Bij scheikunde heb je geleerd dat massa een behouden grootheid is: voor en na een reactie is de totale massa van de moleculen gelijk. Als je heel precies de massa bepaalt voor en na een kernreactie of radioactief verval, dan blijkt dat er massa verdwenen is. Deze ‘ontbrekende’ massa wordt **massadefect** genoemd.

**Voorbeeldopgave 3**

Bereken het massadefect bij het alfaverval van uranium-233.

*Uitwerking*
Schrijf eerst de vervalvergelijking op:




Om het massadefect te berekenen, moet je eerst de *kern*massa’s voor en na het verval weten.
Voor de massa voor en na het verval geldt:
$m_{\underline{U233}} = m_{\underline{Th229}} + m_{\underline{He4}} + \Delta m$

Hierin is $\Delta m$ het massadefect en de massa’s met onderstreepte isotopen zijn kernmassa’s.
Binas tabel 25 vermeldt echter *atoom*massa’s: $m_{U233}$ = 233,039 63 u, $m_{Th229}$ = 229,031 75 u en $m_{He4}$ = 4,002 603 u. De kernmassa’s bereken je door van deze atoommassa’s de massa van de elektronen af te halen:
$m_{U233} - 92\ m_e = (m_{Th229} - 90\ m_e) + (m_{He4} - 2\ m_e) + \Delta m$

De elektronmassa’s vallen links en rechts tegen elkaar weg en je kunt verder rekenen met atoommassa’s:

$m_{U233} = m_{Th229} + m_{He4} + \Delta m$

$\Delta m = m_{U233} - m_{Th229} - m_{He4}$

$\Delta m = 233{,}039\ 63 - 229{,}031\ 75 - 4{,}002\ 603 = 0{,}005\ 28$ u

Het massadefect (tekort) is dus 0,005 28 u = $8{,}77 \cdot 10^{-30}$ kg.

Bij het verval van uranium-233 is er dus massa verdwenen. Dat is op zich al vreemd. Nog vreemder is dat er energie is ontstaan: het alfadeeltje heeft een (kinetische) energie van 4,83 MeV gekregen (Binas tabel 25). Die lijkt uit het niets te zijn gekomen. Kortom: massa en energie zijn elk op zich niet behouden!

## Massa-energierelatie

Het was Einstein die een verklaring gaf voor de energie die ontstaat en de verdwenen massa. Hij stelde dat massa en energie equivalent zijn: ze kunnen in elkaar worden omgezet. Met andere woorden: de energie van het alfadeeltje is gelijk aan de verdwenen massa. Massa en energie kun je omrekenen met de **massa-energierelatie**:

$$E = m \cdot c^2$$

Hierin is:
- $E$ de rustenergie van een deeltje in joule (J);
- $m$ de massa in kilogram (kg);
- $c$ de lichtsnelheid in meter per seconde (m $s^{-1}$).

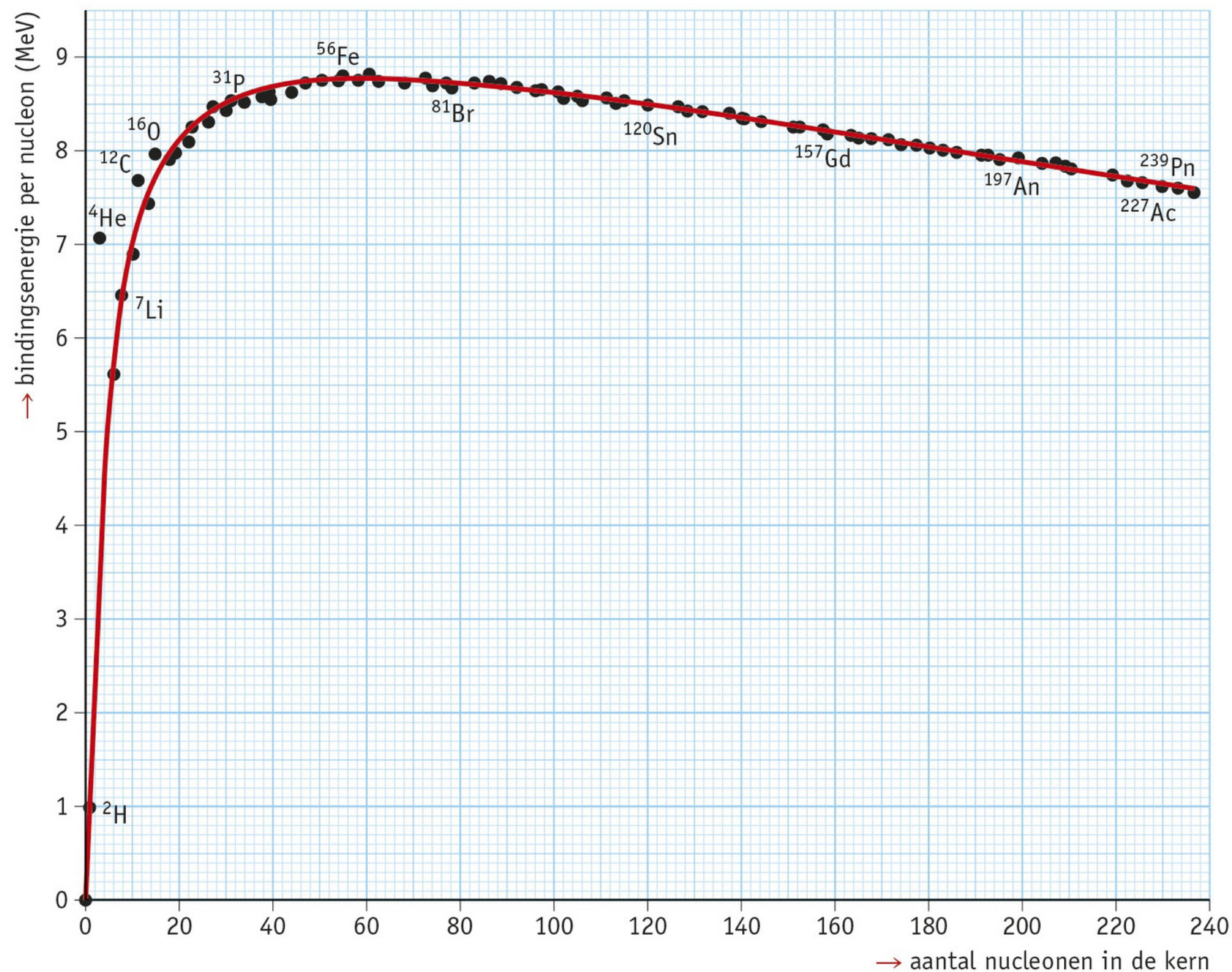
Bij het verval van uranium-233 is het massadefect $8{,}77 \cdot 10^{-30}$ kg. Met de massa-energierelatie kun je dat omrekenen naar een energie van $8{,}77 \cdot 10^{-30} \times (2{,}998 \cdot 10^8)^2 = 7{,}88 \cdot 10^{-13}$ J = 4,92 MeV. Het alfadeeltje heeft daarvan dus 4,83 MeV meegekregen. Er blijft nog 0,09 MeV over. Dit is de kinetische energie van de dochterkern (thorium-229). Bij radioactief verval treedt altijd een massadefect op en komt er kinetische energie vrij. Een negatief massadefect zou betekenen dat er energie moet worden toegevoegd.

## Bindingsenergie

Bij radioactief verval komt energie vrij: de totale massa van de dochterkern en het stralingsdeeltje is kleiner dan die van de moederkern. Het verschil in massa is omgezet in energie. Dit lijkt op wat er bij een exotherme reactie gebeurt: de energie van de reactieproducten is kleiner dan die van de reagerende stoffen, het verschil komt vrij als warmte. Bij (chemische) reacties is dit een gevolg van de elektrische wisselwerking tussen elektronen en kernen. Bij radioactief verval en kernreacties is het een gevolg van de kernkracht tussen de nucleonen.
Stel je een deuteron voor, de kern van deuterium, ofwel $^{2}_{1}H$. Het proton en neutron trekken elkaar blijkbaar aan: ze vormen immers een kern. Als je ze, denkbeeldig, uit elkaar wilt halen, moet je over een bepaalde afstand een kracht uitoefenen. Je verricht daarmee arbeid en stopt energie in het systeem. Die energie wordt de **bindingsenergie** genoemd: deze energie moet je toevoeren om de deeltjes los te krijgen en deze komt vrij als je de deeltjes samenvoegt. Hoe groter de bindingsenergie, hoe sterker de deeltjes gebonden zijn.
Als je voor elke isotoop de bindingsenergie per nucleon uitzet tegen het aantal nucleonen (massagetal), krijg je een diagram zoals in figuur 10.

Een aantal zaken valt op in dit diagram:
- Tot ijzer-56 neemt de bindingsenergie per nucleon toe met toenemend massagetal, daarna neemt het af.
- De bindingsenergie per nucleon is in de orde van enkele MeV.
- Helium-4 heeft een zeer grote bindingsenergie (per nucleon) in vergelijking met nabijgelegen atomen: het kost relatief veel energie het deeltje uit deze kern uit elkaar te halen.

▶ **EXPERIMENT 2** Gausskanon (begripspracticum)




▲ **figuur 10** bindingsenergie per nucleon

## Voorbeeldopgave 4

Bereken de bindingsenergie van uranium-235 met behulp van gegevens uit Binas. Druk deze uit in MeV en in MeV per nucleon. Controleer je antwoord met behulp van figuur 10.

*Uitwerking*

Gegevens:

$m_{U235}$ = 235,043 92 u (Binas tabel 25, atoommassa)
$m_p$ = 1,007 276 u (Binas tabel 7)
$m_n$ = 1,008 665 u (Binas tabel 7)
$m_e$ = 0,000 549 u (Binas tabel 7)
1 u = 931,494 061 MeV (Binas tabel 7)

$m_{\underline{U235}} = m_{U235} - 92\ m_e = 235{,}043\ 92 - 92 \times 0{,}000\ 549 \text{ u} = 234{,}993\ 41 \text{ u}$

De massa van de afzonderlijke deeltjes samen:
$m = 92\ m_p + (235 - 92)\ m_n = 92 \times 1{,}007\ 276 + (235 - 92) \times 1{,}008\ 665 = 236{,}908\ 487 \text{ u}$

$E_b = m - m_{U235} = 236{,}908\ 487 - 234{,}993\ 41 = 1{,}915\ 08 \text{ u}$
$E_b = 1{,}915\ 08 \times 931{,}494\ 061 = 1783{,}89 \text{ MeV}$

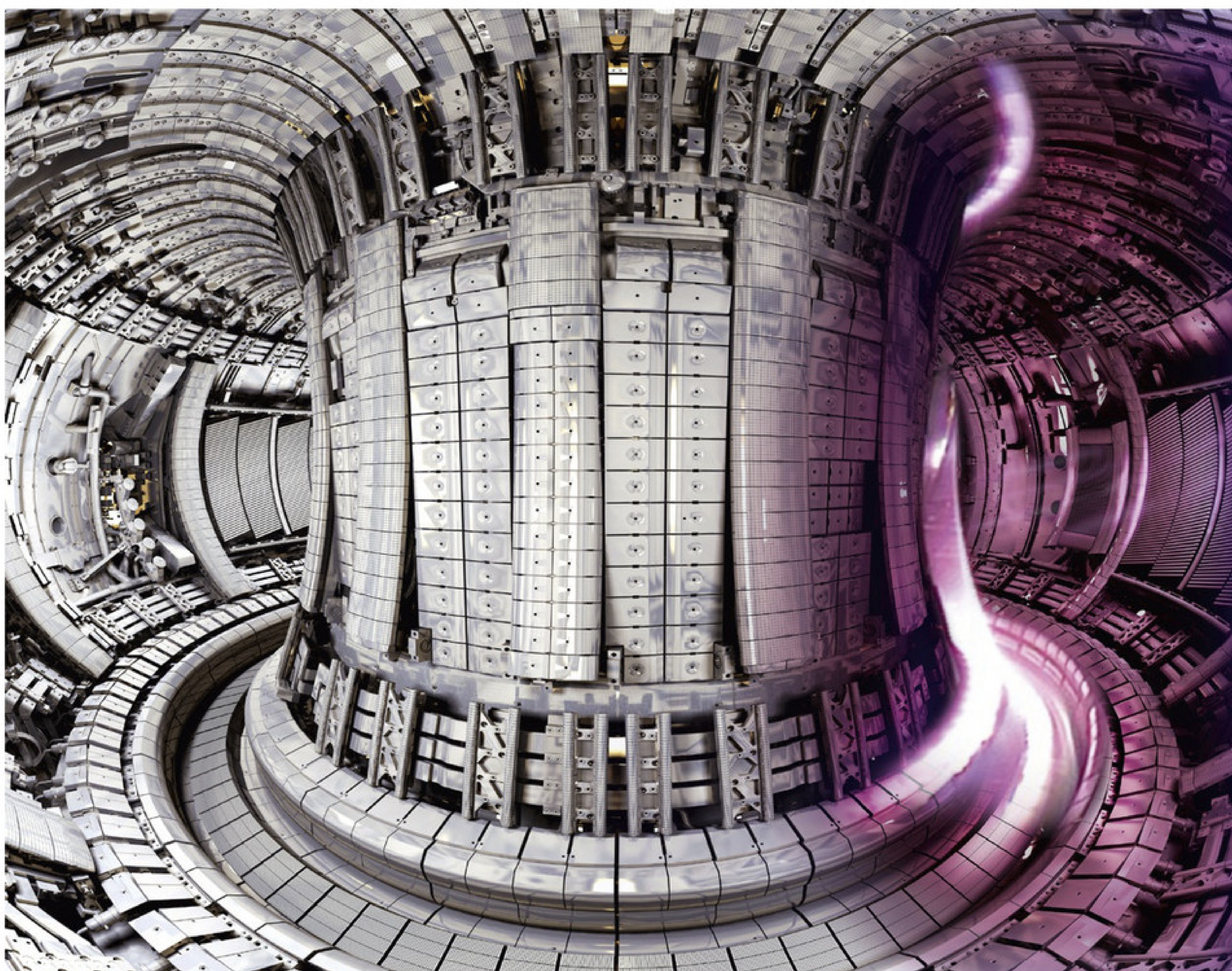
Per nucleon is dit: $\dfrac{1783{,}88}{235} = 7{,}590\ 99 \text{ MeV}$

In figuur 10 hierboven lees je bij een massagetal van 235 een energie af van 7,6 MeV. Dit komt overeen met de berekening.

## Kernenergie: splijting en fusie

Kerncentrales wekken energie op door gebruik te maken van het verschil in bindingsenergie tussen isotopen. In een kerncentrale wordt uranium-235 beschoten met neutronen. Er ontstaat uranium-236 dat instabiel is en splijt. De manier waarop dat gebeurt gaat volgens een kansverdeling: verschillende brokstukken kunnen met een bepaalde kans ontstaan. Belangrijk is dat er ook neutronen vrijkomen die nieuwe splijtingsreacties kunnen veroorzaken en zo de kettingreactie in stand houden. Er komt bij dit proces energie vrij. Je kunt je dit als volgt voorstellen: de energie die het kost om een zwaar element als uranium-236 te splitsen in afzonderlijke nucleonen, is minder dan de bindingsenergie die vrijkomt bij het vormen van de lichtere elementen (figuur 10).

Een fusiereactor laat juist isotopen fuseren met een laag massagetal (figuur 11). In figuur 10 kun je zien dat de bindingsenergie voor lichte isotopen toeneemt met toenemend massagetal. Stel je weer voor: de energie die vrijkomt bij de vorming van zwaardere elementen is groter dan de energie die het kost om een licht element te splitsen in afzonderlijke nucleonen. Het principe is redelijk eenvoudig, de praktijk is dat helaas niet. Bij kernfusie moeten positief geladen kernen dicht bij elkaar worden gebracht zodat de kernkracht ze vervolgens samenbindt. Maar daarvoor moet eerst de afstotende coulombkracht worden overwonnen. Daarvoor moeten de deeltjes voldoende snelheid hebben. Oftewel: de temperatuur moet zeer hoog zijn, in de orde van 150 miljoen kelvin. In de zon vindt kernfusie plaats bij een lagere temperatuur, omdat daar de druk ook nog eens heel hoog is. Bovendien is het proces zonder quantumtunneling niet mogelijk (hoofdstuk 12).
In Frankrijk wordt momenteel een experimentele fusiereactor (ITER) gebouwd. Die moet het voor elkaar krijgen kernfusie tot stand te brengen en netto energie op te leveren. Daarna pas kunnen commerciële fusiereactoren worden ontworpen en gebouwd. Er is dus nog een lange weg te gaan. De voordelen van kernfusie zijn groot: de fusiebrandstoffen zijn op aarde ruim aanwezig en de fusieproducten zijn niet schadelijk. Er is dus geen probleem van afval dat lang radioactief blijft.



▲ **figuur 11** Samengestelde afbeelding van de JET-fusiereactor (voorloper van ITER): links uit, rechts aan waarbij het gloeiende plasma zichtbaar is. De ring is ruim 4 m hoog.

### Sterrenstof

Je zou het niet zeggen als je om je heen kijkt, maar het heelal bestaat voornamelijk uit waterstof. Alle isotopen die voor ons belangrijk zijn, zijn in sterren gevormd. Tot ijzer-56 levert kernfusie energie op. Veel van de isotopen lichter dan ijzer-56 worden op verschillende momenten in het leven van sterren gevormd. Theoretisch zouden er dus spontaan geen zwaardere elementen kunnen worden gevormd in sterren, omdat daarvoor netto energie nodig is. Pas wanneer een ster zwaar genoeg is en als supernova uiteenspat, worden die zwaardere elementen gevormd. Al deze nieuwe elementen worden de interstellaire ruimte ingeblazen. Uit dit sterrenstof vormen zich weer nieuwe sterren en planeten.

**Onthoud!**

- Het massadefect is de afname van massa bij een deeltjesreactie of verval. De afname van massa is gelijk aan de toename in (kinetische) energie volgens $E = m \cdot c^2$. Eén atomaire massaeenheid (u) komt zo overeen met een energie van 931,49 MeV (Binas tabel 7).
- Bindingsenergie is de energie die vrijkomt bij het binden van deeltjes en is gelijk aan de energie die nodig is om de gebonden deeltjes vrij te maken. Het optreden van een massadefect komt overeen met een afname van de bindingsenergie. In geval van radioactief verval is er een massadefect en komt er dus energie vrij.
- In een kerncentrale komt bindingsenergie vrij door zware elementen (uranium-235) te splijten in lichtere elementen.
- Bij kernfusie komt bindingsenergie vrij door lichte elementen tot zwaardere te laten fuseren.
- Door verschillende fusiereacties in de zon ontstaan steeds zwaardere elementen. Tot ijzer-56 levert dit netto energie op. Zwaardere elementen worden gevormd wanneer een ster als supernova explodeert.

**Opdrachten**

**13** Paarproductie
Bij paarproductie ontstaan een elektron en een positron uit een hoogenergetisch foton. Gebruik de relatie van Einstein ($E = m \cdot c^2$) om uit te rekenen hoeveel energie het foton minimaal moet hebben. Geef je antwoord in drie significante cijfers.

**14** Massadefect
Bij radioactief verval treedt massadefect op.
Bereken het massadefect, uitgedrukt in MeV, dat optreedt bij het verval van:
**a** radium-224.
**b** koolstof-14.

Het stralingsdeeltje dat in opdracht a en b wordt uitgezonden, krijgt een deel van het massadefect als kinetische energie mee.
**c** Controleer met informatie uit Binas dat je antwoorden bij opdracht a en b hiermee in overeenstemming zijn.
**d** Vergelijk de berekeningen van opdracht a en b met elkaar: in welk geval kun je direct rekenen met atoommassa's?

**15** Bindingsenergie
IJzer-57 is de isotoop met de hoogste bindingsenergie per nucleon.
Bereken de bindingsenergie per nucleon van ijzer-57. Controleer je antwoord met behulp van figuur 10.

**16** Ontdekking neutron

Het neutron is ontdekt in een kernreactie waarbij beryllium-9 met helium-4 werd beschoten. Daarbij ontstaat een isotoop van koolstof.

**a** Noem een manier om aan helium-4-deeltjes te komen.

De helium-4-kernen hadden een energie van ongeveer 5 MeV.

**b** Leg uit waarom het nodig is de helium-4-kernen met grote snelheid op het beryllium af te vuren.

**c** Geef de reactievergelijking van dit proces en noem welke isotoop van koolstof er wordt gevormd.

**d** Bereken hoeveel energie er bij dit proces netto vrijkomt.

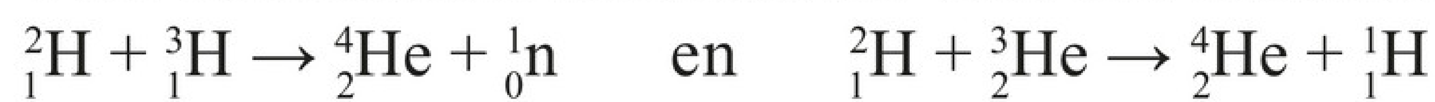
Uit metingen bleek dat de vrijkomende energie niet volledig als gammastraling wordt uitgezonden: er was energie zoek. James Chadwick stelde daarom in 1932 voor dat er ook een ongeladen deeltje met massa vrijkomt: het neutron.

**e** Geef de nieuwe reactievergelijking en controleer dat er nog steeds koolstof wordt gevormd.

**f** Bereken opnieuw hoeveel energie er netto bij dit proces vrijkomt en controleer of je antwoord inderdaad kleiner is dan dat bij opdracht d.

**17** Fusiereactor

Twee interessante fusiereacties voor een fusiereactor zijn:



$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$ en $^{2}_{1}H + ^{3}_{2}He \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{1}H$

**a** Bereken voor beide fusiereacties hoeveel energie er vrijkomt, in MeV per nucleon.

Deuterium komt op aarde veel voor en is relatief goedkoop te winnen. Helium-3 is zeer zeldzaam en daarom wordt voor toepassingen in een fusiereactor gekeken naar de eerste fusiereactie. Tritium, $^{3}H$, is ook zeldzaam, maar kan worden gevormd door lithium-7 te bestralen met neutronen. Na het invangen van een neutron treedt een kernsplijting op, waarbij ook weer een neutron wordt uitgezonden.

**b** Geef de reactievergelijking waarbij tritium wordt gevormd.

Het lithium kan in de reactorwand worden verwerkt, zodat er 'vanzelf' tritium wordt gevormd. Daarvoor moeten de neutronen voldoende worden afgeremd. Dat kan worden gedaan met grafiet. Sommige neutronen worden ook ingevangen door koolstof-13 dat in grafiet van nature aanwezig is. Bij deze kernreactie komt een alfadeeltje vrij.

**c** Geef de bijbehorende reactievergelijking.

**d** Noem welke twee problemen er ontstaan door het invangen van neutronen door grafiet.

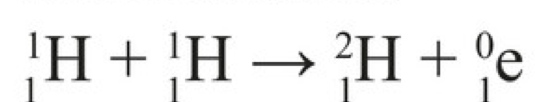
**18** Kernfusie in de zon

De energie die de zon uitzendt, is afkomstig van kernfusie.

**a** Zoek in Binas op hoeveel energie de zon per seconde uitzendt.

**b** Bereken hoeveel massa de zon per seconde verliest.

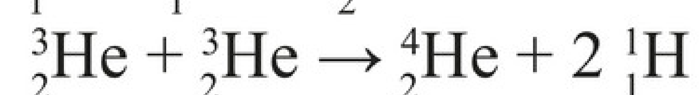
De proton-protoncyclus is een belangrijk fusieproces in de zon, bestaande uit de volgende fusiereacties:



$^{1}_{1}H + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{2}_{1}H + ^{0}_{1}e$



$^{1}_{1}H + ^{2}_{1}H \rightarrow ^{3}_{2}He$



$^{3}_{2}He + ^{3}_{2}He \rightarrow ^{4}_{2}He + 2\ ^{1}_{1}H$

**c** Geef schematisch weer hoe deze drie fusiereacties samenhangen.

**d** Schrijf de drie reactievergelijkingen als één netto reactievergelijking.

**e** Bereken de energie die netto bij de reactievergelijking van opdracht d vrijkomt.

**+19** Kerncentrale

In een kerncentrale wordt uranium-235 beschoten met neutronen. Het uranium-236 dat zo wordt gevormd, is instabiel en valt uiteen in verschillende brokstukken. Daarbij worden drie neutronen uitgezonden die elk ook een uranium-236-kern vormen die splijt.

**a** Bereken hoeveel uranium-236-kernen er na tien van dit soort stappen zijn gespleten.

**b** Maak een beredeneerde schatting van de energie die daarbij is vrijgekomen (in joule). Het is hiervoor niet nodig te weten wat de splijtingsproducten zijn.

**c** Geef het percentage uranium-235 dat zich in natuurlijk uranium bevindt.

Voor een kernreactor wordt uranium verrijkt tot het 5% uranium-235 bevat. De rest is dan nog uranium-238, dat ook neutronen in kan vangen, maar daarbij niet splijt.

**d** Beredeneer hoe je antwoorden bij opdracht a en b veranderen als je rekening houdt met de samenstelling van de brandstof in een kernreactor.

Uranium-239 is een bètaminstraler.

**e** Toon aan dat er na een aantal vervallen plutonium-239 wordt gevormd.

Plutonium-239 is ook splijtbaar en kan worden gebruikt in kernwapens.

**f** Leg uit waarom een kernreactor op basis van uranium-235 relatief veel plutonium-239 produceert.

# 4 Behoudswetten bij deeltjesprocessen

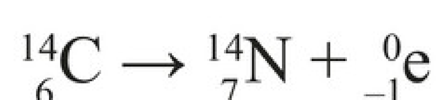
In deze paragraaf leer je:

- een vergelijking opstellen voor de wisselwerking tussen deeltjes;
- benoemen welke behoudswetten er zijn waar deeltjesprocessen aan moeten voldoen;
- behoudswetten toepassen om een deeltjesvergelijking kloppend te maken;
- uitleggen hoe op basis van behoudswetten nieuwe deeltjes worden gepostuleerd.

In de vorige paragraaf heb je gelezen dat massa en energie apart geen behouden grootheden zijn, maar massa-energie wel. Met die behoudswet kun je voor een belangrijk deel bepalen welk radioactief verval en welke deeltjesprocessen in principe mogelijk zijn en welke niet. Er zijn nog meer behoudswetten die bepalen welke deeltjesprocessen mogelijk zijn.

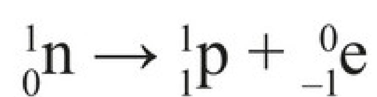
## Deeltjesprocessen

Alfaverval kun je zien als het opnieuw rangschikken van protonen en neutronen in de kern van een atoom. Daarbij is het aantal protonen en neutronen voor en na het verval gelijk. Het is verleidelijk om elementaire deeltjes te zien als een soort legosteentjes die je op verschillende manieren kunt combineren. Bètaverval laat zien dat dat beeld niet klopt, bijvoorbeeld:



$${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$$

Het aantal protonen en neutronen is bij dit verval niet gelijk gebleven en er is een bètamindeeltje (een elektron) ‘ontstaan’. Wat er met de afzonderlijke deeltjes gebeurt, kun je weergeven met een **deeltjesvergelijking**:



$${}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{1}_{1}\text{p} + {}^{0}_{-1}\text{e}$$

Het neutron is vervallen tot een proton en een elektron. Het is dus niet zo dat het neutron uit een proton en een elektron bestaat. Dat is niet bepaald te vergelijken met legosteentjes! Deze vergelijking is een voorbeeld van een **deeltjesproces**. Het is slechts een van de vele mogelijke deeltjesprocessen. Natuurkundigen zijn geïnteresseerd in de vraag welke deeltjesprocessen mogelijk zijn.

## Ladingbehoud

In de bellenvatopname van paragraaf 1 (figuur 2) ontstonden via paarproductie een elektron en een positron uit een foton. Het deeltjesproces voldoet aan ladingbehoud: de lading voor en na de reactie is gelijk. In de volgende reactie is de lading ook behouden:

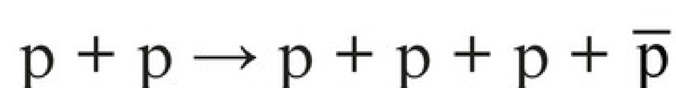


$$\text{n} \overset{?}{\rightarrow} \text{e}^{+} + \text{e}^{-}$$

Er is nu bovendien een flink massadefect waardoor het positron en elektron met grote snelheid weg zouden moeten vliegen om de extra energie weg te dragen. Toch wordt deze reactie niet waargenomen. Er wordt blijkbaar een behoudswet geschonden die de reactie verbiedt.

## Behoud van baryongetal

Het verboden verval van een neutron in een elektron en een positron laat zien dat er een belangrijk verschil is tussen de betrokken deeltjes. Neutronen en protonen worden **baryonen** genoemd, of ‘zware deeltjes’. Net zoals een proton een elektrische lading $+1e$ heeft, heeft een baryon een baryongetal $A = +1$. Ook het neutron heeft een baryongetal van +1. En net zoals het positron, ofwel ‘anti-elektron’, een tegengestelde lading heeft als het elektron, bestaat er een antiproton met een tegengestelde lading en een baryongetal van $A = -1$. Elektronen en positronen daarentegen zijn **leptonen**, ‘lichte deeltjes’, waarvoor geldt $A = 0$. In elke reactie moet het baryongetal behouden zijn. Dat is duidelijk niet het geval bij $\text{n} \overset{?}{\rightarrow} \text{e}^{+} + \text{e}^{-}$. Op basis van ladingbehoud en behoud van baryongetal kun je de volgende deeltjesreactie voorspellen:



$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \text{p} + \overline{\text{p}}$$

Hierin is $\overline{\text{p}}$ het antiproton. Maar er lijkt een probleem te zijn met energiebehoud: de massa rechts is twee keer zo groot als links. Toch kan deze reactie wel degelijk plaatsvinden: door in een deeltjesversneller, zoals de LHC, met hoge snelheid twee protonen op elkaar te laten botsen. De energie om het extra proton en antiproton te creëren, komt uit de bewegingsenergie van de botsende protonen.

## Impulsbehoud

Het is nu duidelijk dat het positron-elektronpaar uit de bellenvatopname van paragraaf 1 niet ontstond uit een neutron. Maar het is ook niet mogelijk dat het uit één enkel foton is ontstaan. Dat is een gevolg van **impulsbehoud**.
**Impuls** is een maat voor de hoeveelheid beweging (hoofdstuk 12). Voor een deeltje met massa geldt: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, voor het foton geldt: $p = \dfrac{E}{c}$. Impuls is een vectorgrootheid: om de totale impuls van meerdere deeltjes te bepalen, moet je de impulsvectoren samenstellen. Impuls is een behouden grootheid. De impuls van het foton moet gelijk zijn aan de totale impuls van het positron-elektronpaar. Dat zou op zich kunnen, maar de energie moet ook behouden zijn (hoofdstuk 14, voorbeeldopgave 8). Het blijkt niet mogelijk aan deze twee eisen te voldoen als

het positron-elektronpaar is ontstaan uit één foton. De juiste deeltjesvergelijking voor paarproductie moet zijn:

$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$

Het extra foton is meestal afkomstig van een atoomkern in het bellenvat. Het inkomende foton wisselt energie uit met die kern door uitzending van een extra foton. Op die manier staat het inkomende foton een deel van z'n energie af aan de kern die daardoor een beetje snelheid krijgt. Zo kan worden voldaan aan zowel impuls- als energiebehoud.

## Omkeerbaarheid

In figuur 2 verdwijnt bij punt B een positron. Door ladingbehoud weet je dat dat niet zomaar mogelijk is. Je kunt het positron laten 'verdwijnen' door de deeltjesvergelijking voor paarproductie om te keren. Dan voldoe je ook aan alle behoudswetten. Dit omgekeerde proces heet **annihilatie**: het elektron en positron 'slokken' elkaar op waarbij alle massa als energie wordt uitgezonden in de vorm van twee fotonen. Dit proces is te schrijven als:

$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$

De annihilatie van elektronen en positronen vormt de basis van de PET-scan (hoofdstuk 10). Doordat de fotonen in tegenovergestelde richtingen wegschieten, kan uit het verschil in aankomsttijd worden teruggerekend waar het positron en elektron annihileerden.

Dit omkeren van een deeltjesvergelijking heet **omkeerbaarheid**: elke deeltjesvergelijking kan omgekeerd ook voorkomen. Als een reactie spontaan optreedt, komt er energie bij vrij. Om de omgekeerde reactie te laten plaatsvinden, is er dus energie nodig. Omkeerbaarheid zelf is geen behoudswet, maar een principe dat geen enkele behoudswet schendt.
Een ander voorbeeld is de deeltjesvergelijking voor bètaminverval:

$n \rightarrow p + e^-$

De omgekeerde reactie is:

$p + e^- \rightarrow n$

Dit proces komt in verschillende isotopen voor en heet **K-vangst**, omdat het elektron van deze reactie uit de binnenste schil (K-schil) van het atoom komt.

## Kruisingssymmetrie

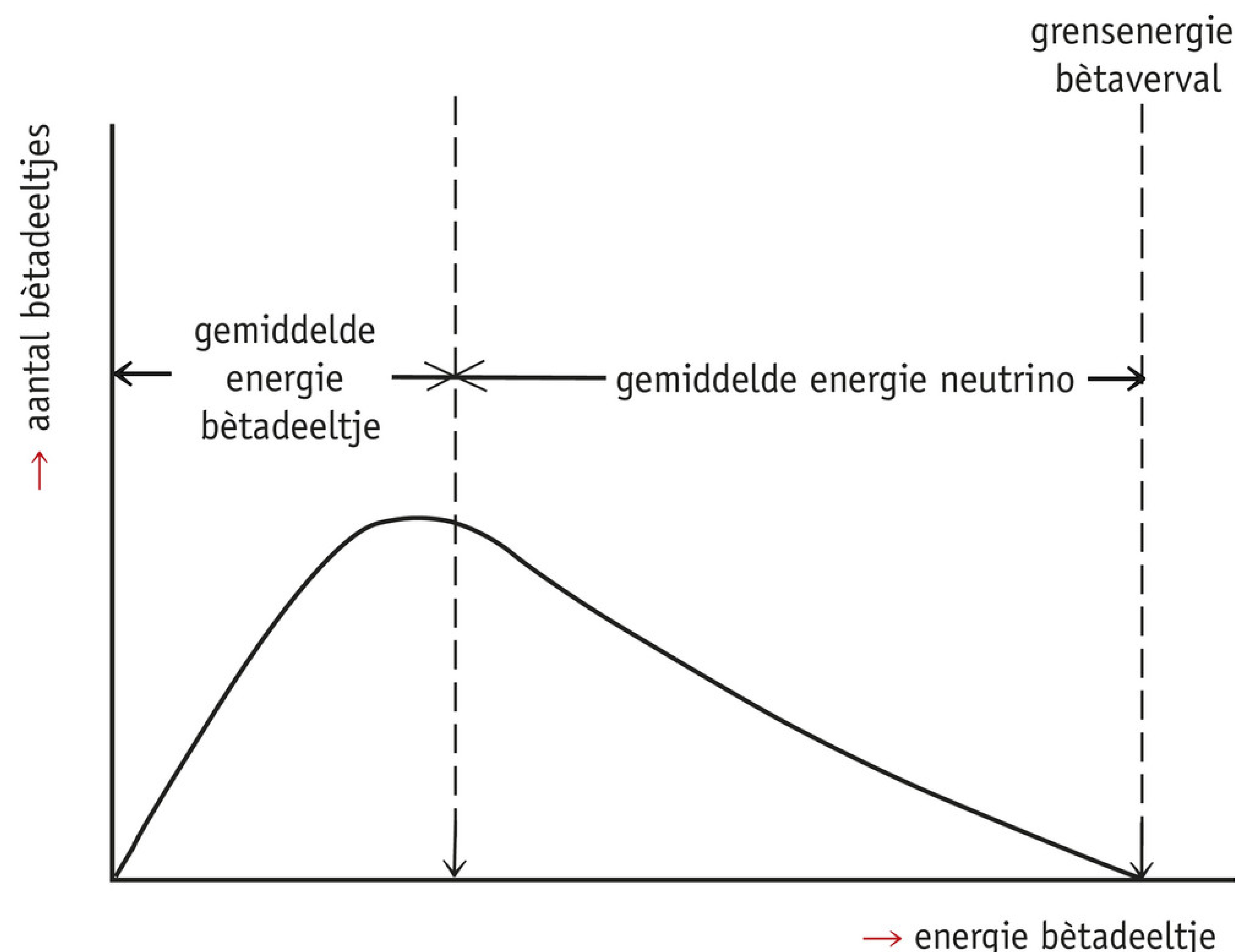
Naast K-vangst en bètaminverval kan ook het volgende proces optreden:

$p \rightarrow n + e^+$

Dit is bètaplusverval. De vergelijking lijkt op die voor K-vangst. Het verschil is dat er geen elektron wordt opgenomen, maar een positron wordt uitgezonden. Je kunt de deeltjesvergelijking van bètaplusverval uit die van K-vangst verkrijgen door het elektron links weg te halen en rechts te vervangen door het antideeltje. Dit heet **kruisingssymmetrie** en dit principe geldt algemeen.
Net als bij omkeerbaarheid, blijven alle 'ladingen' door kruisingssymmetrie behouden. Wel lijkt massa-energiebehoud nu geschonden, omdat het massadefect negatief is: de massa neemt rechts toe. Een vrij proton kan dus niet spontaan vervallen; daarvoor is er onvoldoende energie. Bètaplusverval treedt alleen op in een atoomkern. Een deel van de bindingsenergie van de moederkern wordt daarbij omgezet in massa.

## Behoud van leptongetal

Met behulp van behoudswetten kun je in sommige gevallen voorspellen dat er een nieuw deeltje moet zijn en ook welke eigenschappen dat deeltje heeft. Elke alfastraler zendt alfadeeltjes uit met een vaste hoeveelheid energie. Zo zendt uranium-233 altijd alfadeeltjes uit met een energie van 4,83 MeV, maar uranium-235 altijd met een energie van 4,52 MeV. Dat is een gevolg van energie- en impulsbehoud als er na het verval twee deeltjes overblijven: de dochterkern en het alfadeeltje.
Bij bètaverval gebeurt er iets anders. In Binas vind je voor bètaverval de maximale energie van het bètadeeltje. Het kan dus blijkbaar ook minder zijn. Als je van heel veel vervallen zou bijhouden met welke energie het bètadeeltje wordt uitgezonden, dan krijg je een grafiek zoals in figuur 12.




▲ **figuur 12** verdeling van de energie van het bètadeeltje bij bètaverval

Deze verdeling is alleen mogelijk wanneer bij bètaverval een *derde* deeltje vrijkomt dat een deel van de impuls en energie meedraagt. Bij bètaminverval gaat het om het antineutrino, aangegeven met $\bar{\nu}$. Uit de deeltjesvergelijking kun je afleiden welke eigenschappen dit deeltje moet hebben:



$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

De lading links is nul, rechts heeft het proton een lading $+e$, het elektron een lading $-e$. Het antineutrino moet dus een lading nul hebben. Verder was het baryongetal al behouden (links een neutron, rechts een proton). Dus het baryongetal van het antineutrino is ook nul.
Rechts in de vergelijking is een elektron ontstaan: een lepton. Links waren er geen leptonen. Je zou, net als dat voor baryonen geldt, kunnen verwachten dat er behoud is van leptongetal $L$. Dan moet het antineutrino dus een leptongetal hebben van $L = -1$ en een neutrino een leptongetal van $L = +1$. Anders gezegd: er is een verschil tussen een neutrino en een antineutrino.
Om dat te controleren kun je kruisingssymmetrie toepassen door het antineutrino van rechts naar links te halen en te vervangen door zijn antideeltje, een neutrino:



$$n + \nu \rightarrow p + e^-$$

Deze reactie zou moeten optreden en wordt ook waargenomen. Als het neutrino en antineutrino aan elkaar gelijk zouden zijn, dan moet de volgende reactie ook worden waargenomen:



$$n + \bar{\nu} \overset{?}{\rightarrow} p + e^-$$

Deze reactie is onderzocht door de veronderstelde antineutrino's die bij bètaminverval vrijkomen af te sturen op een stuk lood zodat ze een reactie kunnen aangaan met de neutronen die zich daarin bevinden. De reactie is echter nooit waargenomen. De conclusie is dat het neutrino en het antineutrino twee verschillende deeltjes zijn, zoals voorspeld op basis van behoud van leptongetal.

## Onthoud!

- In elke deeltjesreactie is lading, massa-energie, impuls, baryon- en leptongetal behouden.
- Een antideeltje heeft dezelfde massa als het bijbehorende deeltje, maar alle 'ladingen' zijn tegengesteld: elektrische lading, leptongetal en baryongetal.
- Deeltjesvergelijkingen kunnen worden omgekeerd en leveren dan processen op die ook mogelijk zijn. Als het proces de ene kant op spontaan verloopt, dan moet er energie worden toegevoerd in het omgekeerde proces.
- Bij kruisingssymmetrie verplaatst een deeltje in een deeltjesvergelijking van de ene naar de andere kant van de pijl. Daarbij verandert het van deeltje naar antideeltje (of andersom).
- Bètaplusverval, bètaminverval en K-vangst zijn via kruisingssymmetrie aan elkaar verwant.

## Opdrachten

**20** Bètaverval [1]
Bètaplusverval is gerelateerd aan bètaminverval.
**a** Geef de deeltjesvergelijking voor bètaplusverval.
**b** Leg uit dat bij bètaplusverval het baryongetal behouden is.

**21** Behoudswetten
Energie- en impulsbehoud zijn continue behoudswetten. De behoudswetten voor lading, baryon- en leptongetal zijn discrete behoudswetten.
Leg uit wat er wordt bedoeld met een continue en een discrete behoudswet.

**22** Bètaverval [2]
Bepaalde deeltjesvergelijkingen zijn via kruisingssymmetrie en omkeerbaarheid verwant aan bètaverval.
Schrijf alle mogelijke deeltjesvergelijkingen op die via kruisingssymmetrie en omkeerbaarheid verwant zijn aan bètaminverval (vergeet het neutrino niet).

**23** K-vangst
Lang niet alle isotopen vertonen K-vangst. Een voorbeeld is waterstof.
**a** Bereken het massadefect als waterstof wel via K-vangst zou vervallen en toon daarmee aan dat waterstof geen K-vangst kan vertonen.
**b** Leg met behulp van de theorie uit dat waterstof ook niet via andere wegen kan vervallen.
**c** Waarom is het evolutionair gezien 'gelukkig' dat waterstofkernen stabiel zijn?

**24** PET-scan
De twee fotonen die bij een PET-scan worden uitgezonden, hebben een karakteristieke energie van 511 keV.
**a** Toon dat aan op basis van het massadefect dat optreedt bij de vorming van de twee fotonen.

Voor de PET-scan wordt fluor-18 gebruikt, dat positronen uitzendt met een maximale energie van 0,63 MeV. Desondanks heeft elk van de fotonen altijd een energie van 511 keV.

**b** Wat kun je hieruit concluderen over de manier waarop een elektron en positron annihileren?

**+25** Uranium-233

In voorbeeldopgave 3 (paragraaf 3) bleek het massadefect bij het verval van uranium-233 gelijk te zijn aan 0,005 28 u ofwel 4,92 MeV. Volgens Binas krijgt het alfadeeltje daarvan 4,83 MeV als kinetische energie mee.

**a** Bereken op basis van impulsbehoud welke snelheid de dochterkern moet hebben. Neem aan dat de moederkern geen snelheid had.

**b** Controleer of deze snelheid overeenkomt met de ontbrekende energie.

**+26** Paarproductie

Bij paarproductie ontstaan uit twee fotonen een positron en elektron.

**a** Leg met behulp van impulsbehoud uit dat het niet mogelijk is dat één enkel foton een elektron-positronpaar kan produceren, ook al heeft het voldoende energie.

Paarproductie vindt meestal plaats in de buurt van een geladen deeltje, bijvoorbeeld een atoomkern. Het inkomende foton wisselwerkt met de kern door een nieuw foton uit te wisselen. In de rest van deze opdracht bekijk je een foton dat op die manier met een waterstofkern wisselwerkt, waarbij een positron en een elektron worden gevormd zonder extra kinetische energie.

**b** Leg op basis van impulsbehoud uit dat de atoomkern door dit proces een snelheid moet krijgen. Houd voor de energie van het foton alleen rekening met de benodigde energie voor de creatie van het elektron-positronpaar.

Voor de impuls van een foton geldt: $p = \dfrac{E}{c}$

**c** Bereken met welke minimale snelheid de waterstofkern wegschiet.

**d** Bereken op basis van je antwoord bij opdracht c de minimale energie die het foton moet hebben om dit proces mogelijk te maken.

**e** Om wat voor soort foton gaat het?

# 5 Het standaardmodel

In deze paragraaf leer je:

- uitleggen dat kerndeeltjes geen elementaire deeltjes zijn;
- uitleggen hoe het standaardmodel de elementaire deeltjes en de wisselwerking daartussen beschrijft;
- uitleggen wat de verschillen en overeenkomsten zijn tussen families/generaties deeltjes;
- het feynmandiagram tekenen bij een gegeven deeltjesproces (en omgekeerd).

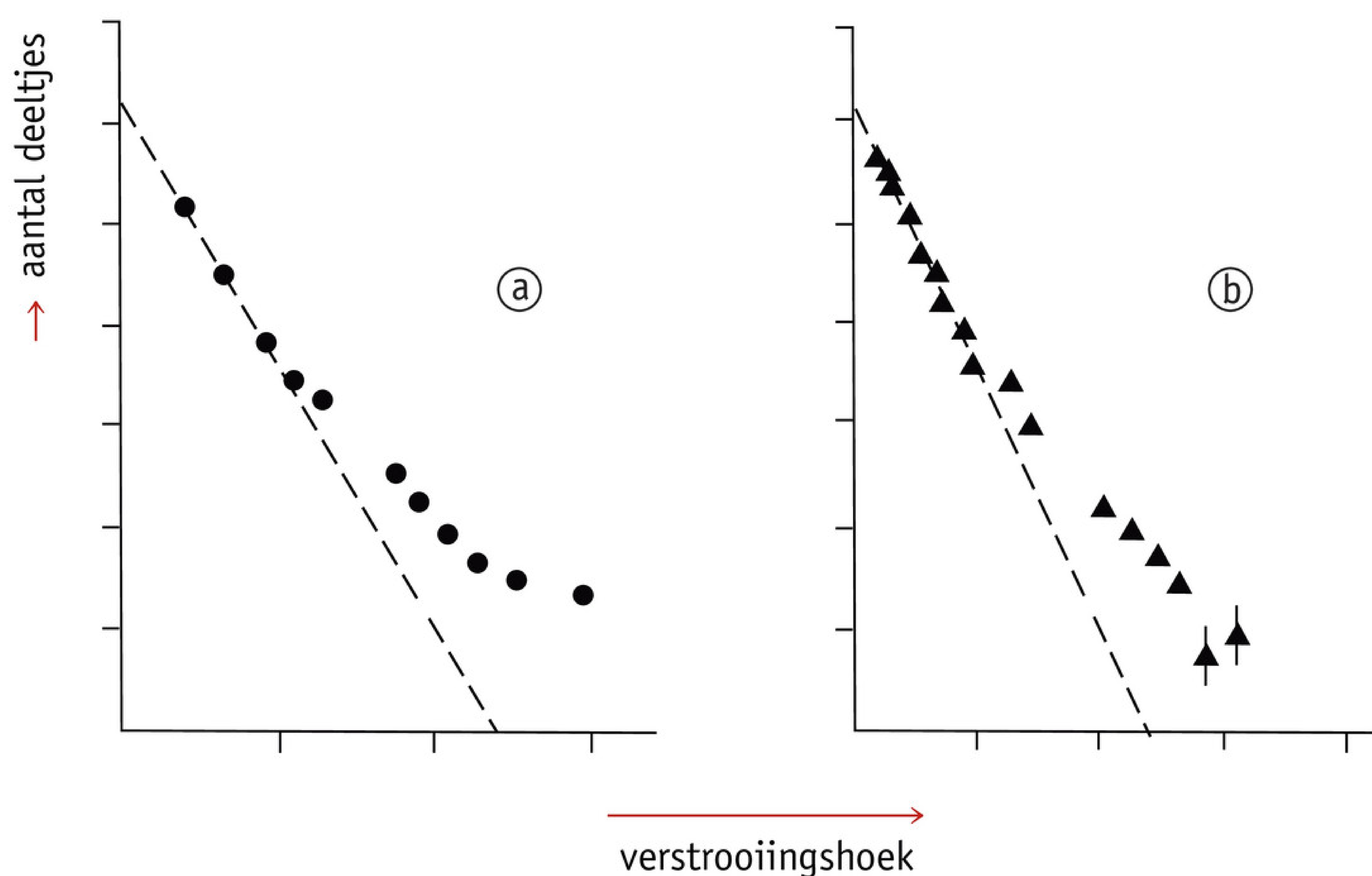
Zoals het periodiek systeem van de elementen orde schept in de veelheid aan elementen, zo schept het **standaardmodel van de deeltjesfysica** orde in de veelheid aan elementaire deeltjes. Het standaardmodel is de meest complete beschrijving van elementaire deeltjes en hun interacties. Het vormt niet alleen de bouwdoos van alle materie die voor de mens van belang is – protonen, neutronen en elektronen – maar ook van de vele andere soorten deeltjes die in kosmische straling en deeltjesversnellers worden waargenomen.

## De spelers tot nu

De deeltjes die je tot nu in dit hoofdstuk bent tegengekomen, zijn protonen, neutronen, elektronen, positronen, muonen, neutrino's en fotonen. Daarvan zijn elektronen, muonen en neutrino's fundamenteel, ofwel ondeelbaar. Het foton is een vreemd soort deeltje: het heeft geen massa, is z'n eigen antideeltje en verschijnt alleen als gevolg van de wisselwerking tussen geladen deeltjes. Het wordt daarom een **wisselwerkingsdeeltje** genoemd: overbrenger van de elektromagnetische kracht. Het proton en neutron zijn geen fundamentele deeltjes, maar samengestelde deeltjes.

## Quarks

Rutherford ontdekte dat het atoom structuur heeft door er alfadeeltjes op af te schieten (paragraaf 2). De structuur van protonen is ontdekt door ze te beschieten met elektronen. In figuur 13 zie je de resultaten van verstrooiingsexperimenten voor het atoom (figuur 13a) vergeleken met die voor het proton (figuur 13b). De stippellijnen geven de verwachte resultaten weer als het atoom/proton een massief geladen balletje zou zijn. Je ziet dat er bij zowel het atoom als het proton meer deeltjes over een grotere hoek verstrooien dan verwacht.
In 1964 stelde de Amerikaan Murray Gell-Mann (1929–2019) voor dat protonen en neutronen zijn samengesteld uit deeltjes die hij **quarks** noemde. Baryonen, zoals protonen en neutronen, bestaan elk uit drie quarks. Een proton bestaat uit twee up- en één down-quark: uud. Een neutron bestaat uit één up- en twee down-quarks: udd. Omdat een proton een lading $e$ heeft en een neutron neutraal is, moet de lading van een quark fractioneel zijn: $q_u = \frac{2}{3}e$ en $q_d = -\frac{1}{3}e$. Quarks hebben een **quarkgetal** dat in alle processen behouden is.



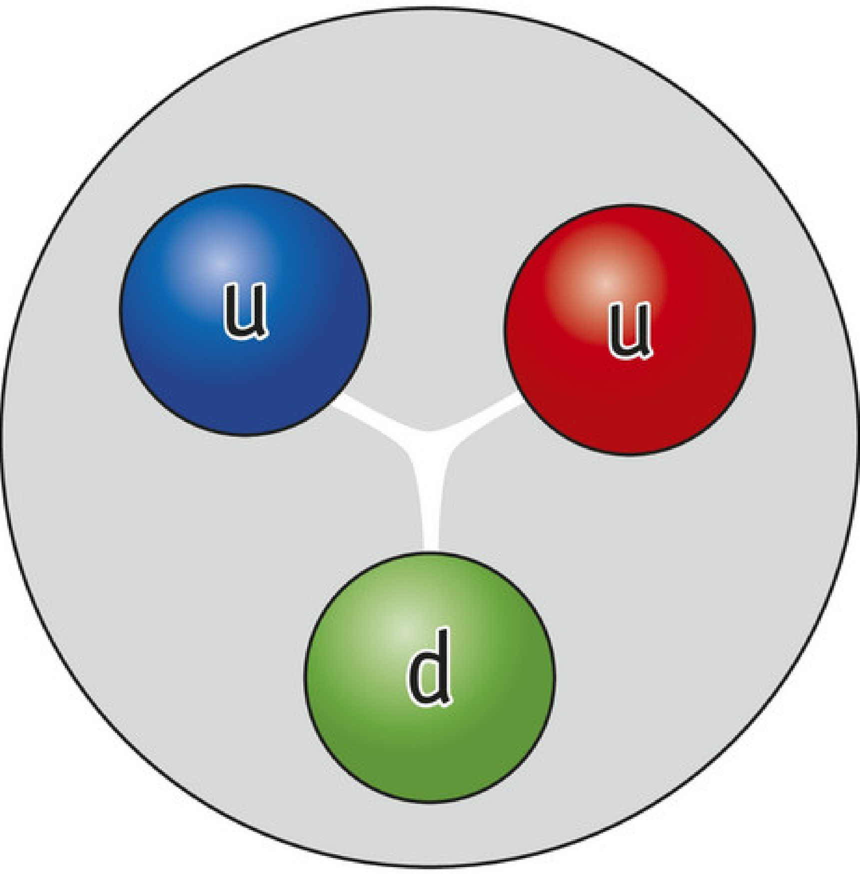

▲ **figuur 13** resultaten van verstrooiingsexperimenten voor (a) atomen en (b) protonen

Quarks zijn nog nooit vrij waargenomen. Ze worden door een zeer sterke kracht samengebonden: de **sterke kracht**, een fundamentele kracht, zoals ook de gravitatiekracht en elektromagnetische kracht fundamenteel zijn.

## Wisselwerkingsdeeltjes en lading

Het foton is dus een wisselwerkingsdeeltje dat de elektromagnetische kracht overbrengt. Dat geldt algemener in het standaardmodel: krachten worden overgebracht door het uitwisselen van wisselwerkingsdeeltjes. Dat kun je vergelijken met het overgooien van een bal, terwijl je op glad ijs staat. Op het moment dat je de bal gooit, beweeg je in tegengestelde richting, op het moment dat de andere persoon de bal vangt, beweegt deze een beetje met de bal mee. Gooier en vanger stoten elkaar dus af. Natuurlijk kun je op die manier geen aantrekkende kracht verklaren, maar het geeft wel een idee hoe een deeltje een kracht kan overbrengen.

De 'lading' van het deeltje bepaalt voor welke kracht het gevoelig is. Zo is de 'lading' van de gravitatiekracht de massa van een deeltje. Quarks zijn elektrisch geladen deeltjes, dus wisselwerken ze via de elektromagnetische kracht. Maar quarks zijn ook gevoelig voor de sterke kracht. Zoals het foton de elektromagnetische kracht overbrengt, zo brengt het gluon de sterke kracht over.
De 'lading' van de sterke kracht is kleur: een behouden grootheid. Je moet je daarbij geen echte kleur voorstellen. Omdat de sterke kracht alleen tussen quarks en niet tussen baryonen optreedt, moet een baryon 'kleurloos' zijn. Dat kan als er drie soorten kleurladingen zijn: rood, groen en blauw. De quarks in een baryon hebben alle een andere kleur, zodat ze 'opgeteld' wit zijn (figuur 14). Nu zie je waarom er voor 'kleur' als naam voor deze lading is gekozen. Er is nog een andere manier om met quarks een 'kleurloos' deeltje te maken: door een quark met een antiquark te combineren. Bijvoorbeeld rood en antirood wordt weer wit. Deze deeltjes die uit twee quarks bestaan, heten **mesonen**: 'middelmatig zware' deeltjes. In Binas tabel 26C vind je een overzicht met enkele mesonen en baryonen en de deeltjes waarin ze vervallen.




▲ **figuur 14** Quarks hebben kleur, het proton als geheel is kleurloos.

Je kunt je nu afvragen voor welke kracht het neutrino gevoelig is. Het heeft geen elektrische lading, dus is het niet gevoelig voor de elektromagnetische kracht. Het wisselwerkt maar spaarzaam, dus blijkbaar heeft het ook geen kleurlading; het is niet gevoelig voor de sterke kracht. Er moet nog een ander soort kracht zijn die de **zwakke kracht** wordt genoemd. Deze kracht is verantwoordelijk voor bètaverval en K-vangst (paragraaf 4). Niet alleen het neutrino, maar alle leptonen en quarks zijn gevoelig voor de zwakke kracht. Bij deze kracht horen drie verschillende wisselwerkingsdeeltjes. Een van die deeltjes, het W-deeltje, doet iets bijzonders: het kan een quark veranderen van soort (van up naar down, of andersom). Daardoor kan bij bètaverval een neutron in een proton veranderen.

▼ **tabel 1** wisselwerkingsdeeltjes

| deeltje (naam) | $q$ ($e$) | $m$ (MeV $c^{-2}$) | fundamentele kracht |
|---|---|---|---|
| g (gluon) | 0 | 0 | sterke kracht |
| $\gamma$ (foton) | 0 | 0 | elektromagnetische kracht |
| $W^{\pm}$ (W-plus, W-min) | ±1 | $82 \cdot 10^3$ | zwakke kracht (geladen) |
| $Z^0$ (Z-nul) | 0 | $93 \cdot 10^3$ | zwakke kracht (ongeladen) |

In tabel 1 zie je de wisselwerkingsdeeltjes samengevat. Eén soort fundamentele kracht met bijbehorend deeltje ontbreekt: de gravitatiekracht en het graviton. Einstein heeft het lang geprobeerd, maar het is nog steeds niemand gelukt: er is geen theorie die alle krachten samen beschrijft. Bovendien speelt in veel deeltjesprocessen gravitatiekracht geen enkele rol, omdat de massa's zo klein zijn en de gravitatiekracht ook relatief zwak is.

## Generaties

Tot zo ver blijken de volgende deeltjes elementair te zijn: up- en down-quark, elektron en neutrino. Maar hoe zit het met muonen, de aan elektronen verwante deeltjes die in kosmische straling voorkomen? De oplossing is te vinden in hoe deze deeltjes vervallen en het toepassen van behoudswetten.
Muonen ($\mu^-$) zijn niet stabiel en kunnen in een elektron en twee neutrino's vervallen:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \overline{\nu}$$

Omdat het elektron een lepton is met leptongetal +1, moet wegens behoud van leptongetal het muon ook een leptongetal +1 hebben. Als dat zo is, dan zou het volgende verval ook mogelijk moeten zijn:

$$\mu^- \overset{?}{\rightarrow} e^- + \gamma$$

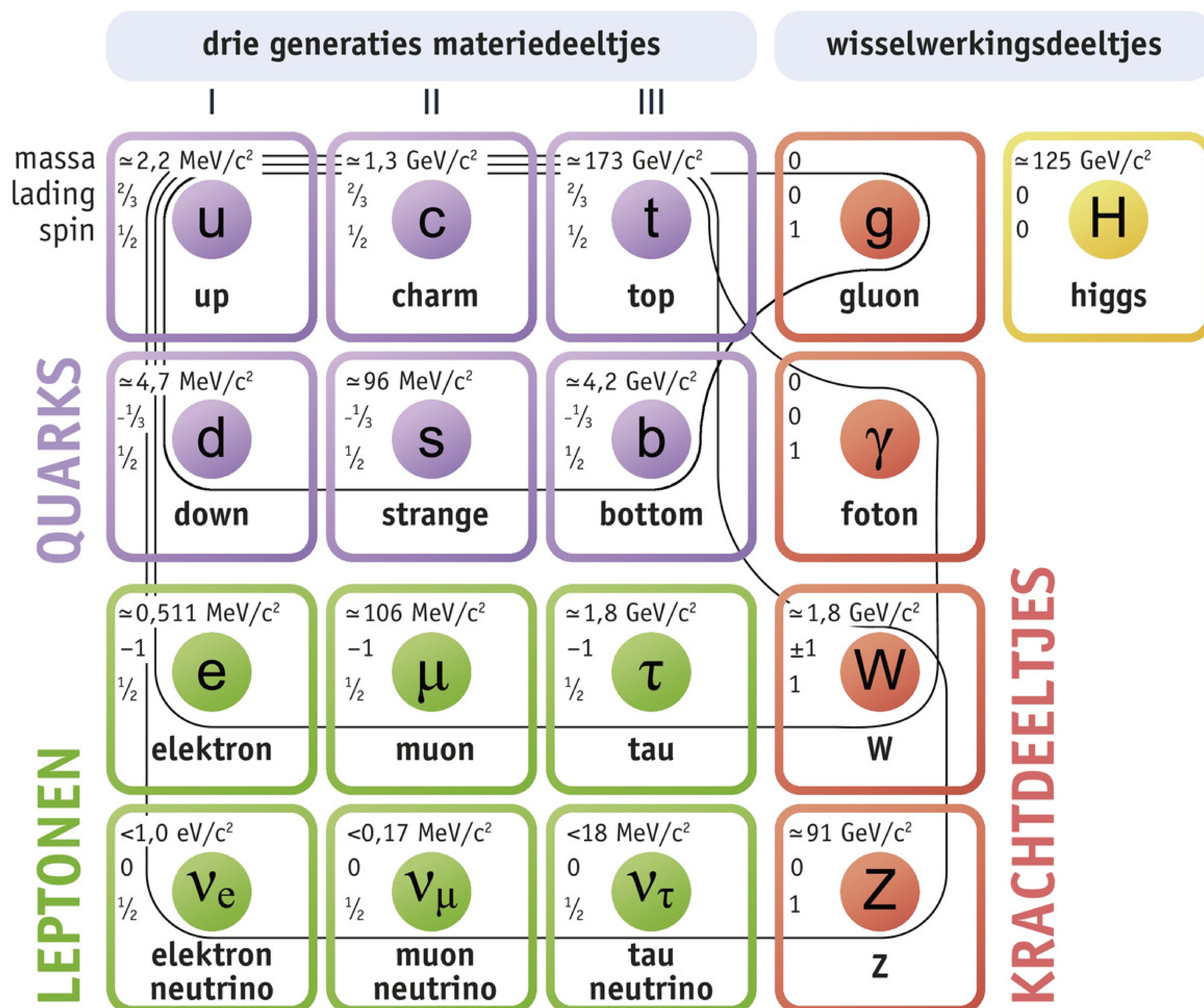
In dit verval is lading behouden, het massadefect is positief en bovendien is het leptongetal behouden. Maar toch is dit verval nog nooit waargenomen. Blijkbaar is hier een behoudswet die wordt geschonden. Het probleem is op te lossen door aan te nemen dat het muon en het elektron verschillende soorten leptonen zijn, waarbij twee verschillende leptongetallen horen. Bij een muon horen de getallen $L_\mu = +1$ en $L_e = 0$. Bij een elektron horen de getallen $L_\mu = 0$ en $L_e = +1$. Het muon kan dan niet vervallen in een elektron en een foton, omdat vóór het verval $L_\mu = +1$ en $L_e = 0$ en ná het verval $L_\mu = 0$ en $L_e = +1$. De behoudswet voor het leptongetal is dus geschonden. Als je terugkijkt naar de vervalvergelijking van het muon waarbij een neutrino en een antineutrino ontstaan, dan geldt blijkbaar voor het neutrino $L_\mu = +1$ en voor het antineutrino $L_e = -1$. In dat geval is er geen behoudswet geschonden. Er zijn dus blijkbaar twee verschillende soorten neutrino's: ze worden elektronneutrino en muonneutrino genoemd. Het verval wordt dan:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_e$$

Het muon is dus een ander soort lepton dat met zijn eigen neutrino een aparte generatie vormt. Er blijkt *nog* één andere generatie te zijn, bestaande uit het taudeeltje (soms tauon genoemd) en het tauneutrino. En zo zijn er ook drie generaties quarks; naast het up- en down-quark zijn er het strange- en charm-quark en het top- en bottom-quark. In tegenstelling tot een apart leptongetal per generatie, is er geen apart quarkgetal voor de drie generaties quarks. Het lijkt ingewikkeld, maar *alle* materie is samengesteld uit deeltjes (of antideeltjes) uit een van deze generaties (figuur 15).

## Feynmandiagrammen

Natuurkundigen willen kunnen berekenen met welke kans een bepaald deeltjesproces optreedt en wat de halveringstijd is van deeltjes die vervallen. Een probleem is dat de wisselwerking tussen deeltjes al snel heel ingewikkeld wordt. De Amerikaanse Nobelprijswinnaar Richard Feynman (1918–1988) bedacht daar een slimme oplossing voor (figuur 16). Hij tekende de verschillende deeltjesprocessen in een diagram: een **feynmandiagram**. In figuur 17a zie je een voorbeeld: twee elektronen oefenen een (coulomb)kracht op elkaar uit door het uitwisselen van een foton. De tijd loopt van onder naar boven. Je moet je dit niet letterlijk voorstellen als paden van deeltjes. Elk deel van het diagram is te vertalen naar een stukje van een formule waarmee de kans is uit te rekenen dat dit proces optreedt.




▲ **figuur 15** de deeltjes van het standaardmodel en hun eigenschappen

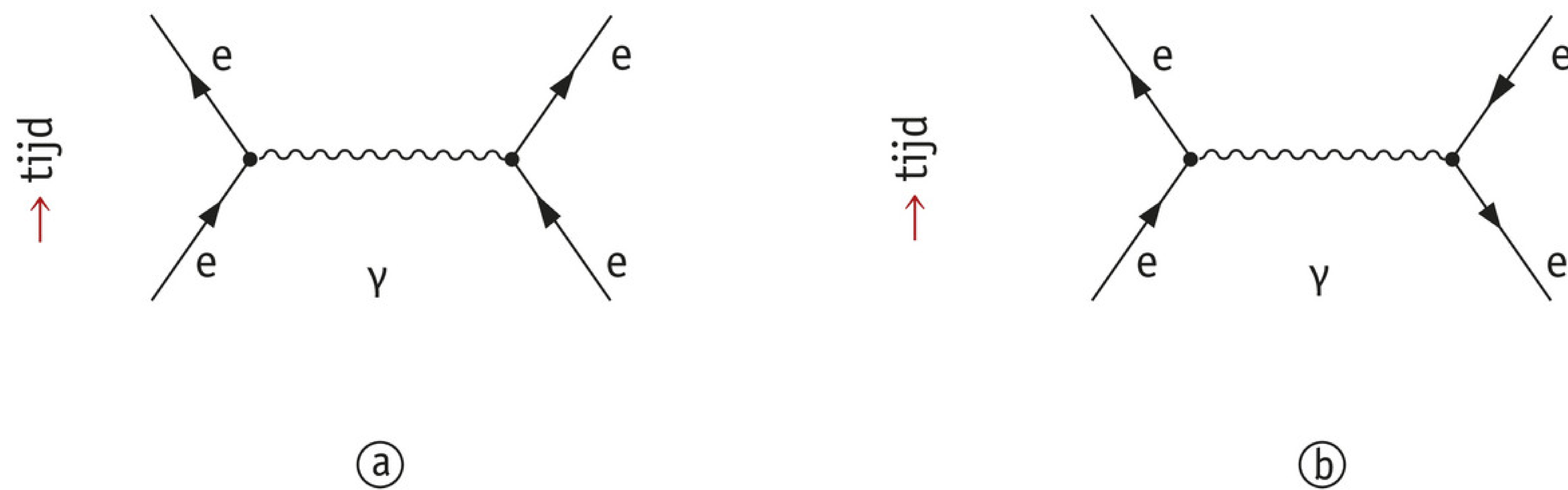


▲ **figuur 16** Richard Feynman

Alle behoudswetten en regels uit paragraaf 4 zijn in de feynmandiagrammen verwerkt. Zo is in figuur 17b kruisingssymmetrie toegepast door het rechterdeel van het diagram 180° te draaien over het fotonlijntje. De pijltjes van de twee elektronen lopen daardoor van boven naar onder, dus ‘terug in de tijd’. Dat komt overeen met een antideeltje van het elektron: het positron. Je kunt verder zien dat in elk knooppunt de lading behouden is. Je mag de diagrammen draaien en vervormen, maar niet knippen. Je kunt onderdelen toevoegen: als die maar bestaan uit het knooppunt van een inkomend elektron, uitgaand elektron en foton. Dat levert steeds ingewikkelder diagrammen op die voor mogelijke deeltjesprocessen staan.

## Higgs

Al in 1964 was voorspeld dat er nog een fundamenteel deeltje bestaat waarmee kan worden verklaard waarom de deeltjes in het standaardmodel massa hebben: het higgsdeeltje. Dit deeltje was lange tijd de heilige graal in de elementairedeeltjesfysica en een van de redenen om de




▲ **figuur 17** feynmandiagrammen van (a) de afstoting tussen twee elektronen en (b) de aantrekking tussen een elektron en een positron

LHC te bouwen (figuur 6 in paragraaf 2). De ontdekking was op 4 juli 2012 voorpaginanieuws en dat was niet zonder reden: deze vondst was een belangrijke bevestiging van de juistheid van het standaardmodel. Dat betekent niet dat de natuurkunde klaar is op dit gebied. Het staat bijvoorbeeld vast dat neutrino's een zeer kleine massa hebben. Maar het standaardmodel gaat er nog steeds van uit dat neutrino's geen massa hebben. En ook de gravitatiekracht ontbreekt nog.

## Onthoud!

- Leptonen zijn lichte elementaire deeltjes met lading $-e$. Er zijn drie soorten: elektron, muon en tau.
- Baryonen zijn 'zware' deeltjes opgebouwd uit drie quarks, zoals neutronen en protonen.
- Mesonen zijn 'middelmatig zware' deeltjes opgebouwd uit een quark en een antiquark.
- Quarks hebben een fractionele lading en wisselwerken via de sterke, de zwakke en de elektromagnetische kracht. Er zijn drie generaties quarks: up/down, strange/charm en top/bottom. Neutronen en protonen zijn opgebouwd uit up- en down-quarks.
- Het standaardmodel is de meest complete beschrijving van elementaire deeltjes en hun interacties. Het standaardmodel bevat, naast leptonen en quarks, wisselwerkingsdeeltjes die zorgen voor de overbrenging van fundamentele krachten.

## Opdrachten

**27** Drie generaties
Er zijn drie generaties leptonen.
- **a** Leg op basis van massa uit dat een muon wel in een elektron kan vervallen, maar niet in een taudeeltje.
- **b** Geef de deeltjesvergelijking voor het verval van een taudeeltje in een muon.

**28** Quarks
In Binas tabel 26C vind je een overzicht van uit quarks samengestelde deeltjes.
- **a** Noem de twee soorten samengestelde deeltjes die in deze tabel zijn vermeld.
- **b** Geef een definitie van beide soorten op basis van hun quarksamenstelling.
- **c** Controleer op basis van de quarksamenstelling van twee deeltjes van elke soort, vermeld in Binas tabel 26C, dat de lading van de deeltjes een veelvoud is van de elementaire lading $e$.

**29** Afmeting aluminiumkern
Geiger en Marsden bepaalden de afmeting van een aluminiumkern door deze te beschieten met alfadeeltjes. De moderne waarde voor de afmeting van atoomkernen is gebaseerd op beschieting met elektronen.
Geef twee argumenten waarom elektronen hiervoor geschikter zijn op basis van de eigenschappen van het elektron.

**30** Pionen
Een $\pi^+$ (positief pion) kan vervallen in een $\mu^+$ en een $\nu_\mu$.
Ga voor alle behoudswetten die in dit hoofdstuk besproken zijn na dat dit verval inderdaad mogelijk is.

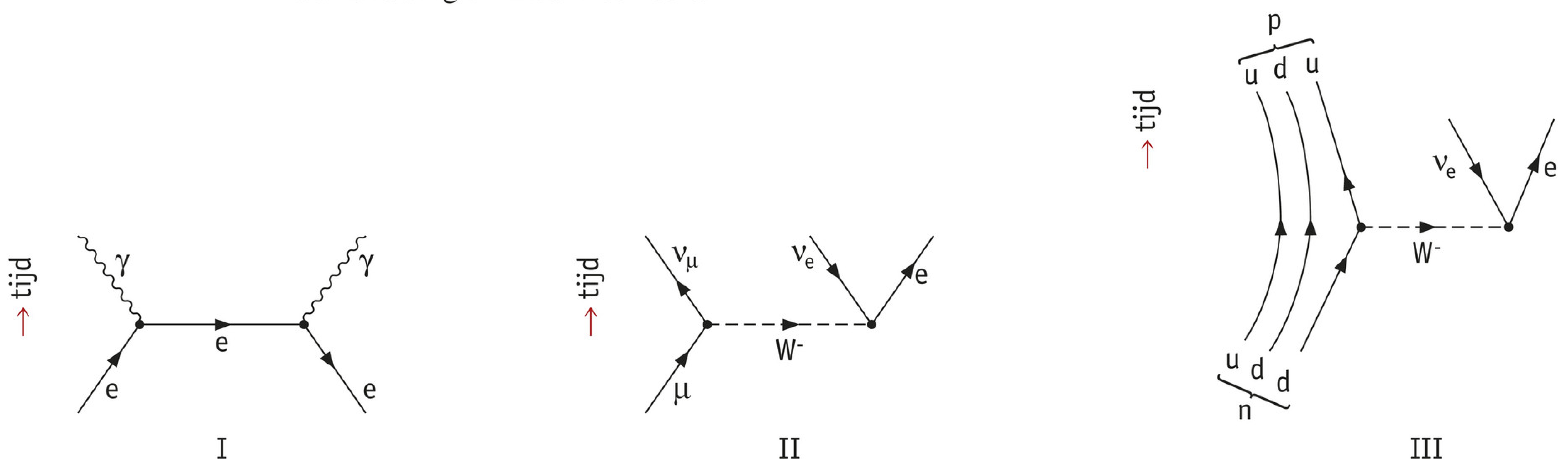
**31** Toegestaan of niet?
Het standaardmodel beperkt welke deeltjesvergelijkingen zijn toegestaan.
Ga voor de volgende deeltjesvergelijkingen na of ze binnen het standaardmodel wel of niet zijn toegestaan. Zo niet: noem ten minste één behoudswet die wordt geschonden. Maak gebruik van Binas tabel 26.

**a** $p + \overline{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^0$
**b** $e^- + p \rightarrow \nu_e + \pi^0$
**c** $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$
**d** $p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$
**e** $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$
**f** $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$
**g** $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e$
**h** $\eta_c \rightarrow 2\gamma$
**i** $p + p \rightarrow \Sigma^+ + n + K^0 + \pi^+ + \pi^0$
**j** $\pi^0 \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^0$

**32** Verval
Niet alle deeltjesprocessen zijn vervalreacties.
Leg uit in welke van de deeltjesvergelijkingen uit opdracht 31 het om het verval van een deeltje gaat.

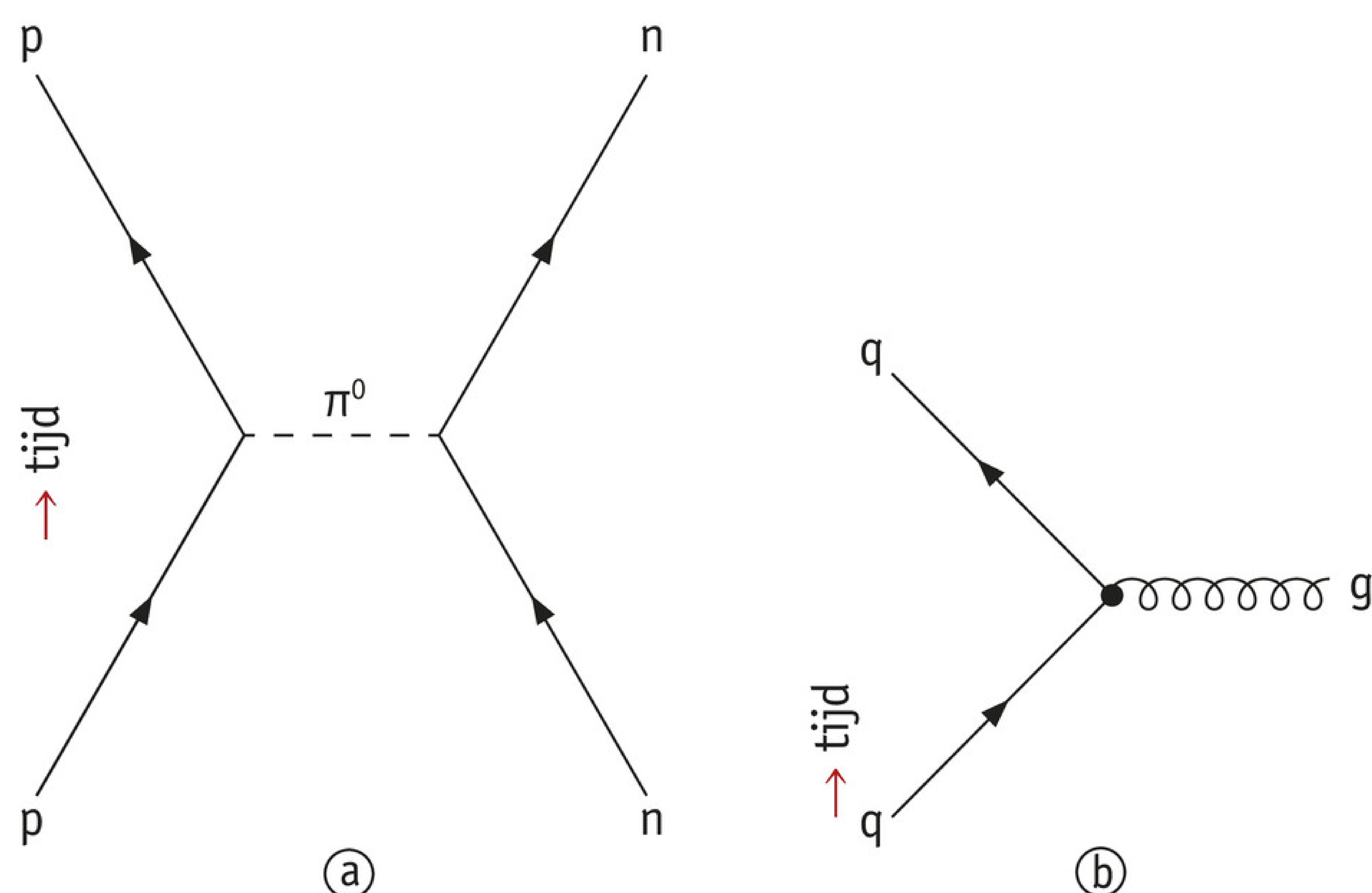
**33** Feynmandiagrammen
In figuur 18 zie je feynmandiagrammen van drie verschillende deeltjesprocessen.

**a** Geef voor elk diagram de bijbehorende deeltjesvergelijking.
**b** Geef voor elk diagram de naam van het uitgebeelde deeltjesproces.
**c** Leid uit diagram II en III af hoe groot het lepton- en quarkgetal van het $W^-$ is en welke lading en kleur het heeft.




▲ **figuur 18** drie feynmandiagrammen

**+34** Kernkracht
In figuur 19 zie je het feynmandiagram voor een van de processen die de kernkracht veroorzaakt. Een proton en een neutron trekken elkaar hier aan door uitwisseling van een $\pi^0$. Op een fundamenteler niveau zijn het de quarks in het proton, neutron en $\pi^0$ die wisselwerken via een gluon. Bijvoorbeeld: een 'blauw' up-quark verandert in een 'rood' up-quark waarbij het een gluon uitzendt. Het gluon heeft dus twee kleureigenschappen: blauw en antirood. Een gluon verandert nooit het type quark en vrije gluonen bestaan niet.



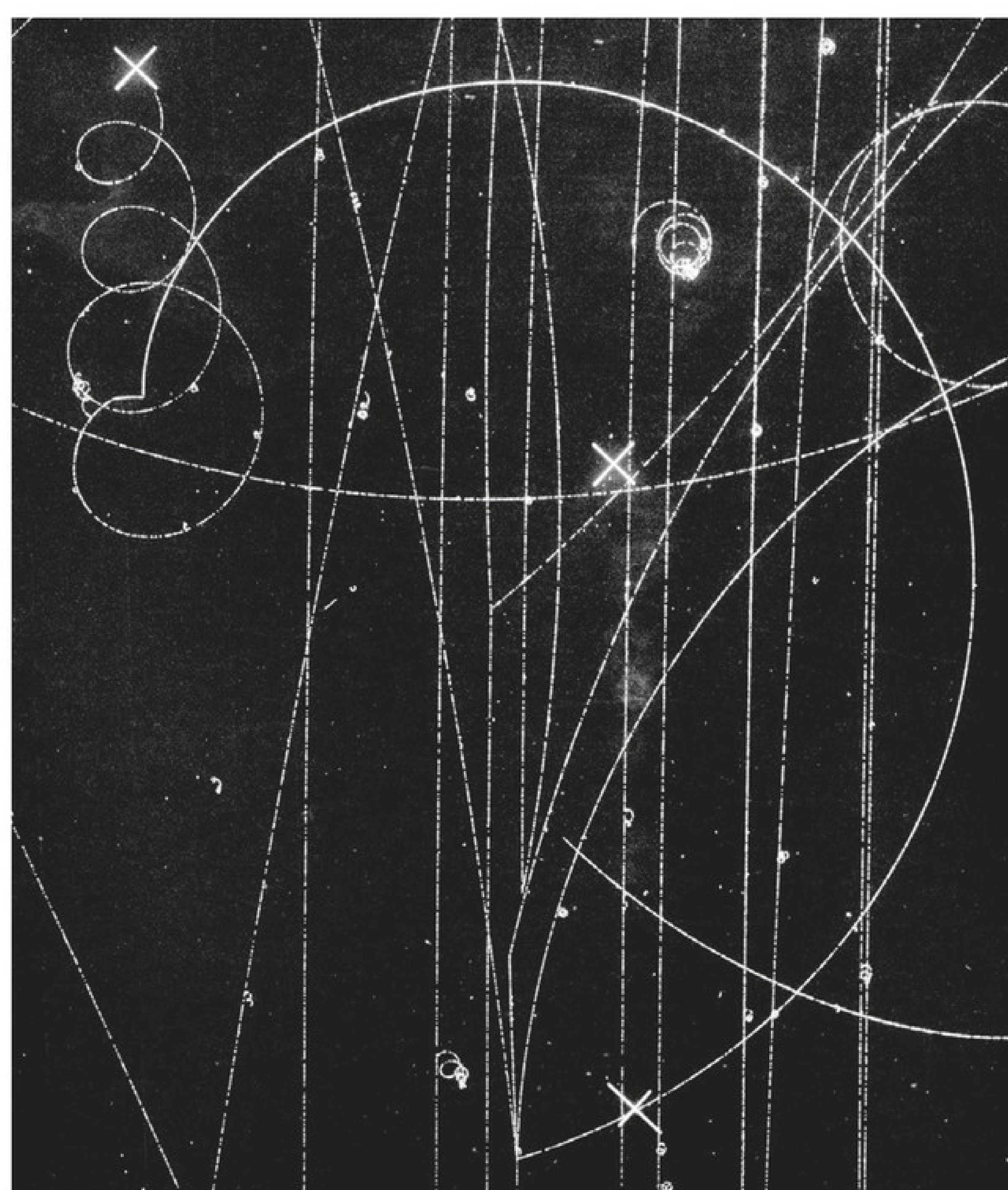

▲ **figuur 19** (a) feynmandiagram voor de aantrekking van een proton en neutron, (b) onderdeel van feynmandiagram voor een gluon (g) en twee quarks (q)

Teken het feynmandiagram op quarkniveau behorende bij figuur 18. Teken eerst de quarklijnen die horen bij het proton, neutron en $\pi^0$. Verbind ze daarna met gluonlijnen. In figuur 19b zie je een voorbeeld van hoe een gluonlijn koppelt aan twee quarks.

## Eindopdracht

**35** Een bellenvatfoto analyseren

In figuur 20 zie je een opname van een bellenvat, gemaakt in CERN. In werkelijkheid is de hoogte 40 cm. Van onderin de foto komen negatieve kaonen ($K^-$); dat zijn de vrijwel verticale lijnen. Het bellenvat is gevuld met vloeibare waterstof.



▲ **figuur 20** een bellenvatopname

**a** Beschrijf de werking van een bellenvat.
**b** Welke moderne methoden hebben het bellenvat vervangen?
**c** Wat voor soort deeltje is een kaon?
**d** Bepaal met behulp van de lorentzkracht de richting van het magneetveld in het bellenvat.

De kaonen komen met een energie van 8,2 GeV binnen en botsen met de protonen in de vloeibare waterstof waarbij andere mesonen en hadronen ontstaan.

**e** Leg uit via welke fundamentele kracht de kaonen en protonen in dat geval wisselwerking hebben.

In figuur 20 zijn ook achtergrondsporen te zien die niets met de kaonen te maken hebben.

**f** Noem twee mogelijke bronnen van deze achtergrondsporen.

In figuur 21 zijn de achtergrondsporen verwijderd zodat alleen nog de sporen te zien zijn die met de kaonen te maken hebben. Onder in de foto is een botsing te zien met een proton (punt A). Er zijn vier uitgaande sporen zichtbaar.

**g** Leg uit dat deze botsing niet te vergelijken is met botsende biljartballen.

**h** Bepaal van elk van de uitgaande deeltjes welke lading ze hebben. Maak hiervoor gebruik van ladingbehoud.

Het deeltje dat met een grote boog vanuit punt A tegen de klok in beweegt, is een pion ($\pi^+$). Voor deeltjes met relativistische snelheden geldt het verband $p = B \cdot q \cdot r$, met $r$ de straal van de baan in het magneetveld ($B$ = 1,78 T). De energie van een relativistisch deeltje is: $E = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4}$

**i** Bepaal met behulp van figuur 21 de impuls van het $\pi^+$ en toon daarmee aan dat het een totale energie (rustenergie en kinetisch) heeft van $1{,}8 \cdot 10^2$ MeV.

**j** Leg uit waar deze kinetische energie vandaan komt.

Er blijkt ook nog een ongeladen deeltje bij de botsing gevormd te zijn.

**k** Waarom is hiervan geen spoor te zien?

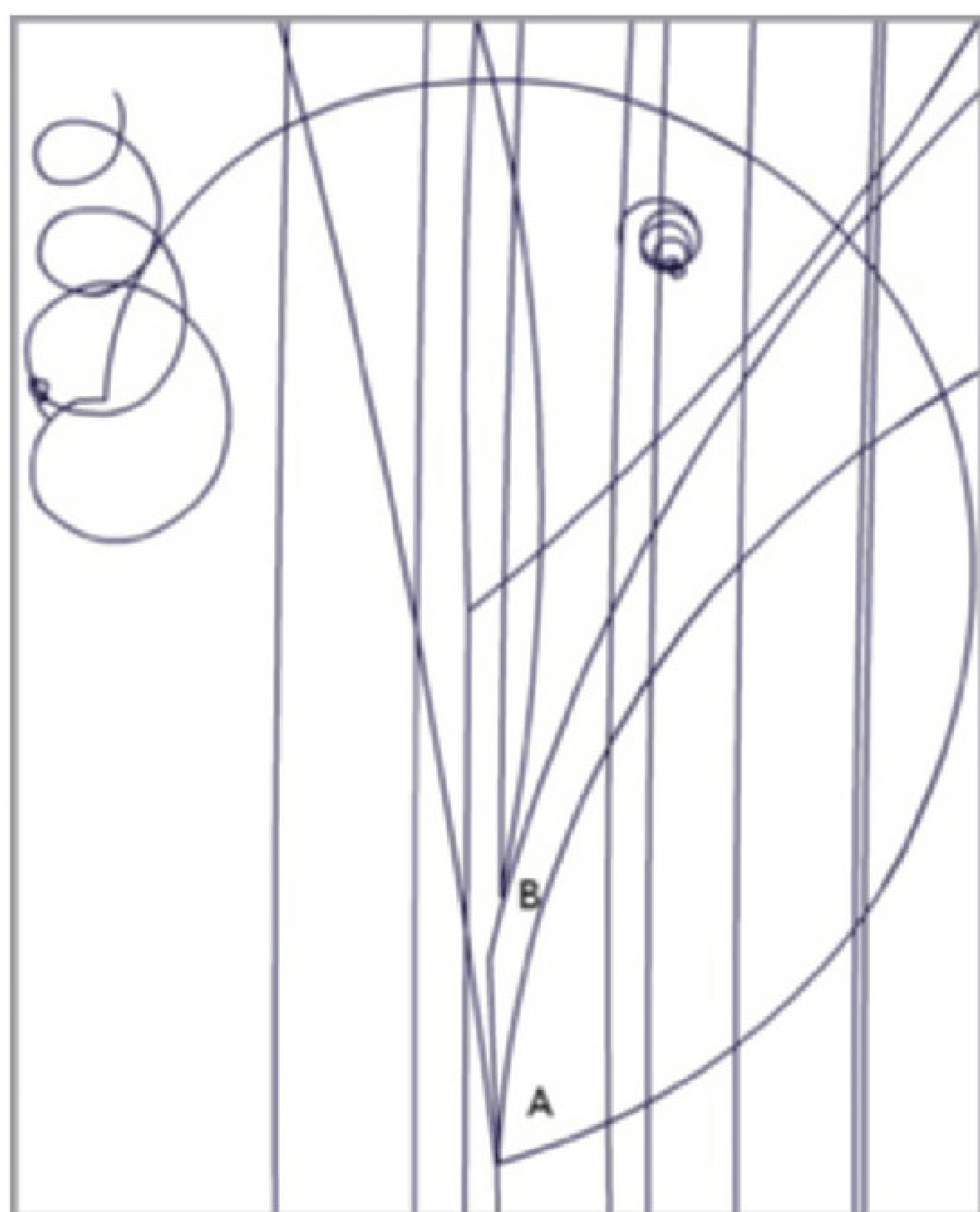
**l** Hoe kun je zien dat het ongeladen deeltje bij punt B weer vervalt?

De deeltjes die in een deeltjesversneller ontstaan, zijn gerust exotisch te noemen: in het dagelijks leven spelen ze geen rol.

**m** Welke elementaire deeltjes vormen vrijwel alle materie om ons heen?

**n** Verklaar waarom materie om ons heen uit juist deze deeltjes bestaat en niet uit deeltjes van de andere generaties van het standaardmodel.

**o** Maak een beredeneerde schatting van het aantal quarks waaruit jouw lichaam bestaat.




▲ **figuur 21** een opgeschoond beeld van de bellenvatopname van figuur 20 (de getoonde hoogte is in werkelijkheid 40 cm)

# 6 Practicum

## EXPERIMENT 1 Elektroscoop

**Inleiding**
Een van de oudste methoden om ioniserende straling waar te nemen maakt gebruik van de elektroscoop. Met behulp van een elektroscoop is bijvoorbeeld kosmische straling ontdekt. Met een elektroscoop is lading zichtbaar te maken.

**Onderzoeksvraag**
Hoe kan met een elektroscoop ioniserende straling worden waargenomen?

**Benodigdheden**
elektroscoop; stopwatch; pvc-buisje; kunststof doekje; lucifer of brander; bron van ioniserende straling (natuurlijk, kunstmatig of uv)

**Uitvoering**
- Zorg ervoor dat er geen bronnen van ioniserende straling in de buurt van de elektroscoop aanwezig zijn.
- Laad de elektroscoop door het pvc-buisje met het kunststof doekje op te wrijven en de elektroscoop aan te raken. Zorg in dit experiment steeds voor eenzelfde uitslag van de elektroscoop.
- Neem vervolgens waar hoelang een bepaalde afname van de lading duurt. Noteer dit.
- Herlaad de elektroscoop en houd er een vlammetje bij. Neem opnieuw waar hoelang het ontladen duurt.
- Herlaad de elektroscoop en plaats hem in de buurt van een bron. Neem opnieuw waar hoelang het ontladen duurt.
- Onderzoek of het ontladen buiten even snel, sneller of langzamer gaat dan binnen.
- Onderzoek of het ontladen even snel, sneller of langzamer gaat wanneer de bron verder weg van de elektroscoop staat.

**Verwerking**

1 Beschrijf kort hoe de elektroscoop werkt: waarom geeft de meter een uitslag als de elektroscoop geladen is?
2 Geef een mogelijke verklaring voor het ontladen van de elektroscoop door het vlammetje.
3 Vergelijk het ontladen met of zonder bron van ioniserende straling: wat gaat het snelst?
4 Wanneer gaat het ontladen sneller: als de bron dichtbij of veraf staat?
5 De lucht rond de plaatjes van de elektroscoop wordt door de straling geïoniseerd. Verklaar waarom dit tot gevolg heeft dat de elektroscoop ontlaadt.
6 Beschrijf hoe je de elektroscoop zou kunnen ijken zodat hij een meetinstrument wordt voor de intensiteit van ioniserende straling.

**Conclusie**
7 Beantwoord de onderzoeksvraag.

## EXPERIMENT 2 Gausskanon

**Inleiding**
Bindingsenergie treedt niet alleen op bij kernen. Bij elke aantrekkende kracht is er sprake van bindingsenergie. Het effect van bindingsenergie en kernsplijting is te demonstreren met een gausskanon.

**Onderzoeksvraag**
Hoe kan bindingsenergie door splijting vrijkomen?

**Benodigdheden**
plastic rail (kabelgoot); 11 stalen kogeltjes; 5 even grote magnetische kogeltjes; sterk plakband

**Uitvoering**
- Bouw de opstelling van figuur 22. Plak steeds een magnetisch en stalen kogeltje vast en plaats aan de rechterkant een stalen kogeltje (niet vastgeplakt). Maak vijf van deze sets kogeltjes.
- Laat nu van links (in de tekening) zachtjes een stalen kogeltje tegen het magnetische kogeltje rollen en neem waar wat er gebeurt.
- Laat het vrijgekomen kogeltje opnieuw van links tegen de kogeltjes aanrollen en neem waar wat er gebeurt.

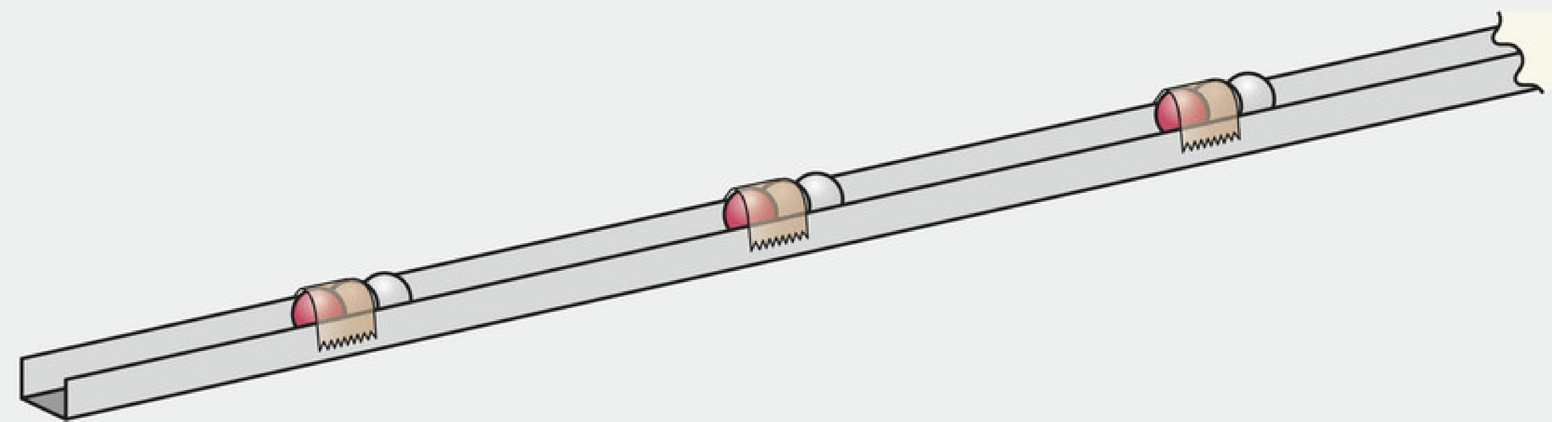
- Herhaal het experiment door de kogeltjes in de beginpositie van figuur 22 te brengen.

**Verwerking**

1. Beschrijf beknopt je waarnemingen.
2. Door welke kracht zijn de stalen kogeltjes gebonden?
3. Welk kogeltje is het sterkst gebonden: het kogeltje dat tegen het magnetische kogeltje aanrolt, of het kogeltje dat wegschiet? Welk van deze kogeltjes heeft de grootste bindingsenergie?
4. Verklaar waarom er niets gebeurde toen je, na de eerste 'lancering', het stalen kogeltje opnieuw in de opstelling liet rollen.
5. Verklaar waar de energie vandaan is gekomen die het laatste kogeltje als kinetische energie heeft meegekregen. Denk hierbij aan wat je in de laatste stap van de uitvoering hebt moeten doen om de opstelling terug te brengen in de beginpositie.
6. Vergelijk het experiment met kernsplijting en beschrijf overeenkomsten en verschillen.

**Conclusie**

7. Beantwoord de onderzoeksvraag.



▲ **figuur 22** opstelling voor het gausskanon: de magnetische kogeltjes zijn roodgekleurd

## OPEN ONDERZOEK Bouw je eigen nevelvat

**Inleiding**

Het bellenvat is een mooi instrument om de sporen van deeltjes te tonen. Het nevelvat is een oudere, analoge techniek, die gebruikmaakt van condensatie in een damp ten gevolge van ionisaties. Het eerste, werkende nevelvat uit 1911 is ontwikkeld door Charles Wilson, die onderzoek deed naar wolkenvorming. In een nevelvat bevindt zich water- of alcoholdamp in een verzadigde toestand. Dat betekent dat de damp bij de geringste verstoring zal condenseren. Wanneer een deeltje door de damp beweegt en op zijn weg atomen of moleculen ioniseert, zal de damp gemakkelijk rond die ionen condenseren. Het gevolg is een spoor dat duidelijk zichtbaar is. Het nevelvat is tot ruwweg 1950 gebruikt in onderzoek.
In dit open onderzoek bouw je je eigen nevelvat waarmee je verschillende natuurlijke bronnen van ioniserende straling bekijkt.

**Onderzoeksvragen**

1. Hoe bouw je je eigen nevelvat?
2. Welke straling is met het nevelvat zichtbaar te maken?
3. Welke verschillen zijn er zichtbaar in het nevelvat afhankelijk van de plaats waar het nevelvat wordt geplaatst?
4. Is de lorentzkracht op de stralingsdeeltjes met een magneet zichtbaar te maken?

**Praktisch**

Op internet zijn verschillende handleidingen te vinden hoe je een nevelvat kunt bouwen. Er zijn verschillende methoden en ze zijn niet allemaal geschikt voor op school. Zoek dus eerst een aantal mogelijke ontwerpen en kies dan de meest geschikte.

# Antwoorden

Hier vind je de numerieke antwoorden op de vragen in het boek.
De volledige uitwerkingen staan in het uitwerkingenboek.

## 12 Quantumwereld

### Praktijk

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **a** | blauw foton: $4{,}23\cdot10^{-19}$ J |
| | | groen foton: $3{,}91\cdot10^{-19}$ J |
| | **b** | $0{,}32\cdot10^{-19}$ J |

### Theorie

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **a** | $1{,}602\,176\,565\cdot10^{-19}$ C |
| **2** | **a** | 25 km |
| | **b** | $4\cdot10^{14}$ m |
| **3** | **a** | $3{,}81\cdot10^{17}$ |
| | **b** | $4{,}93\cdot10^{26}$ |
| **4** | **a** | 2,86 eV |
| | **b** | 434 nm |
| **6** | **b** | 656 nm; 486 nm; 434 nm |
| **13** | | $2{,}7\cdot10^{-10}$ m |
| **15** | **a** | $2{,}65\cdot10^{-38}$ m |
| | **b** | $3{,}73\cdot10^{-63}$ m |
| | **c** | $2{,}61\cdot10^{-11}$ m |
| | **d** | $2\cdot10^{-9}$ m |
| **20** | **a** | 1,0 ms |
| | **b** | $1{,}3\cdot10^{8}$ m s$^{-1}$ |
| | **c** | $1{,}3\cdot10^{5}$ m |
| **24** | **b** | $2{,}7\cdot10^{-18}$ J |
| **25** | **e** | $4\cdot10^{-12}$ m |
| **+27** | **c** | MHz; $10^{2}$ kHz; $10^{2}$ GHz |
| **+36** | **d** | $1{,}3\cdot10^{-11}$ m |
| **38** | **a** | $1{,}1\cdot10^{-5}$ m |
| | **d** | $10^{-10}$ m |
| **39** | **b** | $+3{,}3\cdot10^{-24}$ kg m s$^{-1}$ of |
| | | $-3{,}3\cdot10^{-24}$ kg m s$^{-1}$ |
| | **d** | $3{,}3\cdot10^{-24}$ kg m s$^{-1}$ |
| **40** | **c** | 0,3 m en 0,06 kg |
| | **d** | $3\cdot10^{-65}$ J |
| **41** | **c** | $10^{10}$ |
| | **d** | $5\cdot10^{6}$ |
| **+43** | **b** | $6{,}6\cdot10^{-6}$ m |
| **45** | **c** | $1{,}8\cdot10^{-10}$ m |
| **46** | **c** | 13,6 eV |
| **48** | **c** | 2 |
| **58** | **c** | $2{,}9\cdot10^{13}$ Hz |

## 13 Gravitatie

### Praktijk

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **f** | $3{,}6\cdot10^{7}$ m |

### Theorie

| | | |
|---|---|---|
| **3** | **a** | $3{,}541\cdot10^{22}$ N |
| | **b** | $1{,}98\cdot10^{20}$ N |
| | **c** | $7{,}0\cdot10^{2}$ N |
| | **d** | $2\cdot10^{-7}$ N |
| **4** | | $5{,}6\cdot10^{-6}$ m s$^{-2}$ |
| **5** | **b** | 32 km |
| **6** | **b** | 38,5 km |
| **7** | **c** | $2\cdot10^{-4}$ ° |
| **+9** | **c** | $2{,}9\cdot10^{-7}$ N |
| **13** | **a** | $2{,}0\cdot10^{2}$ N |
| | **b** | $2{,}0\cdot10^{2}$ N |
| | **c** | 0,050 m s$^{-1}$ |
| | **d** | 100 kg m s$^{-1}$ |
| **15** | **b** | 0,20 m s$^{-2}$ |
| **18** | **a** | $4{,}0\cdot10^{8}$ N |
| **19** | | 11 km s$^{-1}$ |
| **21** | **a** | $-7{,}62\cdot10^{28}$ J |
| | **b** | $-6{,}52\cdot10^{31}$ J |
| | **c** | $6{,}53\cdot10^{31}$ J |
| **22** | | $7{,}1\cdot10^{4}$ m s$^{-1}$ |
| **23** | **b** | $1{,}1\cdot10^{7}$ N |
| **+24** | **b** | $-2\cdot10^{41}$ J |
| | **c** | $7{,}0\cdot10^{6}$ K |
| **27** | **a** | 0,127 m |
| | **b** | 1,82 s |
| | **c** | 0,439 m s$^{-1}$ |
| **29** | **a** | 41 m s$^{-2}$ |
| | **b** | $3{,}1\cdot10^{3}$ N |
| | **c** | $1{,}9\cdot10^{3}$ N |
| **30** | **a** | 24 h |
| | **e** | $3{,}6\cdot10^{7}$ m |
| **31** | **b** | 0,117 AE |
| **32** | **a** | 9,863 m s$^{-2}$ |
| | **b** | 9,797 m s$^{-2}$ |
| | **e** | 9,764 m s$^{-2}$ |
| **35** | | 1 |
| **39** | **b** | 8 |
| **40** | **a** | $1{,}7\cdot10^{6}$ y |
| | **d** | $2{,}36\cdot10^{-16}$ kg m$^{-3}$ |
| **41** | **d** | $2{,}4\cdot10^{5}$ s |
| | **e** | 0,6 m s$^{-1}$ |
| | **f** | $34{,}2\cdot10^{3}$ m s$^{-1}$ |
| | **i** | $8{,}7\cdot10^{11}$ m |

## 14 Natuurwetten en modellen

### Theorie

| | | |
|---|---|---|
| **2** | **a** | 3,0 W |
| | **b** | 1,3 W |
| **3** | **a** | ½ |
| **6** | **e** | $2{,}415\cdot10^{3}$ K |
| **10** | **a** | 0,22 m |
| | **b** | $8{,}3\cdot10^{3}$ s |
| | **c** | $4{,}1\cdot10^{2}$ s |
| **11** | **a** | 4,1 m s$^{-1}$ |
| | **b** | 58 m s$^{-1}$ |
| **12** | **a** | 2,0 MBq |
| | **b** | $3{,}1\cdot10^{3}$ dagen |
| **13** | **a** | 2,2 mSv |
| | **b** | $1{,}0\cdot10^{17}$ Bq |
| **15** | **c** | 2,78 N m$^{-1}$ |
| **16** | **a** | $1{,}6\cdot10^{-3}$ V |
| | **e** | 0,32 V |
| | **f** | 0,30 V |
| **18** | **a** | 47 m s$^{-1}$ |
| | **b** | 44 m |
| **19** | **a** | $-2{,}8\cdot10^{6}$ J |
| | **b** | $2{,}4\cdot10^{3}$ m s$^{-1}$ |
| **23** | **b** | $5{,}5\cdot10^{-22}$ N s |
| **24** | **a** | 23 |
| | **b** | 11 W |
| | **c** | 13,4 V |
| **28** | **a** | $1{,}83\cdot10^{-3}$ s |
| | **b** | 3,79 s$^{-1}$ |
| **30** | **e** | 7,99 s |
| **31** | **a** | 6,28 s |
| | **f** | 2 |
| **32** | **a** | 5,7° |
| **33** | **c** | 360 W |
| **35** | **a** | $10^{22}$ |
| | **b** | $10^{11}$ |
| | **c** | 10 |

| | | |
|---|---|---|
| 36 | b | 2531 s |
| | d | 2532 s |
| | e | 7,91 km s$^{-1}$ |
| | f | 2532 s |
| 39 | b | 0,141 nm; 0,121 nm |
| 41 | b | $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ m |
| | c | 8,0 cm |
| 42 | a | –½ |
| 43 | a | 1,8 km |
| | e | 18 kW |
| 46 | b | 6,9% |
| | d | 50 427 s |

# 15 Relativiteit

## Praktijk

| | | |
|---|---|---|
| 1 | a | 2 m s$^{-1}$ |
| | c | $3 \cdot 10^{4}$ m |
| 3 | a | $0{,}999\,999\,999\,95 \cdot c$ |
| | b | $6 \cdot 10^{-5}$ m |

## Theorie

| | | |
|---|---|---|
| 2 | a | 20 m s$^{-1}$ |
| 4 | d | $1{,}4 \cdot 10^{5}$ J |
| | e | $1{,}4 \cdot 10^{5}$ J |
| | f | $1{,}3 \cdot 10^{5}$ J |
| 6 | a | $x_{begin} = 2{,}0$ m; $x_{eind} = 4{,}0$ m |
| | b | 2,0 m |
| | c | $x'_{begin} = 2{,}0$ m; $x'_{eind} = 4{,}0$ m |
| | d | $x'_{begin} = 1{,}7$ m; $x'_{eind} = 3{,}7$ m |
| | e | $x'_{begin} = 1{,}1$ m; $x'_{eind} = 3{,}1$ m |
| | f | 2,0 m |
| 7 | a | $\frac{2}{7}c$ |
| | b | $\frac{5}{7}c$ |
| 12 | a | 0,3 m s$^{-1}$ |
| | b | 0,50 m s$^{-1}$ |
| | c | 0,23 m s$^{-1}$ |
| 14 | a | $3{,}0 \cdot 10^{8}$ m s$^{-1}$ |
| | b | $3{,}0 \cdot 10^{8}$ m s$^{-1}$ |
| | e | $c$ |
| +15 | a | $3{,}3 \cdot 10^{-9}$ s |
| | b | $8{,}0 \cdot 10^{-9}$ s |
| | c | $8{,}4 \cdot 10^{-19}$ s |
| 17 | a | 1,000 01 |
| | b | 1,001 |
| | c | 1,15 |
| | e | $0{,}417 \cdot c$ |
| 19 | b | $5{,}0 \cdot 10^{-15}$ |
| | c | $4{,}2 \cdot 10^{3}$ m s$^{-1}$ |
| 21 | a | $5{,}0 \cdot 10^{-12}$ m |
| | b | $5{,}0 \cdot 10^{-13}$ y |
| | c | $2{,}0 \cdot 10^{12}$ y |
| 22 | a | $2{,}0 \cdot 10^{8}$ m s$^{-1}$ |
| | b | 8 y |
| 23 | a | $6{,}5 \cdot 10^{2}$ m |
| | b | $2{,}3 \cdot 10^{-3}$% |
| | e | 9,6% |
| 26 | a | $x' = 0$ ls; $t' = 0$ s |
| | b | $x' = 1{,}2$ ls; $t' = 1{,}2$ s |
| | c | $x' = 1{,}8$ ls; $t' = 0$ s |
| | d | $x' = 0$ ls; $t' = 1{,}8$ s |
| | e | $x = 0$ ls; $t = 0$ s |
| | f | $x = 3{,}4$ ls; $t = 3{,}4$ s |
| 27 | a | $x' = 0$ ls; $t' = 0$ s |
| | b | $x' = 1{,}15$ ls; $t' = 1{,}15$ s |
| | c | $x' = 1{,}73$ ls; $t' = 0$ s |
| | d | $x' = 0$ ls; $t' = 1{,}73$ s |
| 28 | a | $0{,}6 \cdot c$ |
| | c | 1 ls |
| | d | $3{,}0 \cdot 10^{5}$ km |
| | e | 0,8 ls |
| | f | 1,25 |
| 29 | c | 0,8 ls |
| 30 | a | $5{,}7 \cdot 10^{-7}$ ° |
| | b | $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ m |
| | c | $3{,}0 \cdot 10^{6}$ m s$^{-1}$ |
| 36 | e | $0{,}1 \cdot c$ |
| 37 | a | $2{,}6 \cdot 10^{8}$ m s$^{-1}$ |
| | b | $1{,}9 \cdot 10^{6}$ m s$^{-1}$ |
| | c | $1{,}9 \cdot 10^{6}$ m s$^{-1}$ |
| | d | 79 kV |
| | e | 3,1 MV |
| 39 | d | $0{,}995 \cdot c$ |

# 16 Kern- en deeltjes-processen

## Praktijk

| | | |
|---|---|---|
| 2 | a | $3 \cdot 10^{14}$ m$^{-2}$ |
| | b | $8 \cdot 10^{16}$ |
| | c | $2 \cdot 10^{-14}$ % |

## Theorie

| | | |
|---|---|---|
| 5 | a | $7{,}6 \cdot 10^{10}$ m s$^{-1}$ |
| 9 | c | 23 m s$^{-1}$ |
| 10 | e | $4{,}9 \cdot 10^{-15}$ m |
| 11 | a | $1{,}3 \cdot 10^{11}$ m s$^{-1}$ |
| | b | $2{,}50 \cdot 10^{-12}$ J m$^{-1}$ |
| +12 | b | 43 : 1 |
| | c | 1833 : 1 |
| | d | $3{,}4 \cdot 10^{6}$ : 1 |
| 13 | | $1{,}64 \cdot 10^{-13}$ J |
| 14 | a | 5,79 MeV |
| | b | 0,16 MeV |
| 15 | | 8,770 2 MeV |
| 16 | d | 10,648 MeV |
| | f | 5,701 MeV |
| 17 | a | 3,517 9 MeV |
| | | 3,670 6 MeV |
| 18 | a | $3{,}85 \cdot 10^{26}$ W |
| | b | $4{,}28 \cdot 10^{9}$ kg |
| | e | 24,687 MeV |
| +19 | a | 88 572 |
| | b | $3 \cdot 10^{-6}$ J |
| | c | 0,72% |
| 23 | a | −0,000 083 99 u |
| +25 | a | $2{,}67 \cdot 10^{5}$ m s$^{-1}$ |
| +26 | c | $3{,}26 \cdot 10^{5}$ m s$^{-1}$ |
| | d | 1,02 MV |

# Register

# Colofon

**Auteurs**
Hans van Bemmel
Lodewijk Koopman

**Eindredactie**
Claud Biemans, Frontlinie

**Met medewerking van**
Fons Alkemade

**Ontwerp**
Uitgeverij Malmberg, 's-Hertogenbosch

**Foto omslag**
COLIN Matthieu / hemis.fr

**Opmaak**
Nieuwe Stijl, Den Haag

**Beeldverwerving**
B en U, Amsterdam

**Technisch tekenwerk**
Sittrop Grafisch Realisatiebureau, Rotterdam; Erik Eshuis Infographics, Groningen

**Beeldverantwoording**
123RF: 14.36 ; Adrian Hillman / 123RF: 14.5; Alexander Wekkeli / Fraunhofer Institut: 14.37; Andrew Lambert Photography / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: 12.5a, 12.5b; Armin Behrend / Look at Science / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: Praktijk 13.2; Babak Tafreshi / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: Hoofdstukopener 16; Bart van Overbeeke / Eindhoven University of Technology: Praktijk 14.3; Bob Daemmrich / Alamy Stock Photo / Imageselect, Wassenaar: Praktijk 14.0; Boekomslag: Le Petit Prince, Antoine de Saint-Exupery, Gallimard: 13.4; CCFE, JET: 16.11; CERN / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: Praktijk 16.1, 16.6; CERN: 16.21; Charles Mazel / Visuals Unlimited Ltd / Getty Images: Praktijk 12.1b; Colin Cuthberth / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: Hoofdstukopener 12; Daliz Ontwerp, Den Haag: 12.13, 12.18, 12.19, 12.20., 12.21, 12.26, 12.28, 12.30, 13.26, 14.12, 15.5, 15.12, 15.19, 16.12; Daria Melnyk / EyeEm / Hollandse Hoogte, Den Haag: Hoofdstukopener 15; Dave de Bruin / Daliz Fotografie, Den Haag: 13.25; Dept. of Physics / Imperial College / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: 12.2; Doug Perrine / NaturePL / Hollandse Hoogte, Den Haag: Praktijk 12.0; Dr. Tonomura and Belsazar / https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit_experiment_results_Tanamura_2.jpg: 12.11; Erik Eshuis Infographics, Groningen: 12.4, 12.10, 12.31, 12.39, 12.48, 12.49, 13.2, 13.5, 13.6, 13.7, 13.8, 13.13, 13.14, 13.16, 13.19, 13.23, 13.24, 13.30, 13.33, 14.14, 14.15, 14.18, 14.20, 14.22, 14.23, 14.25, 14.28, 14.32, 14.35, 14.39, 14.45, 15.2, 15.4, 15.7, 15.10, 15.14, 15.22, 16.4, 16.10, 16.13, 16.17, 16.18, 16.22; ESA: Praktijk 13.3, 13.27; European Space Agency / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: Praktijk 13.1; Examen VWO Natuurkunde 2009: 13.11, 13.12; Examen VWO Natuurkunde 2011: 13.31; Examen VWO Natuurkunde 2015: 14.4; Examen VWO Natuurkunde 2018: 14.6, 14.7, 14.16, 14.41, 14.42 r, 14.43, 14.44; Examen VWO Natuurkunde 2019: 12.43, 12.44, 12.45; Eye of Science / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: 12.14, 12.36; Hafele and Keating Time magazine 18 oktober 1971: 15.13; Hafiz Johari / Shutterstock: 13.21b; Hannes Grobe / AWI / https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fluorescent_minerals_hg.jpg: 12.34; HHMI - UCSD/ La Jolla, Californiië: Praktijk 12.4; https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HAtomOrbitals.png: 12.33; Jenson / Shutterstock: Hoofdstukopener 14; Job Verkruisen / Solar Team Twente: Praktijk 14.1; Joe Munroe / Getty Images: 16.16; John Raoux / Associated Press / Hollandse Hoogte, Den Haag: Hoofdstukopener 13; Jos Lammers / Hollandse Hoogte, Den Haag: 13.20; Jürgen Pröll / 123RF: 14.3; Kamioka Observatory, ICRR, The University of Tokyo/ SK Images, Tokyo: Praktijk 16.0; KM3Net / Edward Barber / Nikhef: Praktijk 16.3; magnetix / Shutterstock: 12.47; Marek Mierzejewski / Shutterstock: 12.1; Mario de Leo / https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rotation_curve_of_spiral_galaxy_Messier_33_(Triangulum).png: 14.40; Mark Garlick / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: Praktijk 13.0; Matthew Antonino / 123RF: 14.2; Michelson, A. A.; Morley, E. (1887). "On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether". American Journal of Science 34 (203): 333–345: 15.11; muzsy / Shutterstock: 13.29; NASA / Jet Propulsion Laboratory – Caltech: 13.28; NASA / Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: Praktijk 16.1; NASA / University of Texas Center for Space Research: 13.3; NASA Photo / Alamy Stock Photo / Imageselect, Wassenaar: 13.1; NASA: 13.18; Oeuvres complètes. Tome XVI. Percussion(1929)– Christiaan Huygens, p. 29, DNBL: 15.1; Olympiade 2016: Praktijk 12.3; Orbital Propulsion Centre, ArianeGroup: 13.32; PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, https://phet.colorado.edu: 12.24; RIA Novosti / Alamy / Imageselect, Wassenaar: 14.10; Rutger Wijnhoven, Rotterdam: stripverhaal Praktijk 15; S. Beckwith (STScI) Hubble Heritage Team, (STScI/AURA), ESA, NASA: 14.31; Science Photo Library / ANP Foto, Den Haag: 16.2, 16.5, 16.7 l, 16.20; Sierra Blakely / Wikimedia Commons: Praktijk 12.1a; Sittrop Grafisch Realisatiebureau, Rotterdam: Praktijk 12.2, 12.3, 12.6, 12.12, 12.16, 12.17, 12.22, 12.23, 12.25, 12.27, 12.32, 12.37, 12.38, 12.40, 12.41, 12.42, 12.46, Praktijk 13.4, Praktijk 13.5, 13.9, 13.10, 13.15, 13.17, 13.22, 14.1, 14.8, 14.9, 14.14, 14.15, 14.17, 14.19, 14.21, 14.24, 14.26, 14.27, 14.29, 14.30, 14.33, 14.34, 14.38, 14.42 l, 14.46, 15.6, 15.8, 15.15, 15.16, 15.17, 15.18, 15.20, 15.21, Praktijk 16.2, 16.3, 16.7 r, 16.14, 16.15, 16.19; Smith Collection / Gado / Getty Images: 12.15; Studio Roosegaarde: 12.35; Taiga / Shutterstock:12.29; US Air Force, USA: 15.3; Vattenfall / Jorrit Lousberg: Praktijk 14.2; Wgfimages / 123RF: 14.13; Wikimedia Commons: Praktijk 12.5, Praktijk 12.6, 12.7, 12.8, 15.9; Wivoca / Shutterstock: 13.21a; Zeitschrift für Physik, 1961, Volume 161, Issue 4, pp 468 (Fig. 8): 12.

ISBN: 978 94 020 1323 8
Editie 2020, eerste oplage

MALMBERG

AUTEURS
Hans van Bemmel
Lodewijk Koopman

EINDREDACTIE
Claud Biemans, Frontlinie

MET MEDEWERKING VAN
Fons Alkemade




- Dit boek is van jou.
- Je mag in dit boek schrijven en aantekeningen maken.
- Je hebt ook toegang tot de online leeromgeving.

ISBN 978 94 020 1323 8
9 789402 013238
566700

